

저속 압축성 유동에 대한 국소 예조건화 기법 적용 연구

A Study of Local Preconditioning Method for Compressible Low Speed Flows

류 세 현* 이 승 수** 김 범 수**
Ryu, Se-Hyun Lee, Seungsoo Beom-Soo Kim

ABSTRACT

Time marching methods are well-suited for high speed compressible flow computations. However, it is well known that the time marching methods suffer a slow down in convergence due to disparity in Eigenvalues. A local preconditioning method is one of numerical methods to enhance convergence characteristics of low mach number flows by modifying Eigenvalues of the governing equations. In this paper, the local preconditioning method of Weiss is applied to a 2 dimensional Navier-Stokes code and the efficiency of the preconditioning method is shown through a number of computational examples.

주요기술용어(주제어) : Time Marching Method(시간 전진법), Compressible Flow(압축성 유동), Local Preconditioning Method(국소 예조건화 기법)

1. 서론

전산유체 해석기법의 중요한 평가 기준 중 하나는 해석기법이 광범위한 유동조건에서 적합한가의 여부이다. 오랜 동안 많은 연구자들은 저마하수(low mach number)영역에서 극초음속(hypersonic)영역, 비압축성(incompressible) 유동에서 압축성(compressible) 유동, 저 레이놀즈수(low Reynolds number) 유동에서 강한 난류(turbulence)유동에 이르기까지 다양한 유동조건을 하나의 수치 알고리즘으로 해석하려고 노력하였다^[1].

압축성 유동에 대한 전산해석 기법은 지난 30여 년

간 급속히 발전되어 왔으며 밀도중심의 알고리즘은 압축성 유동 해석에 효과적인 알고리즘으로 알려져 있다. 압축성 유동의 지배 방정식이 시간에 의존하는 쌍곡형(hyperbolic)이기 때문에 초기 조건이 주어졌을 때 정상 상태 해(steady state solution)을 얻기 위해서 시간 전진(time marching)을 수행한다. 이 방법은 일반적으로 높은 속도의 유동, 즉 천음속(transonic)과 초음속(supersonic) 영역의 계산에 적합하며 또한 비점성 유동과 실제 응용분야에서 매우 중요한 레이놀즈 수 유동의 계산에서 정량적인 예측이 가능하고 대부분의 공간 이산화 기법을 사용할 수 있다^[1~6].

그러나 광범위한 유동조건에서 적용 가능한 가에 대한 면에서 밀도 중심의 알고리즘에서 사용하는 시간 전진법은 저속의 유동영역에서 수렴성이 저하되는 경직성 문제(stiffness problem)가 발행한다^[1,4]. 쌍곡형 방정식에서 Jacobian 행렬의 고유치들(eigenvalues)은 수치 해석 영역 전체의 특성 곡선(characteristic

† 2006년 3월 2일 접수~2006년 5월 4일 게재승인

* 인하대학교 항공공학과

** 인하대학교 기계공학과 항공우주공학전공

주저자 이메일 : slee@inha.ac.kr

line)의 정보 전달 속도로 정의된다. 시간 전진법에서 CFL 조건에 의해 최대 시간 간격이 최대 고유치에 의해 결정되고 이러한 조건은 가장 느린 특성 곡선의 정보 전달에 관여하는 최소 고유치를 고려하지 않는다. 방정식들이 서로 연관되어 있으므로 고유치들 간 크기 차이가 존재할 때 가장 느린 정보의 전파가 해석 영역의 끝까지 전달되기 전까지는 정상 상태의 해를 얻을 수 없다. 고유치들 간의 크기는 최대 고유치와 최소 고유치의 크기의 비인 조건수(condition number)로 정량화 할 수 있는데 마하수가 0에 근접할수록 조건수는 커지게 되고 저마하수 영역에서의 기존의 압축성 알고리즘의 수렴성이 심각하게 느려진다. 따라서 수렴의 경직성 문제를 해결하기 위해서는 조건수를 1이 되도록 지배방정식을 수정하는 것이 바람직하다^[6].

