

선형 제어 시스템 설계 (Ⅲ) : 상태 공간 제어기 설계

최한호

동국대학교 전기공학과

1. 서론

참고문헌 [1]-[9]를 토대로 선형 제어 시스템 설계 이론의 연재물의 첫번째로 [10]에서는 케환 시스템의 성능과 안정도 판별에 관련된 고전 선형 제어 이론과 이와 관련된 Matlab 명령어에 대하여 다루었다. 그리고 [11]에서는 대표적인 고전 제어기인 진상, 지상 및 PID 제어기 설계에 대하여 다루었다. 본고에서는 시리즈물의 마지막으로 상태공간상에서 이루어지는 modern, postmodern 제어기 설계에 대하여 다룬다.

2. 극점 배치에 의한 상태 케환 제어기 설계

2.1 전상태 케환(full state feedback) 제어기 설계

- Stabilizability : 주어진 상태행렬 (A, B) 쌍에 대하여 $A - BK$ 의 고유치를 0보다 작게 할 수 있는 행렬 K 가 존재하면 (A, B) 는 안정가능하다고 한다.
- Controllability : n 차 시스템의 상태행렬 (A, B) 쌍에 대하여 $A - BK$ 의 고유치를 중복되지 않고 복소수는 쌍으로 임의의 위치시킬 수 있는 행렬 K 가 존재하면 (A, B) 는 제어가능하다고 한다. n 차 시스템이 제어가능하면 제어가능성행렬 W_c 의 rank는 n 이다.
즉 $rank([B, AB, \dots, A^{n-1}B]) = rank W_c = n$
- Ackerman's 공식 : SISO 시스템의 경우 $det(sI - A + BK) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ 과 같을 때 이득 K 는 아래의 공식처럼 주어진다.
 $K = [0, 0, \dots, 0, 1] W_c^{-1} (A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0 I)$
- $k = acker(A, B, p)$: 주어진 n 차 단일입력 시스템의 상태행렬 A, B 쌍에 대하여 $A - Bk$ 의 고유치가 열벡터 p 처럼 될 이득 k 를 구해주는 matlab 명령어다.
- $k = place(A, B, p)$: 주어진 n 차 다중입력 시스템의 상태행렬 A, B 쌍에 대하여 $A - Bk$ 의 고유치가 열벡터 p 처럼 될 이득 k 를 구해주는 matlab 명령어다.
- $ctrb(A, B)$: 제어가능성행렬 W_c 를 되돌려주는 matlab 명령어이다.

- $[a, b, c, T, K] = ctrbf(A, B, C)$: 주어진 시스템 행렬 A, B, C 를 $a = T^* A^* T^* = [Anc, 0; A2I, Ac]$, $b = T^* B = [0; Bc]$, $c = C^* T^* = [Cnc, Cc]$, 여기에서 (Ac, Bc) 쌍은 제어가능하고 $Cc(sI - Ac)^{-1} Bc = C(sI - A)^{-1} B$ 인 형태로 바꿔주는 matlab 명령어이다.
- 상태되먹임 시스템에서 오픈루프 이득 : 주어진 n 차 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 에서 입력이 상태 케환으로 $u = -kx$ 처럼 주어진다고 가정하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} B U(s) = G(s) U(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B U(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B \text{이고 } U(s) = -kX(s) \text{에서}$$

$K(s)G(s) = k(sI - A)^{-1} B$ 이다. $K(s)$ 를 극점배치방법에 의해 설계하면 $K(s)$ 의 안정성을 고려하지 않고 설계했기 때문에 그 극점이 불안정한 영역에 위치할 수도 있다. 이는 외란이나 잡음이 크게 증폭되어 입력으로 시스템에 들어갈 수 있으며 전체 제어시스템의 조건적인 안정만을 보장할 수 있다.

- 상태되먹임에 따른 전달함수 : 주어진 n 차 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 에서 입력이 상태 케환으로 $u = -kx + Hr$ 처럼 주어진다고 가정하자. 여기에서 r 은 기준입력이고 H 은 기준입력에 대하여 정상상태오차를 작게 만들기 위한 상수이득이다. 그러면 전체 전달함수는 $\dot{x} = (A - Bk)x + BHr, y = Cx$ 를 라플라스 변환하여 $H_{yr} = C(sI - A + Bk)^{-1} BH$ 으로 구할 수 있다.
- 전상태 되먹임 제어기의 장단점 : 상태공간에서 설계하면 자유롭게 극점을 배치해 응답을 향상시킬 수 있으나 실제 시스템에서는 상태가 물리적인 변수가 아니라 측정이 불가능한 경우도 있고 무한대의 대역폭을 갖는 센서를 요구하기에 모든 상태정보를 얻는다는 것은 비실용적이며 비용이 많이 든다. 또한 측정에서의 문제뿐만 아니라 전상태를 이용하여 구현하게 되면 시스템의 복잡함을 증가시켜 신뢰도를 감소시키고 비용도 증가시킨다.

2.2 전차수(full order) 관측기 설계

- Detectability : 주어진 상태행렬 (C, A) 쌍에 대하여 $A-CL$ 의 고유치를 0보다 작게 할 수 있는 행렬 L 가 존재하면 (C, A) 는 탐지가능하다고 한다.
- Observability : n 차 시스템의 상태행렬 (C, A) 쌍에 대하여 $A-CL$ 의 고유치를 중복되지 않고 복소수는 쌍으로 임의의 위치시킬 수 있는 행렬 L 가 존재하면 (C, A) 는 관측가능하다고 한다. n 차 시스템이 관측가능하면 관측가능성행렬 W_o 의 rank는 n 이다.

즉 $rank([C; CA; \dots; CA^{n-1}]) = rank W_o = n$

- Ackerman's 공식 : 상태제어기 설계에서 A, B 를 A^T, C^T 로 대체하여 구하면 된다.
- $l = acker(A', C', p)$: 주어진 n 차 단일입력 시스템의 상태행렬 (C, A) 쌍에 대하여 $A-1C$ 의 고유치가 열벡터 p 처럼 될 이득 l 를 구할 수 있다.
- $L = place(A', C', p)$: 주어진 n 차 다중입력 시스템의 상태행렬 (C, A) 쌍에 대하여 $A-LC$ 의 고유치가 열벡터 p 처럼 될 이득 L 를 구할 수 있다.
- `obsv(A, C)` : 관측가능성행렬 W_o 를 되돌려주는 matlab 명령어이다.
- `[a, b, c, T, K] = obsvf(A, B, C)` : 주어진 시스템 행렬 A, B, C 를 $Co(sI - Ao)^{-1}Bo = C(sI - A)^{-1}B$ 가 성립하도록 $a = T^*A^*T' = [A_{no}, \quad A_{12}:0 \quad Ao]$, $b = T^*B = [B_{no}:Bo]$, $c = C^*T' = [0, \quad Co]$ 인 형태로 바꿔주는 matlab 명령어이다. 여기에서 (Ao, Bo) 쌍은 제어가능한 쌍이다.
- 주어진 가관측 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 에 대한 전차수 관측기 : $\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$
- 오차 $e = x - \hat{x}$ 의 동역학 : $\dot{e} = (A - LC)e$ 의 동역학으로 안정하게 할 수 있다. 일반적으로 $A - LC$ 의 극점은 제어기를 구성할 때 $A - Bk$ 의 극점보다 허수축으로부터 몇 배 이상 떨어지게 배치한다.
- 전차수 관측기를 사용한 되먹임 시스템에서 오픈루프 이득 : 주어진 n 차 가관측 가제어 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$