전체 유동영역이 저 마하수인 경우는 압축성 효과를 무시할 수 있기 때문에 비압축성 방정식을 사용하여 수렴의 경직성 문제를 해결할 수 있다. 그러나 항공기 이착륙시의 날개와 플랩 사이의 공간에서의 흐름과 같이 주위의 저속 유동장에 고속의 흐름이 포함되는 경우나 강력한 열원으로 인하여 밀도 변화가 큰 저속의 유동장의 경우같이 많은 유동장에서 다양한 유동의 형태를 포함하고 있는 경우에는 압축성 지배 방정식을 통해 해를 구해야 한다. 현재 저속 영역에서 수렴 가속을 위해 지배 방정식의 고유치를 인위적으로 조절하는 방법으로는 압력 섭동(perturbation expansion)을 이용한 방법과 시간 미분항 예조건화(time derivative preconditioning)를 이용하는 것이 있다.

시간 미분항 예조건화 기법은 지배방정식의 시간 미분항에 특정한 행렬을 곱함으로써 지배 방정식의 고유치를 조절하는 방법이다. 예조건화 기법은 예조건화 행렬의 변수로 국지적 유동 변수를 사용하는 국소 예조건화 기법(local preconditioning method)과 기준 마하수를 사용하는 전역 예조건화 기법(global preconditioning method)으로 분류할 수 있다. 전역 예조건화 기법은 국소 예조건화 기법에 비해 예조건화 시스템의 구성은 간단하지만 국소 유동 속도를 충분히 반영하지 못하기 때문에 보다 정확한 해의 예측을 위해서 국소 예조건화 기법이 더 유리할 수

있다^[1,4].

본 연구에서는 Weiss와 Smith의 국소 예조건화 기법^[1]에서 제시한 예조건화 행렬을 사용하였고 이재은, 등^[4]이 제시한 제한자와 압력보정을 통하여 수렴특성을 향상 시켰다. 또한, 이중 시간 적분법(dual time step method)을 이용해서 비정상 유동 계산을 수행하였다. 익형 주위의 비점성 유동에 대해 예조건화 전후의 수렴성과 표면 압력계수를 비교하였고 압력 보정 전후 예조건화 기법의 수렴성을 비교하였다. 저 레이놀즈 수의 유동에 대한 정상상태 해를 비교하기 위해서 평판위의 흐름에 대한 Blasius 문제를 해석하였다. 또한, 비정상 유동에 대한 검증을 위하여 저 마하수 저 레이놀즈수의 Stokes의 두 번째 문제를 해석하여 엄밀해와 비교하였다.

2. 지배 방정식

압축성 유동 지배 방정식인 Navier-Stokes 방정식을 3차원 직교 좌표계에서 미분 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \quad (1)$$

여기에서 t 는 시간을 W 는 보존형 유동변수 벡터를 E 와 F 는 각각 x 방향과 y 방향의 비점성 유속벡터, E_v, F_v 는 각 방향의 점성 유속벡터를 나타낸다. 각 벡터의 성분은 다음과 같다.

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e+p)u \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ (e+p)v \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$E_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \Omega_x \end{pmatrix} \quad F_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \Omega_y \end{pmatrix}$$

여기에서 ρ, u, v, p 는 각각 밀도, x, y 축 방향속도 성분, 압력을 나타낸다. Stress tensor는 다음과 같다.

$$\tau_{ij} = \mu(u_{j,j} + u_{j,i}) - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}u_{k,k} \quad (3)$$

또한 에너지 방정식에 나타나는 $\vec{\Omega}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Omega_i = \tau_{ij}u_j + \kappa T_{,i} \quad (4)$$

한편 기체 분자 상호간의 작용력과 분자 부피를 무시한다면 기체압력 p 는 이상 기체 상태 방정식에 의해 결정된다.

$$p = (\gamma - 1) \left\{ e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) \right\} \quad (5)$$