에서 관측기 $\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$ 로 상태를 관측하여 입력이 $u = -k\hat{x}$ 처럼 주어진다고 가정하자.

그러면 $K(s) = k(sI - A + Bk + LC)^{-1}L$ 이고

$KG = k(sI - A + Bk + LC)^{-1}LC(sI - A)^{-1}B$ 이다.

- 관측기를 사용한 되먹임에 따른 전달함수 : 주어진 n 차 가관측 가제어 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 에서 관측기

$\frac{d\hat{x}}{dt} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$ 로 상태를 관측하여 입력이

$u = -k\hat{x} + Hr$ 처럼 주어진다고 가정하자. 여기에서 r 은 기준입력이고 H 은 기준입력에 대하여 정상상태오차를 작게 만들기 위한 상수이득이다. 그러면 전체 전달함수는

$\dot{x} = Ax - Bk\hat{x} + BHr, \quad y = Cx$

$\dot{\hat{x}} = LCx + (A - B - LC)\hat{x} + BHr$ 로부터

$H_{yr} = C(sI - A + Bk)^{-1}BH$ 으로 구할 수 있다.

- 관측기반 제어기 구하는 matlab 프로그램 예 : 입력은 SISO 시스템 행렬 (A, B, C) 와 $A-Bk$ 의 극점위치 `cp`, $A-LC$ 의 극점위치 `op`, 출력은 보상기 행렬 (ak, bk, ck)

```
function [ ak, bk, ck ] = fosfc(a, b, c, cp, op)
k=place(a, b, cp); l=place(a', c', op); l=l';
ak=a-b*k-l*c; bk=l; ck=k;
```

- $K(s)G(s)$ 를 구해 이득여유, 위상여유, 이득교차주파수, 위상교차주파수를 구하는 matlab 프로그램 예 : 입력은 SISO 시스템 행렬 (A, B, C) 와 $A-Bk$ 의 극점위치 `cp`, $A-LC$ 의 극점위치 `op`, 출력은 `gm, pm, wg, wp`

```
function [ gm, pm, wp, wg ] = fosfcm(A, B, C, cp, op)
[ ak, bk, ck ] = foofc(A, B, C, cp, op);
[ agk, bgk, cgk, dgk ] = series(A, B, C, 0, ak, bk, ck, 0);
[ mc, pc, w ] = bode(agk, bgk, cgk, dgk);
[ gm, pm, wp, wg ] = margin(mc, pc, w);
```

예제 1 : 시스템 $G(s) = 10/s^3 + 3s^2 + 20s$ 를 고려하자. 요구되는 극점은 `cp = [-2, -1+j, -1-j]`, `op = [-3+3j, -3-3j, -4]` 이라고 가정하자. 아래의 프로그램은 위의 프로그램을 이용하여 제어기이득 $k = [-24, -89, 6]$ 를 얻고 관측기 이득 $L = [-5400, 267, -12]^T$ 를 얻은 후 GK 의 니콜스선도와 $u = -k\hat{x} + 1, \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$ 로 입력을 가했을 때 응답을 그린 그림 1를 얻기 위한 matlab 프로그램이다. 그림에서 보듯이 위상여유와 이득여유 등의 주파수 영역 특성과 시간영역 응답특성도 좋은 편이 아님을 알 수 있다.

```
ng=10; dg=[ 1 3 20 0 ]; cp=[ -2, -1+j, -1-j ];
op=[ -3+3*j, -3-3*j, -4 ];
[ a, b, c, d ] = tf2ss(ng, dg);
[ ak, bk, ck ] = foofc(a, b, c, cp, op);
[ agk, bgk, cgk, dgk ] = series(a, b, c, d, ak, bk, ck, 0);
[ at, bt, ct, dt ] = feedback(a, b, c, d, ak, bk, ck, 0);
t=[ 0:0.01:5 ]; y2=step(at, bt, ct, dt, 1, t);
[ mu, ph ] = bode(agk, bgk, cgk, dgk);
mudb=20*log10(mu);
subplot(211); plot(ph, mudb);
```

```
axis([-270 -90 -40 40]);
xlabel('Phase(degree)');
ylabel('Magnitude(dB)'); grid;
subplot(212); plot(t,y2);
y2m=abs(dcgain(at,bt,ct,dt));
axis([0 5 -y2m y2m]);
xlabel('Time(sec)'); ylabel('Magnitude');
print -dps fig1.ps
```

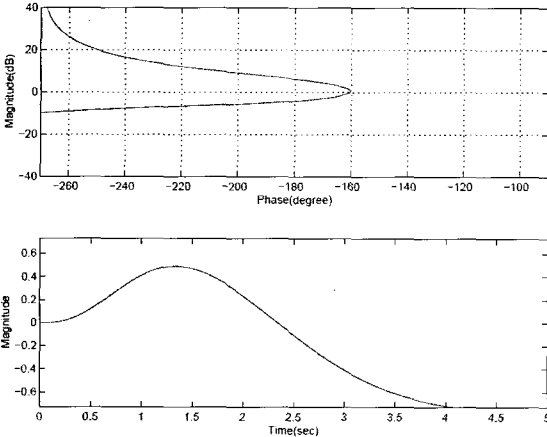


그림 1. 예제 1의 GK의 니콜슨선도(위)와 응답특성(아래)

2.3 축소차수(reduced order) 관측기 설계

- 시스템의 변환 : 주어진 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 에서 B, C 가 full rank 라면 다음처럼 변환가능하다.

$$y = A_{11}y + A_{12}z + B_1u$$

$$z = A_{21}y + A_{22}z + B_2u, z = \Phi^T x, C\Phi = 0, \Phi^T \Phi = I$$

$$A_{11} = CAC^T(CC^T)^{-1}, A_{12} = CA\Phi,$$

$$A_{21} = \Phi^T AC^T(CC^T)^{-1}, A_{22} = \Phi^T A\Phi,$$

$$B_1 = CB, B_2 = \Phi^T B$$

- 관측기 이득 공식 L : (C, A) 가 안정하면 $A_{22} - LA_{12}$ 을 안정하게 하는 L 이 존재한다.
- 축소차수 관측기 :

$$\dot{w} = Fw + Dy + Gu, \hat{x} = \Phi w + Ny$$

$$F = A_{22} - LA_{12}, D = FL + A_{21} - LA_{11},$$

$$G = B_2 - LB_1, N = C^T(CC^T)^{-1} + \Phi L$$

- 오차 $\tilde{z} = z - \hat{z}$ 의 동역학 : $\dot{\tilde{z}} = (A_{22} - LA_{12})\tilde{z}$ 로 주어지며 지수적으로 안정하게 할 수 있다.
- 축소 차수 관측기를 사용한 되먹임 시스템에서 오픈루프 이득 : 주어진 n 차 가관측 가제어 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 에서 관측기 $\dot{w} = Fw + Dy + Gu, \hat{x} = \Phi w + Ny$ 로 상태를 관측하여 입력이 $u = -k\hat{x}$ 처럼 주어진다고 가정하자.

그러면 $K(s) = k\Phi(sI - F + Gk\Phi)^{-1}(D - GkN) + kN$ 이고 $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 이므로 다음처럼 주어진다.

$$K(s)G(s) = [k\Phi(sI - F + Gk\Phi)^{-1}(D - GkN) + kN]C(sI - A)^{-1}B$$

- 축소 차수 관측기를 사용한 되먹임에 따른 전달함수 : 주어진 n 차 가관측 가제어 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ 에서 관측기 $\dot{w} = Fw + Dy + Gu, \hat{x} = \Phi w + Ny$ 로 상태를 관측하여 입력이 $u = -k\hat{x} + Hr$ 처럼 주어진다고 가정하자. 여기에서 r 은 기준입력이고 H 은 기준입력에 대하여 정상 상태오차를 작게 만들기 위한 상수이득이다. 그러면 전체 전달함수는 다음 식에 의하여

$$\dot{x} = (A - BkNC)x + BkMw + BHr, y = Cx,$$

$$\dot{w} = (DC - GkN\Phi)x + (F - GkM)w + GHR$$

아래처럼 구해진다.

$$H_{yr} = C(sI - A + Bk)^{-1}BH$$

- 관측기 기반 제어기의 장단점 : 관측기를 사용해서 상태공간에서 설계하면 전차수 관측기의 경우에는 페루프의 극점은 제어기의 행렬 $A - Bk$ 의 극점과 관측기의 오차동역학 시스템 행렬 $A - LC$ 의 극점의 합집합이며 축소차수 관측기의 경우에는 페루프의 극점은 제어기의 행렬 $A - Bk$ 의 극점과 관측기의 오차동역학 시스템 행렬 $A_{22} - LA_{12}$ 의 극점의 합집합으로 전상태 되먹임에서와 같이 자유롭게 극점을 배치해 응답을 향상시킬 수 있다. 만약 상태들이 경제적으로 측정되고 되먹임되면 관측기 기반 제어시스템은 적절할 수도 있으나 관측기를 사용하면 시스템의 복잡도가 증가되고 신뢰도가 감소되며 비용이 증가된다. 특히 시스템 차수를 n 출력수를 p 라 할 때 전차수 관측기 기반 제어기의 차수가 n 이고 축소차수 관측기 기반 제어기는 $n - p$ 차수를 요구해 일반적으로 차수가 높다는 단점으로 PID 등의 보상에 비해 복잡성과 비용을 증가시킨다. $A - Bk$ 와 $A - LC$ 또는 $A_{22} - LA_{12}$ 는 안정할 수 있으나 $K(s) = k(sI - A + Bk + LC)^{-1}L$ 의 행렬 $A - Bk - LC$ 은 불안정할 수 있고 (축소차수의 경우 $K(s) = k\Phi(sI - F + Gk\Phi)^{-1}(D - GkN) + kN$ 의 행렬 $F - Gk\Phi$ 가 불안정할 수 있다) 불안정한 극점이나 영점을 도입하게 되어 안정성 여유를 감소시킨다. 시간 영역 설계 기법이라 주파수 영역 사양을 만족시키기 어려운 단점이 있다.
- 축소차수 관측기 기반 제어기 구하는 matlab 프로그램 예 : 입력은 SISO 시스템 행렬 (A, B, C) 와 $A - Bk$ 의 극점위치 cp , $A_{22} - LA_{12}$ 의 극점위치 op , 출력은 보상기 행렬 (ak, bk, ck, dk)

```
function [ ak, bk, ck, dk ] = roofc (A, B, C, cp, op)
k = place (a, b, cp); ph = null (C); cg = C * inv (C * C');
```

$A11=C^*A^*cg$; $A12=C^*A^*ph$;
 $A21=ph'^*A^*cg$; $A22=ph'^*A^*ph$;
 $B1=C^*B$; $B2=ph'^*B$;
 $l=place(A22', A22', op)$; $l=l'$;
 $F=A22-l^*A12$; $G=B2-l^*B1$;
 $D=F^*l+(A21-l^*A11)$; $N=cg+ph^*l$;
 $ak=F-G^*k^*ph$; $bk=D-G-k^*N$; $ck=k^*ph$; $dk=k^*N$;

3. Linear Quadratic 제어

3.1 Linear Quadratic Regulator 문제

- LQR 문제 : quadratic functional 형태의 목적함수를 최소화 하는 전상태 궤환 제어기 설계 문제로 구현과 해석이 쉬운 선형제어기를 설계할 수 있고 좋은 안정도 여유와 감도를 얻을 수 있는 장점이 있다.
- 대상 시스템 : $\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx$
- 목적 함수 :

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [x^T Qx + u^T Ru] dt, \quad Q \geq 0, R > 0$$
- Q, R 의 선정 : 좋은 특성을 위해서는 반복적이며 지루한 선정과정을 요구한다. 일반적으로
 - $Q \gg I, R \ll I$ 이면 과도한 오차를 줄여주나 입력값이 커질 수 있는 제어기의 구현에 적절하다
 - $Q \ll I, R \gg I$ 이면 제어이득이 작은 제어기의 구현에 적절하다.