3. 국소 예조건화 기법

국소 예조건화 된 Navier-Stokes 방정식의 최종 형태는 예조건화 행렬, Γ 을 시간 미분항에 곱해준 형태를 갖는다. 본 논문에서는 예조건화 행렬 Γ 은 Weiss와 Smith^[1]의 예조건화 행렬을 사용하였다.

$$\Gamma \frac{\partial Q_p}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \quad (6)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 & -\frac{\rho}{T} \\ \Theta u & \rho & 0 & -\frac{\rho u}{T} \\ \Theta v & 0 & \rho & -\frac{\rho v}{T} \\ \Theta H - 1 & \rho u & \rho v & -\frac{\rho q}{T} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{\rho T}{\rho C_p} \right) = \left(\frac{1}{U_r^2} + \frac{1}{C_p T} \right) \quad (8)$$

$$U_r = \min \left[c, \max \left(|u|, KU_{cut}, \frac{\mu}{\rho \Delta d}, \sqrt{\frac{|p'|}{\rho}} \right) \right] \quad (9)$$

$$K = 0.5, \quad U_{cut} = \min(U_\infty, c_\infty), \quad p' = p - p_\infty \quad (10)$$

Q_p 는 원시형 유동 변수 벡터로 $[p, u, v, T]^T$ 이고 나머지 비점성 유속 벡터와 점성 유속 벡터는 변하지 않는다.

식 (9)에서 Θ 는 매개변수이고, U_r 은 초음속 유동 영역에서 예조건화 되지 않은 기본 지배 방정식의 고유치로 돌아가게 하는 역할과 정체점에서 발생할 수 있는 불안정성을 제거하기 위한 제한자 역할을 하는 기준속도(reference velocity)이다. 기준속도의 각 항들을 보면 K 는 global cut-off를 위해 고정된 임의의 상수이고 $U_{cut} = \min(u_\infty, c_\infty)$ 는 무딘물체(blunt body) 유동과 같은 국지적으로 아음속 영역을 포함하는 초음속 유동 해석시 기준 속도를 최적화 하는 항이다^[1]. 또한 $\mu/\rho\Delta d$ 은 저 레이놀즈 수의 점성 유동에서 국소 확산 속도(local diffusion velocity)이고 기준 속도는 이것 보다 작아지지 않아야 한다. $\sqrt{|p'|/\rho}$ 는 정체점에서 압력섭동이 증폭되지 않도록 제한하여 수치적 안정성에 기여하는 항이다^[4].

4. 수치해석기법

가. 공간 이산화 기법

앞의 예조건화된 Navier-Stokes 방정식을 크기가 작은 계산격자에 대하여 적분하고 divergence theorem을 적용하여 준이산화 하면 다음과 같다.

$$V \Gamma \frac{dQ_p}{dt} + \sum \hat{F} \Delta S = \sum \hat{F}_v \Delta S \quad (11)$$

여기에서 V 는 조절체적의 면적이다. 또한 그 면에 수직한 비점성 유속벡터와 점성 유속 벡터는 다음과 같이 된다.

$$\hat{F} = (\vec{F} - W\vec{\xi}) \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} \rho k \\ \rho u k + p n_x \\ \rho v k + p n_y \\ (e+p)k + p \xi_t \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{F}_v = \vec{F}_v \cdot \hat{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{yx} \\ n_x \tau_{xy} + n_y \tau_{yy} \\ n_x \Omega_x + n_y \Omega_y \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$k = (\vec{v} - \vec{\xi}) \cdot \hat{n} = -\xi_t + n_x u + n_y v \quad (14)$$

$$\xi_t = \vec{\xi} \cdot \hat{n} = \xi_x n_x + \xi_y n_y \quad (15)$$

여기에서 k 는 조절체적의 표면에 수직한 상대속도의 성분이고 $\vec{\xi}$ 는 조절체적의 이동속도이다. 점성 유속 벡터의 계산에 필요한 속도성분 및 온도의 미분은 gradient theorem을 이용하여 구하였다.