3.2 Minimum principle를 활용한 LQR 문제의 해

- Hamiltonian의 정의 :

$$H(x, \lambda, t) = \frac{1}{2} (x^T Qx + u^T Ru) + \lambda^T (Ax + Bu)$$
- 최적조건 :

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx + A^T \lambda, \quad \lambda(T) = 0, \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda$$
- 최적조건을 이용한 해의 방정식 :

$$\frac{dh}{dt} = Hh, \quad h = [x^T, \lambda^T]^T, \quad x(0) = x_0, \quad \lambda(t_f) = 0$$
 여기에서 Hamiltonian 행렬은

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix}$$
로 정의된다.
- 변수치환 : $\lambda = Px$ 로 하여 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} = \dot{P}x + PAx - PBR^{-1}B^T Px = -Qx - A^T Px$$
- Riccati 미분 방정식 :

$$-\frac{dP}{dt} = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P, \quad P(t_f) = 0$$

- 최적제어기 : $u^* = -K(t)x = -R^{-1}B^T P(t)x$ 여기에서 $P(t)$ 는 리카치 미방의 해이다.
- ARE(Algebraic Riccati Equation) : $t_f \rightarrow \infty$ 일 때 리카치 미분방정식으로 상수해 P 를 준다.

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$
- ARE 해의 존재조건 : (A, B) 가 안정가능하고 (Q, A) 가 관측가능하면 $P > 0$ 인 해가 항상 존재한다.
- $J_c = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T Qx + u^T Ru] dt$ 일 때 최적제어기와 최적 목적함수값 : 최적제어기는 $u^* = -Kx = -R^{-1}B^T Px$ 로 주어지고 최적 목적함수값은 $J_c = \frac{1}{2} x^T(0)Px(0)$ 이다. 여기서 P 는 ARE의 유일한 해다.

3.3 LQR의 일반화

- Cross product term의 도입에 의한 목적함수 :

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Qx + 2x^T N + u^T Ru) dt, \quad Q \geq 0, R > 0$$
- Cross product term의 도입에 따른 ARE와 최적제어기 :

$$u^* = -Kx = -R^{-1}(B^T P + N^T)x$$
로 여기에서 P 는 다음 리카치 방정식의 해이다.

$$0 = A^T P + PA + Q - (PB + N)R^{-1}(B^T P + N^T)$$
- α 안정조건을 보장하는 목적함수 :

$$J_c = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{2\alpha t} (x^T Qx + u^T Ru) dt, \quad Q \geq 0, R > 0$$
- α 안정조건을 보장하는 목적함수를 위한 ARE와 최적제어기 :

$$u^* = -Kx = -R^{-1}B^T Px$$
로 여기에서 P 는 다음 리카치 방정식의 해이다.

$$0 = (A + \alpha I)^T P + P(A + \alpha I) + Q - PBR^{-1}B^T P$$

3.4 LQR의 특성

- $u = -Kx = -B^T Px$ 일때 루프이득의 정의 :

$$G_{LQ} = K(sI - A)^{-1}B$$
- Return difference의 정의 : $J(s) = I + G_{LQ}(s)$ 로 주어지며 다음을 만족시킨다.

$$J^* R J = R + B^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T C (j\omega I - A)^{-1} B$$
- sensitivity의 정의 : $S(s) = J(s)^{-1}$
- $R = I$ 이며 SISO인 경우 : $|K(j\omega)| \geq 1, |S(j\omega)| \leq 1$ 이며 G_{LQ} 의 나이키스트선도는 항상 $(-1, 0)$ 에 중심을 둔 원의 바깥에 존재한다. 결국 이는 좋은 외란제거와 명령추종성능을 의미한다.
- 이득여유와 위상여유 : $L(s)$ 의 이득여유는 0.5이상이고

위상여유는 60도 이상으로 여유가 매우 크다.

- noise immunity : 다음을 만족시켜 노이즈 감쇠 성능이 좋지는 않다.

$$T(s) = I - S(s) = (I + G_{LQ}^{-1})^{-1} = G_{LQ}(I + G_{LQ})^{-1} \leq 2$$

- 고주파 roll-off rate : $T(j\omega)|_{\omega \gg 1} \approx \frac{1}{j\omega} KB$ 노이즈 감쇠 성능이 작아 LTR이 요구된다.
- 극점의 위치 : cross product term $N=0$ 이면 임의의 위치에 극점을 위치시킬 수 없다.
- cheap control ($R \ll I$ 인 경우) : m개의 유한한 영점을 갖는 시스템에서 페루프의 극점 m개는 개루프의 최소위상 영점의 방향으로 혹은 비최소위상 영점의 거울상으로 접근하고 나머지 (n-m)개의 극점은 단위원상에 대칭으로 위치한다.
- minimum energy control ($R \gg I$ 인 경우) : 안정한 개루프의 극점은 유지되고 불안정한 개루프의 극점은 안정한 거울상으로 접근한다.

3.5 Kalman-Bucy 최적 관측기 설계

- system의 방정식 : $\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w, y = Cx + v$

- 설계에 필요한 가정 :

$$E[w] = E[v] = 0, E[ww^T] = Q_o, E[vv^T] = R_o, E[vw^T] = 0$$

- 목적함수 : $J_o = E[\tilde{x}^T \tilde{x}]$

- ARE : $A\Sigma + \Sigma A^T + \Gamma Q_o \Gamma^T - \Sigma C^T R_o^{-1} C \Sigma = 0$

- 최적관측기 :

$$d\tilde{x}/dt = A\tilde{x} + Bu + L(y - \hat{y}), L = \Sigma C^T R_o^{-1}$$

- 최소화된 error covariance 값 :

$$J_o = \text{Tr}(\Sigma) = \text{Tr}E[\tilde{x} \tilde{x}^T] = E[\tilde{x}^T \tilde{x}], \tilde{x} = x - \hat{x}$$

- cross product term이 존재해 $E[ww^T] = N_o \neq 0$ 인 경우 ARE와 최적관측기 이득 : $L = (\Sigma C^T + N_o) R_o^{-1}$ 로 여기에서 Σ 는 다음 리카치 방정식의 해이다.

$$A\Sigma + \Sigma A^T + \Gamma Q \Gamma^T - (\Sigma C^T + M) R^{-1} (\Sigma C^T + N_o)^T = 0$$

- 최적제어기와 최적관측기의 duality : 제어기 설계에 쓰인 시스템 행렬 (A, B) 쌍과 제어기 이득 K, 그리고 목적함수에 쓰인 행렬 Q, R, N을 로 다음처럼 대체하면 최적관측기를 설계할 수 있다.

$$A \rightarrow A^T, B \rightarrow C^T, K \rightarrow L^T, P \rightarrow \Sigma, Q \rightarrow \Gamma Q_o \Gamma^T, R \rightarrow R_o, N \rightarrow N_o$$

3.6 LQG 문제

- LQG 문제 : LQ 목적함수를 최소화하는 출력 제한 제어기 설계 문제. 출력은 백색잡음을 갖는다.

- 대상 system : $\dot{x} = Ax + Bu + \Gamma w, y = Cx + v$

- 목적 함수 :

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[\int_{-T}^T (x^T Q x + u^T R u) dt], Q_o \geq 0, R_o > 0$$

- 제어기와 필터 이득 :

$$u = -K\hat{x}, d\hat{x}/dt = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), K = R_o^{-1} B^T P, L = \Sigma C^T R_o^{-1}$$

- AREs:

$$A\Sigma + \Sigma A^T + \Gamma Q_o \Gamma^T - \Sigma C^T R_o^{-1} C \Sigma = 0,$$

$$A^T P + PA + Q_o - P B R_o^{-1} B^T P = 0$$

- 비교 : 전상태를 사용하는 LQR 제어기에 관측기를 도입한 LQG 방법은 감도나 안정도여유 특성이 좋지 않아 Q, R을 적절히 선정하는 LTR 기법이 요구됨. 강인도가 좋지 않고 실제 구현시 불안정해질 수 있다.

3.7 LTR 기법

- 튜닝 방법 : 확률적 정보인 Q_o, R_o 는 구하기 힘든 이유도 있으므로 설계에 도움이 되도록 튜닝변수로 활용한다. 보통 $R_o = 1, Q_o = q^2 BB^T$ 로 놓고 q를 증가시키면서 결정. 큰 값을 주면 L이 커지고 고주파의 roll-off 비가 적어져 잡음이나 불확실성에 약하게 하는 단점이 있고 적은 q값은 적은 안정도 여유와 고주파에서 큰 roll-off 비를 주어 잡음영향을 줄이고 강인안정도를 증가시키는 경향이 있다.
- LQG 문제의 제어기와 관측기를 사용한 경우 루프이득 :

$$G_{LQG} = K(sI - A + BK + LC)^{-1} LC(sI - A)^{-1} B$$

- $R_o = 1, Q_o = q^2 BB^T$ 에서 변화 추이 :

$q \rightarrow \infty$ 면 $L \rightarrow \infty, (sI - A + BK + LC)^{-1} LC \rightarrow I$ 로 다음을 얻을 수 있다. $\lim_{q \rightarrow \infty} G_{LQG} = K(sI - A)^{-1} B = G_{LQ}$ 즉 전상태를 사용하는 LQR일 때의 좋은 특성을 회복할 수 있다.

- LTR 알고리즘 : 1. L를 R, Q를 변화시켜 가며 ARE를 풀어 루프이득 K를 설정; 2. $R_o = 1, Q_o = q^2 BB^T$ 로 놓고 q를 변화시켜 가며 ARE를 풀어 L를 결정하고; 3. G_{LQG} 가 G_{LQ} 에 원하는 정도로 닮을 때까지 반복한다.

3.8 LQ 문제를 위한 matlab 명령어

- $[K, P, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R, N)$: cross product term을 갖는 ARE를 풀어 그 해를 P에, 이득을 K에 (A-BK)의 고유치를 E에 되돌려주는 matlab 명령어다. N을 설정하지 않으면 $N=0$ 로 놓고 ARE를 푼다.
- $\text{are}(A, B, C)$: $A^T P + PA - P B R^{-1} B^T P + C = 0$ 형태의 ARE를 풀어 해 P를 되돌려주는 matlab 명령어다.

- $\text{care}(A,B,Q,R,N)$: cross product term을 갖는 ARE를 풀어 그 해를 되돌려주는 matlab 명령어다. R, N을 설정하지 않으면 $R=I, N=0$ 으로 놓고 ARE를 푼다.
- $[L,S,E]=\text{lqe}(A,G,C,Q,R,N)$: cross product term을 갖는 ARE를 풀어 그 해를 S에, 이득을 L에 (A-LC)의 고유치를 E에 되돌려준다. N을 설정하지 않으면 $N=0$ 로 놓고 ARE를 푼다.

4. H_2/H_∞ 설계

4.1 기존 방법의 장단점

- 고전적 방법 : Bode설계의 경우 이득여유, 위상여유, 정상 상태 오차에 대한 요구조건을 만족시키지만 계단 응답 특성이 만족스럽지 못한 경우가 많고 근궤적을 사용한 방법은 한 쌍의 복소수근들을 조정할 수 있으나 다른 극점과 영점들의 위치를 조정하기는 어렵고 두 고전적인 방법 모두 SISO에 국한된다.
- 극점 배치를 사용한 상태공간 설계법 : MIMO 시스템에 적용 가능하고 페루프의 극점을 임의의 곳에 위치시킬 수 있으나 이득여유, 위상여유 등 고전적인 방법에서의 사양을 직접적으로 다루기 어렵고 실제 매우 적은 안정성 여유를 초래할 수 있다.
- LQ 기법 : 제어기 설계 문제가 유일한 제어기와 관측기 이득을 주는 최적화 문제가 되어 사양을 만족시키는 것은 튜닝변수 Q, R 을 선택하는 문제로 바뀐다. 전상태를 사용하는 LQR의 경우에는 6dB이상 최고 무한대의 이득여유와 60도 이상의 위상여유를 제공해 주어 모델의 불확실성에 대하여 강인한 특성을 줄 수 있으나, 전상태를 이용하지 못하는 실제의 경우를 위한 출력 궤환 제어기를 설계할 때 LQG기법을 사용하면 모델의 불확실성을 고려해 놓기 어려워 강인성이 부족하여 불확실성이 있는 실제 환경에서는 적절하게 작동하지 못한다. 이를 해결하기 위해 LTR기법을 활용하여 전상태를 사용한 경우인 LQR 제어기 성능에 가깝도록 한다. 그러나 LTR 기법은 강인성을 얻기 위해 최적 관측기를 희생한 것이다.
- H_2/H_∞ 설계 : H_2 는 LQG 기법의 일반화된 경우로 좀더 복잡한 시스템 방정식에 대하여 LQ 성능지수 혹은 이와 동치인 시스템의 H_2 norm을 최적화하는 방법으로 LQR의 경우와 같은 6dB이상 최고 무한대의 이득여유와 60도 이상의 위상여유를 제공해 주지 못한다. H_∞ 설계는 대역폭이나 저주파이득 등과 같은 주파수영역의 사양을 표현하고 모델 불확실성에 대한 강인성을 고려할 수 있는 방법으로 시스템의 H_∞ norm을 최적화하여 제어기를 설계하는 기법이다.