$$\nabla \phi = \frac{1}{V} \oint_{\delta S} \phi \hat{n} dS \quad (16)$$

결과적으로 유한 체적법으로 공간 미분항을 이산화한 준 이산화 방정식이 된다.

$$VT \frac{d(Q_p)}{dt} = R \quad (17)$$

여기에서 잔류량 R 은 다음과 같이 정의된다.

$$R = \left\{ \begin{aligned} &(\bar{F}\Delta S)_{i+1/2} - (\bar{F}\Delta S)_{i-1/2} \\ &+ (\bar{F}\Delta S)_{j+1/2} - (\bar{F}\Delta S)_{j-1/2} \\ &- \left\{ \begin{aligned} &(\hat{F}_v\Delta S)_{i+1/2} - (\hat{F}_v\Delta S)_{i-1/2} \\ &+ (\hat{F}_v\Delta S)_{j+1/2} - (\hat{F}_v\Delta S)_{j-1/2} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

준 이산화한 방정식에서 격자 경계면에서의 수치 유속을 구하는 기법으로 Roe의 근사 리만해를 이용해서 비점성 유속 벡터를 계산한다.

$$\tilde{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} (\hat{F}_i + \hat{F}_{i+1} - \Pi \bar{A}_r \Delta Q_p) \quad (19)$$

A_r 는 국소 예조건화 기법의 예조건화 된 시스템 행렬로서 이 행렬로부터 수정된 고유치와 고유치벡터를 구한다.

$$A_r = \Gamma^{-1} A \frac{\partial W}{\partial Q_p} \quad (20)$$

예조건화된 Navier-Stokes 방정식의 비점성 유량

벡터의 고유치는 다음과 같다.

$$\lambda(A_r) = (k, k, k' + c', k' - c') \quad (21)$$

$$k' = \frac{k}{2}(\beta + 1) \quad (22)$$

$$c' = \sqrt{\left(\frac{k}{2}(\beta - 1)\right)^2 + U_r^2} \quad (23)$$

이 고유치는 원래 방정식의 고유치에 비하면 낮은 마하수에서 조건수가 현저히 개선되었다.

나. 이중 시간 전진법(Dual Time Stepping)

이중 시간 전진법은 비정상 유동장을 해석하기 위한 효과적인 방법중의 하나이다. 예조건화 된 지배 방정식에 가상의 시간항을 더해준 식은 다음과 같다^[1,7].

$$\Gamma \frac{\partial Q_p}{\partial \tau} + \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y} \quad (24)$$

위식에서 $\partial/\partial \tau$ 는 가상의 시간 미분항이고 예조건화 행렬은 가상의 시간 미분항에 곱해진다. 가상의 미분항에는 원시형 변수 벡터를 사용하고 물리적인 시간 미분항에는 보존형 변수 벡터가 포함된다. 식을 앞에서와 같이 공간 이산화하고 시간 이산화 하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\left(1 + \frac{\phi}{2}\right) M \frac{\Delta \bar{Q}_p}{\Delta t} - \frac{\phi}{2} \frac{\Delta W^{n-1}}{\Delta t} + \Gamma \frac{\Delta Q_p^l}{\Delta \tau} - \frac{\theta}{V} R^{l+1} - \frac{1-\theta}{V} R^n = 0 \quad (25)$$

여기에서 수정량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Q}_p &= Q_p^{l+1} - Q_p^n \\ \Delta W^l &= W^{l+1} - W^l \\ \Delta Q_p^l &= Q_p^{l+1} - Q_p^l \end{aligned} \quad (26)$$

또한, 보존형 변수에서 원시형 변수로의 변환 행렬 M 은 다음과 같다.

$$M = \frac{\partial W}{\partial Q_p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T} & 0 & 0 & -\frac{\rho}{T} \\ \frac{u}{T} & \rho & 0 & -\frac{\rho u}{T} \\ \frac{v}{T} & 0 & \rho & -\frac{\rho v}{T} \\ \frac{1}{\gamma-1} & \rho u & \rho v & -\frac{\rho q}{T} \end{bmatrix} \quad (25)$$