4.2 주요 정의와 정리

- 특이값의 정의 : 주어진 복소수 행렬에 $A \in C^{n \times m}$ 가 $\text{rank}(A) = k \leq \min(n, m)$ 일 때 특이값 $\sigma_i(A)$ 는 AA^* 의 0이 아닌 고유값의 양의 제곱근으로 $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(AA^*)} = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} > 0, i=1, \dots, k$ 으로 표기한다. 일반적으로 $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_k(A) > 0$ 으로 크기별로 나열한다. $\sigma_1(A) = \sigma_{\max}(A), \sigma_k(A) = \sigma_{\min}(A)$ 로 표기한다. A^* 는 A 의 complex conjugate이다.
- 특이값 분리 : $A \in C^{n \times m}$ 에 대하여 $A = U\Sigma V^*$, $U^* = U^{-1}, V^* = V^{-1}, \Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_i) & 0_{k \times (m-k)} \\ 0_{(n-k) \times k} & 0_{(n-k) \times (m-k)} \end{bmatrix}$ 를 만족시키는 행렬 $U \in C^{n \times n}, V \in C^{m \times m}$ 가 존재한다.
- Schur complement formula : 적절한 차원을 갖는 행렬 A, B, C 에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow A > 0, C - B^T A^{-1} B > 0$$

- H_∞ norm의 정의 : 주어진 안정한 시스템 $H(s)$ 의 H_∞ norm은 아래와 같이 정의된다.

$$\|H\|_\infty = \max_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|H^*u\|_2}{\|u\|_2} = \max_{\omega} \sigma_{\max}[H(j\omega)]$$

- H_2 norm의 정의 : 주어진 안정한 시스템 $H(s)$ (impulse 응답 행렬이 $h(t)$)의 H_2 norm은 아래와 같이 정의된다.

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr} [H^T(j\omega)H(j\omega)] d\omega} = \sqrt{\int_0^{\infty} \text{Tr} [h^T(t)h(t)] dt}$$

- 리아푸노프 정리 : $\dot{x} = Ax$ 가 안정할 필요충분조건은 $0 < V, V = x^T[PA + A^T P]x < 0, \forall x \neq 0$ 를 만족시키는 리아푸노프 함수 $V = x^T P x$ 가 존재하는 것 즉 다음 LMI를 만족시키는 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$P > 0, PA + A^T P < 0$$

- Bounded Real Lemma : 주어진 안정한 시스템 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ 가 $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ 일 필요충분 조건은 다음 LMI를 만족시키는 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$P > 0, \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

증명 : 정의에 따라 시스템 $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$ 에서 $\int y^T y dt < \gamma^2 \int u^T u dt$ 가 성립하면 된다. $V = x^T P x$ 로 하면 $\int [-V + \gamma^2 u^T u - y^T y] dt > 0$ 이 성립하고 $w = [x^T, u^T]^T$ 를 사용해 결국 다음을 얻고

$$\int w^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -\gamma^2 I + D^T D \end{bmatrix} w dt < 0$$

Schur complement 공식을 이용하여 LMI 조건이 필요충분조건이 됨을 알 수 있다.

- $\|H\|_2 < \nu$ 일 필요충분조건 :

주어진 시스템 $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ 에 대하여 $\|H\|_2 < \nu$ 가 성립할 필요충분조건은 아래 LMI를 만족시키는 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$PA + A^T P + C^T C < 0, \text{Tr}(B^T P B) < \nu$$

위의 LMI 조건은 다음중 하나로 대체할 수 있다.

$$PA^T + AP + BB^T < 0, \text{Tr}(CPC^T) < \nu$$

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Q \end{bmatrix} > 0, \text{Tr}(Q) < \nu$$

$$\begin{bmatrix} AP + PA^T & PC^T \\ CP & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} P & B \\ B^T & Q \end{bmatrix} > 0, \text{Tr}(Q) < \nu$$

증명 :

정의에 의해 H_2 노름은 $\|H\|_2^2 = \text{Tr}(B^T \int e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt B)$

로 주어지므로 $\|H\|_2 < \nu$ 은 $W = \int e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$ 가

$\text{Tr}(B^T W B) < \nu$ 를 만족시키면 만족된다. 그런데 W 는 observability gramian으로 리아푸노프 방정식 $WA + A^T W + C^T C = 0$ 의 해이다. 그러므로 첫번째 주어진 LMI 조건이 필요충분조건임을 알 수 있다. 마찬가지로 H_2

노름은 $\|H\|_2^2 = \text{Tr}(C \int e^{A t} B B^T e^{A^T t} dt C^T)$ 로 주어질 수 있음을 이용해 두번째 주어진 LMI 조건이 필요충분조건임을 알 수 있다. 세번째와 네번째는 $P^{-1} \rightarrow P$ 로 치환하면 쉽게 얻을 수 있다.

4.3 H_2 제어기 설계

- 개념 : 시스템 $\dot{x} = Ax + Bw, y = Cx$ 에서 H_2 노름은 외란 입력 w 가 백색잡음일 때 제어출력의 rms 값을 의미하여 $\|H\|_2 < \nu$ 은 e_i 를 i 번째 값만 1이고 나머지는 0인 벡터라고 하고 입력을 $w = e_i \delta(t)$ 로 했을 때 $y(t)$ 가 LQ 성능

$\sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} [\delta(t) e_i^T * H^T(t)] [H(t) * e_i \delta(t)] dt < \nu$ 를 만족시킨다는 것을 의미한다. 여기에서 $H(t) = \text{LAPLACE}^{-1}[H(s)]$ 이다.

- 대상 시스템 :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + Bu, \\ z &= C_1 x + D_1 w + Eu, \\ y &= Cx + Fw \end{aligned}$$

z 는 제어출력 y 는 측정출력이다. $y = Cx + Fw + D_2 u$ 로 하지 않는 것은 $(y - D_2 u) \rightarrow y$ 로 치환 가능하여 해석을 쉽게 할 수 있기 때문이다.