가상의 시간 축에서 완전히 수렴을 하면 $\Delta Q_p^i = 0$ 또는 $Q_p^i = Q_p^{i+1} = Q_p^{n+1}$ 이므로 비정상 방정식으로 바뀌게 된다. 비점성 수치 유속 벡터와 점성 유속 벡터를 선형화하여 정리하면 다음과 같다.

$$[D + \sigma(A + B)]\Delta Q_p^i = -\Delta\tau\tilde{R} \quad (28)$$

$$D = (1 + \frac{\phi}{2})M\frac{\Delta\tau}{\Delta t} + \Gamma \quad (29)$$

$$\sigma = \theta\frac{\Delta\tau}{V} \quad (30)$$

$$A = \left\{ \frac{\partial\tilde{F}_{i+1/2}}{\partial Q_{p_{i+1}}} + \frac{\partial\tilde{F}_{i+1/2}}{\partial Q_{p_i}} - \frac{\partial\hat{F}_{v_{i+1/2}}}{\partial Q_{p_{i+1}}} - \frac{\partial\hat{F}_{v_{i+1/2}}}{\partial Q_{p_i}} \right\} \Delta S_{i+1/2} \quad (31)$$

$$\left\{ \frac{\partial\tilde{F}_{i-1/2}}{\partial Q_{p_i}} + \frac{\partial\tilde{F}_{i-1/2}}{\partial Q_{p_{i-1}}} - \frac{\partial\hat{F}_{v_{i-1/2}}}{\partial Q_{p_i}} - \frac{\partial\hat{F}_{v_{i-1/2}}}{\partial Q_{p_{i-1}}} \right\} \Delta S_{i-1/2}$$

$$\tilde{R} = (1 + \frac{\phi}{2})M\frac{\Delta Q_p}{\Delta t} - \frac{\phi}{2}\frac{\Delta W^{n-1}}{\Delta t} + \frac{\theta}{V}R^i + \frac{1-\theta}{V}R^n \quad (32)$$

여기에서 B 는 A 와 유사한 형태를 취한다. 자세한 유도과정은 참고문헌^[8]을 참조하기 바란다.

식 (28)를 근사 인자화(approximate factorization) 방법을 적용하면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$(D + \sigma A)D^{-1}(D + \sigma B)\Delta Q_p^i = -\Delta\tau\tilde{R} \quad (33)$$

다. 경계조건(Boundary Condition)

압축성 유동 방정식에 대해서 원방경계에서의 경계 조건을 만족시키기 위해서 리만 변수(Riemann

variable)를 이용하여 적용한다. 이는 특성치의 방향에 따라 물리적으로 타당한 경계조건을 주는 것으로 아음속과 초음속의 경우가 서로 다르다. 한편 예조건화 된 방정식의 경우에 예조건화 행렬을 지배 방정식에 곱해줌으로서 지배 방정식의 고유치가 변하였기 때문에 경계조건이 바뀔 필요가 있다. 그러나 예조건화에 의하여 고유치의 부호는 바뀌지 않기 때문에 물리적으로 타당한 경계조건은 변화하지 않는다.

라. 압력 보정(Pressure correction)