- k 차 제어기 형태 :

$$u = C_K v + D_K y, \quad \dot{v} = A_K v + B_K y,$$

$$K_{11} \in R^{m \times p}, K_{12} \in R^{m \times k}, K_{21} \in R^{k \times p}, K_{22} \in R^{k \times k}$$

- 페루프 시스템 방정식 : $x_{cl} = [x^T, v^T]^T \in R^{n+k}$ 일 때 다음처럼 주어진다.

$$\dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w, \quad z = C_{cl} x_{cl} + D_{cl} w$$

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A + B D_K C & B C_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}, \quad B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 + B D_K F \\ B_K F \end{bmatrix}, \\ C_{cl} = [C_1 + E D_K C, E C_K], \quad D_{cl} = D_1 + E D_K F$$

- 외란 입력 w 에서 제어출력 z 로의 전달함수 $H_{wz}(s)$:

$$H_{wz}(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl} + D_{cl}$$

- $\|H_{wz}\|_2 < \nu$ 일 필요충분조건 :

$$D_{cl} = 0, \begin{bmatrix} PA_{cl} + A_{cl}^T P & PB_{cl} \\ B_{cl}^T P & -I \end{bmatrix} < 0, \\ \begin{bmatrix} P & C_{cl}^T \\ C_{cl} & W \end{bmatrix} > 0, \text{Tr}(W) < \nu$$

- 변수 치환 : $X_v = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$ 이면

$$P = \begin{bmatrix} X & U \\ U^T & X_3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & V \\ V^T & Y_3 \end{bmatrix}, \quad YX + VU^T = I$$

가 존재한다.

- 제어기 변수 변환 공식 :

$$\begin{bmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XAY & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U & XB \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ CY & I \end{bmatrix}$$

- 제어기 변수 역변환 공식 :

$$\begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & XB \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} A_t - XAY & B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} V^T & 0 \\ CY & I \end{bmatrix}^{-1}$$

- 시스템 행렬 변수 변환 공식 :

$$PA_{cl} + A_{cl} P \rightarrow A_v + A_v^T, \quad PB_{cl} \rightarrow B_v, \quad P \rightarrow X_v, \quad C_{cl} \rightarrow C_v, \quad D_{cl} \rightarrow D$$

$$A_v = \begin{bmatrix} AY + BC_t & A + B D_t C \\ A_t & XA + B_t C \end{bmatrix}, \quad B_v = \begin{bmatrix} B_1 + B D_t F \\ X B_1 + B_t F \end{bmatrix}, \\ C_v = [C_1 Y + E C_t, C_1 + E D_t C], \quad D_v = D_1 + E D_t F$$

- $\|H_{wz}\|_2 < \nu$ 일 필요충분조건 LMI 변환 형태 :

$$\begin{bmatrix} A_v + A_v^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{bmatrix} < 0, \begin{bmatrix} X_v & C_v \\ C_v^T & W \end{bmatrix} > 0, \\ \text{Tr}(W) < 0, \quad D_v = 0$$

- 제어변수 계산법 :

- 1) X, Y, A_t, B_t, C_t, D_t 를 LMI 필요충분조건으로 부터 계산한다.
- 2) $VU^T = I - XY$ 를 이용하여 V, U 를 계산한다.

3) 제어기 변수 역변환 공식으로 A_K, B_K, C_K, D_K 를 계산한다. 여기에서 제어기 차수 k 는 $rank(I - XY) = k$ 의 관계가 있다. 그러므로 $k < n$ 의 축소차수 제어기를 얻으려면 $rank(I - XY)$ 가 n 보다 적게 하는 X, Y, A_i, B_i, C_i, D_i 를 찾으면 된다.

4.4 LQG의 H_2 제어 등가성

- LQG의 system :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + \Gamma w, y = Cx + v, \\ E[vw^T] &= E[w] = E[v] = 0, \\ E[ww^T] &= Q_o, E[vv^T] = R_o \end{aligned}$$

- H_2 의 대응 system 방정식 :

목적함수가 $J = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T R u] dt$ 일 때 다음과 같다.

$$A = A, B = B, C = C, w = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \Gamma Q_o^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$F = [0, R_o^{\frac{1}{2}}], C_1 = \begin{bmatrix} Q_o^{\frac{1}{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, D_1 = 0, E = \begin{bmatrix} 0 \\ R_o^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

- LQR 문제의 H_2 대응 : $C = I, F = 0$ 인 경우로

$\dot{x} = Ax + B_1 w + Bu, y = x, z = C_1 x + Eu$ 인 시스템의 $u = -Kx$ 라고 했을 때 전달함수

$H_{zw} = (C_1 - EK)(sI - A + BK)^{-1} B_1$ 의 H_2 norm을 최적화하는 문제와 같아

$K = (E^T E)^{-1} (B^T X + E^T C_1) = R^{-1} B^T X$ 이고 X 는 ARE $A^T X + XA - XBB^T X + Q = 0$ 의 해이다. 그리고 최적 H_2 norm은 $\|H_{zw}\| < \nu^* = \text{Tr}(B^T X B_1)$ 이다.

- Kalman-Bucy filter 문제의 H_2 대응 : 필터설계 문제는 시스템 $\dot{x} = Ax + B_1 w + Bu, y = Cx + Fw$ 에 대하여

$\hat{x} = (A - LC)\hat{x} + Ly + B\hat{w}$ 필터를 설계하여 오차동역학 $\dot{e} = (A - LC)e + (B_1 + LF)w, z = e$ 인 시스템의 전달함수 $H_{we} = (sI - A + LC)^{-1} (B_1 + LF)$ 의 H_2 norm을 최적화하는 문제와 같아 $L = R_o^{-1} Y C^T$ 이며 P 는 다음 ARE의 해이다.

$$\begin{aligned} (A - LC)Y + Y(A - LC)^T + (B_1 + LF)(B_1 + LF)^T \\ = AY + YA^T + \Gamma Q_o \Gamma^T - YC^T R_o^{-1} CY = 0 \end{aligned}$$

그리고 최적 H_2 norm은 $\|H_{we}\| < \nu^* = \text{Tr}(Y)$ 이다.

- LQG 문제의 H_2 대응 :

$\dot{x} = Ax + B_1 w + Bu, z = C_1 x + Eu, y = Cx + Fw$ 의 $\|H_{zw}\|_2$ 를 최소화하는 것은

$\hat{x} = (A - BK - D)Gx + Ly, u = -K\hat{x}$ 같은 Kalman 최적필터 기반 제어기를 설계하는 LQG 문제 (LQR문제에서 구한 전상태 케환제어기의 상태를 Kalman 최적필터를 통해 추정된 값 \hat{x} 로 대체하는 것)와 동치이다.

4.5 H_∞ 제어기 설계

- 개념 : 시스템 $\dot{x} = Ax + Bw, z = Cx + Dw$ 에서 H_∞ norm은 유한한 rms 외란 혹은 에너지의 외란 입력신호 w 에 대한 제어 출력값 z 의 이득 중 최악의 값을 의미해서 임의의 주파수에 크기 1을 갖는 정현파 외란 입력이 가해졌을 때 제어 출력 정상상태응답의 최대 크기값으로 간주할 수 있다. 또한 $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ 는 $w = \Delta(t)z, \|\Delta(t)\| \leq 1/\gamma$ 를 만족시키는 임의의 외란입력에 대해서 폐회로 시스템이 안정을 유지하는 외란제거성능 구속조건으로 간주할 수 있다. 결국 γ 를 최소화시키면 외란에 대하여 최대 강인하고 임의의 주파수를 갖는 외란입력에 의해 제어출력에 미치는 영향을 최소화시키는 제어기를 구할 수 있다.

- 대상 시스템 :

$\dot{x} = Ax + B_1 w + Bu, z = C_1 x + D_1 w + Eu, y = Cx + Fw$ 로 z 는 제어출력 y 는 측정출력이다.

- k 차 제어기 형태 :

$$u = C_K v + D_K y, \dot{v} = A_K v + B_K y,$$

$$K_{11} \in R^{m \times p}, K_{12} \in R^{m \times k}, K_{21} \in R^{k \times p}, K_{22} \in R^{k \times k}$$

- 외란입력 w 에서 제어출력 z 로의 전달함수가 $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ 를 만족할 필요충분조건인 LMI 변환 형태 :

$$\begin{bmatrix} A_v + A_v^T & B_v & C_v^T \\ * & -\gamma I & D_v^T \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, X_v > 0$$

4.6 matlab 명령어

- $[k, cl, ga] = h2syn(p, nmeas, ncon)$: 명령어 ss등을 통해 표현된 n 차 시스템 $p([A, B_1, B; C_1, D_1, E; C, F, D_2])$ 의 형태로 $ncon$ 은 입력의 숫자로 입력행렬 B의 열벡터 수와 같고 $nmeas$ 는 측정 출력의 숫자로 출력행렬 C의 행벡터 수와 같다)에 대하여 n 차의 H_2 최적 제어기 k ($[A_k, B_k; C_k, D_k]$ 의 형태)와 최적제어기를 사용한 폐회로 시스템에서 외란입력 w 에서 제어출력 z 로의 전달함수 cl 와 최적 H_2 norm ga 를 계산하여 되돌려 준다.
- $[k, cl, ga] = h2syn(p, nmeas, ncon)$: 명령어 ss등을 통해 표현된 n 차 시스템 $p([A, B_1, B; C_1, D_1, E; C, F, D_2])$ 의 형태로 $ncon$ 은 입력의 숫자로 입력행렬 B의 열벡터 수와 같고

nmeas는 측정 출력의 숫자로 출력행렬 C의 행벡터 수와 같다)에 대하여 n차의 H_∞ 최적 제어기 $k([A_k, B_k; C_k, D_k])$ 의 형태와 최적제어기를 사용한 폐회로 시스템에서 외란입력 w에서 제어출력 z로의 전달함수 cl와 최적 H_∞ 놈 ga를 계산하여 되돌려 준다.

예제 2 : $\dot{x} = Ax + B_1 w + Bu, z = C_1 x + D_1 w + Eu, y = Cx + Fw$ 의 시스템 행렬이 아래처럼 주어지는 경우 H_2 최적 제어기와 H_∞ 최적 제어기를 구해보자

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, F = 2, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

아래의 matlab 프로그램에 의해 $\|H_{zw}\|_2 < 9.855$ 를 보장하는 다음과 같은 최적 H_2 제어기를 얻을 수 있다.

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 9.68 & 2 \\ -1 & -4.52 & 0.494 \\ 0 & 1.04 & -5 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0.316 \\ 2.51 \\ 0.96 \end{bmatrix} y, u = [0, -3.01, -0.506]v$$

```
a=[ 0 10 2;-1 1 1; 0 2 -5];
b1=[ 1;0;1]; b=[ 0;1;0]; c=[ 0 1 0]; f=2;
c1=[ 0 1 0;0 0 1;0 0 0]; d1=[ 0;0;0];
e=[ 0;0;1]; d2=0;
sys=ss(a,[ b1 b],[ c1;c],[ d1 e;f d2]);
[k,cl,ga]=h2syn(sys,1,1)
```

아래의 matlab 프로그램에 의해 $\|H_{zw}\|_\infty < 6.043$ 를 보장하는 다음과 같은 최적 H_∞ 제어기를 얻을 수 있다.

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 9.69 & 2.11 \\ -11.66 & -1890 & -327 \\ 0 & 1.04 & -4.99 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0.286 \\ 2.84 \\ 1.02 \end{bmatrix} y, u = [-10.7, -1890, -330]v$$

```
a=[ 0 10 2;-1 1 1; 0 2 -5]; b1=[ 1;0;1];
b=[ 0;1;0]; c=[ 0 1 0]; f=2;
c1=[ 0 1 0;0 0 1;0 0 0]; d1=[ 0;0;0];
e=[ 0;0;1]; d2=0;
sys=ss(a,[ b1 b],[ c1;c],[ d1 e;f d2]);
[k,cl,ga]=hinfyn(sys,1,1)
```

5. 결론

선형 제어 시스템 이론에 대한 연재물 3편의 마지막으로 본 고에서는 상태공간상에서 설계하는 modern, postmodern 제어기 설계에 대하여 다루었다. 보다 자세한 사항은 [1-8]을

참조하면 좋다.

참고문헌

- [1] B. Shahina and M. Hassul, Control System Design Using Matlab, Prentice Hall, 1993
- [2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, SIAM, 1994, <http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/>
- [3] W.C. Levine, The Control Handbook, CRC Press, 2000
- [4] C. Scherer and S. Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, <http://www.cs.ele.tue.nl/SWeiland>
- [5] A. Damen and S. Weiland, Robust Control, <http://www.cs.ele.tue.nl/SWeiland>
- [6] 김종식, 선형 제어 시스템 공학, 청문각, 1991년
- [7] G. Balas et al., Robust Control Toolbox, Mathworks, 2005
- [8] Control System Toolbox for Use with Matlab : User's Guide, Mathworks, 2005
- [9] 최한호, 로봇공학 강의 노트, <http://home.dongguk.edu/user/hhchoi>
- [10] 최한호, 선형 제어 시스템 설계(I): 궤환 시스템의 성능과 안정도 판별, 제어자동화시스템공학회지, 제12권, 제1호, pp. 55-69, 2006
- [11] 최한호, 선형 제어 시스템 설계(II): 고전 제어기 설계, 제어자동화시스템공학회지, 제12권, 제2호, pp. 54-63, 2006

..... 저자약력



〈최 한 호〉

- 1966년 8월 25일생.
- 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과 (공학사).
- 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자 공학과 (공학석사).
- 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 (공학박사).
- 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원.
- 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수.
- 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수.
- 관심분야: 강인제어이론, 마이콤기반 제어, 가상현실 및 로봇틱스
- E-mail : hhchoi@dongguk.edu