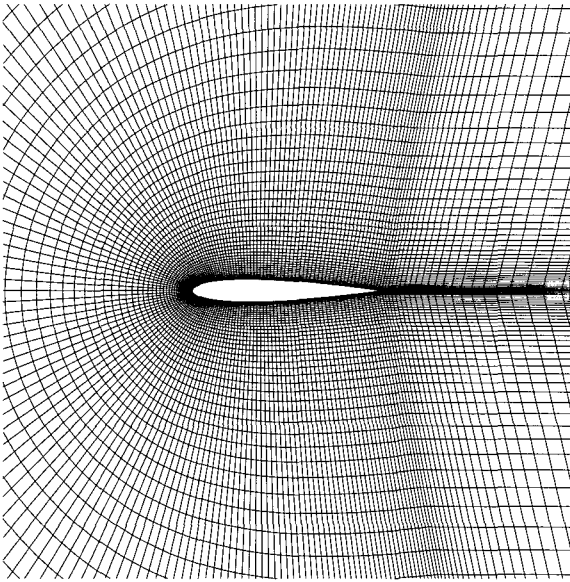
국소 예조건화 기법을 사용한 경우에도 마하수가 1×10^{-7} 인 경우에 유동 변수들의 수치해가 잘 해상되지 않고 수렴성 역시 떨어지는 현상을 보이게 된다. Gulliard와 Viozat의 접근 해석에 의하면 보존형 변수 형태의 지배 방정식에서 동압이 $O(M^2)$ 로 해석되지만 예조건화 되지 않은 Roe의 FDS에서는 동압이 $O(M)$ 으로 해석된다. 여기서 예조건화 기법에 의해 보정된 지배 방정식은 압력항이 $O(M^2)$ 의 동압을 포함하게 되고 따라서 저속에서의 수치해의 정확도를 보장한다고 설명하였다. 이를 해결하는 방법은 계기 압력(gauge pressure)을 사용한다^[4].

$$p = p_0 + p' \quad (34)$$

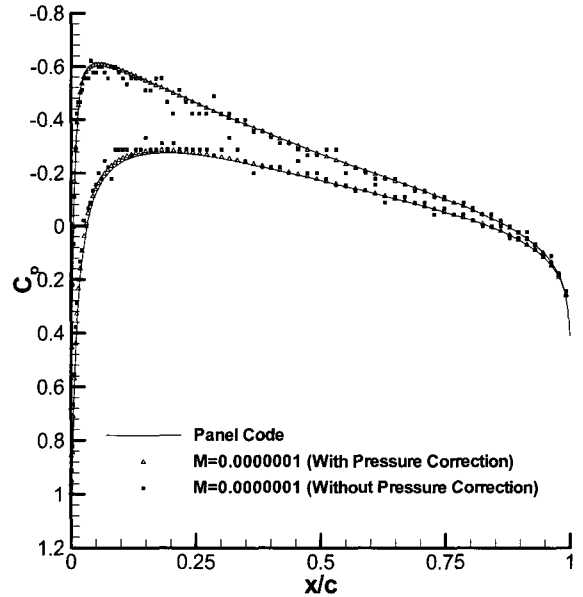
여기에서 p_0 는 상수로 대기압이다.

5 수치 적용 및 해석

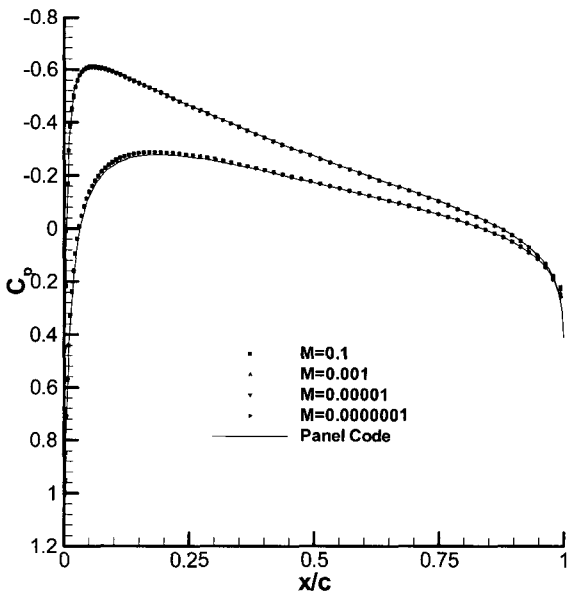
NACA0012 익형 주위의 비점성 유동에 대해서 수치해석을 수행하였다. 격자는 그림 1에 도시된 257×65 개의 격자점으로 이루어진 정렬 격자이다. 계산에 사용된 CFL 수는 15이다. 마하수는 $M=1 \times 10^{-1}$, 1×10^{-3} , 1×10^{-5} , 1×10^{-7} 이다. 그림 2에는 받음각이 1.25° 인 경우 국소 예조건화 기법을 이용한 계산 결과이고 검증용 위해서 비점성 비압축성 코드인 패널 코드(Panel code)를 이용하여 비교하였다. 예조건화 기법을 이용한 계산결과와 패널 코드의 동일한 것을 알 수 있다. 그림 3에는 압력 보정을 하지 않은 경우의 그림과 함께 $M=1 \times 10^{-7}$ 의 경우의 표면 압력계수



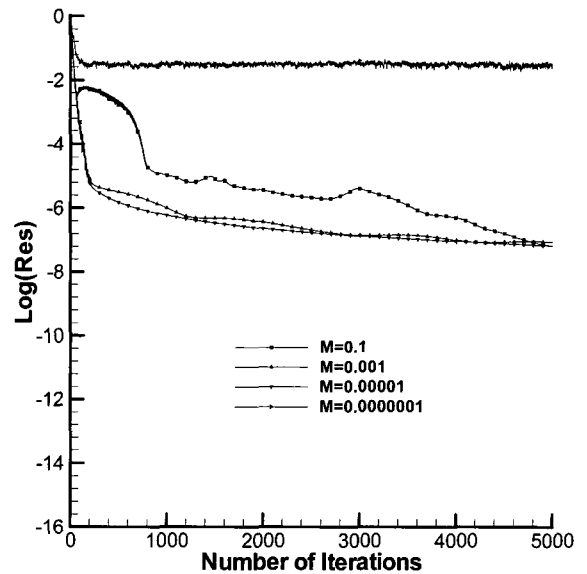
[그림 1] NACA0012 주위의 격자



[그림 3] 압력 보정 전/후 비교($\alpha = 1.25^\circ$)



[그림 2] 표면 압력계수($\alpha = 1.25^\circ$)



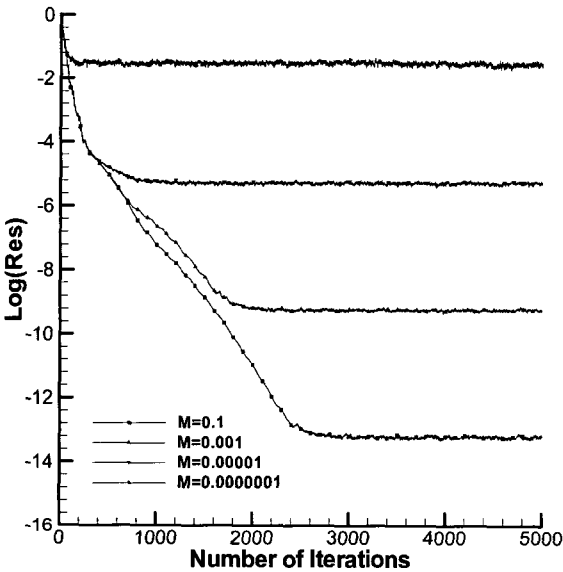
[그림 4] 압축성 코드 수렴도($\alpha = 1.25^\circ$)

를 도시하였다. 압력보정을 하지 않은 경우에 $M=1 \times 10^{-7}$ 의 경우 표면압력계수가 진동하는 반면 압력보정으로 정상적인 압력분포가 계산되는 것을 볼 수 있다.

그림 4~6에는 예조건화 되지 않은 Euler 코드와

국소 예조건화 코드 및 압력보정을 한 예조건화 코드의 수렴도를 나타낸다. 여기에서 세로축은 전 전산영역에서의 압력변화의 RMS이다. 기존의 Euler 코드를 이용한 저마하수 유동계산은 마하수가 낮아지면서 급격한 수렴성의 감소를 보여준다. 예조건화 코드는

수렴성이 매우 뛰어난 것을 알 수 있다. 그림 5와 그림 6의 압력보정을 한 경우와 압력보정이 이루어지지 않은 경우의 수렴성을 비교해보면 압력보정 후에 수렴성이 향상되는 것을 볼 수 있다. 여기에서 마하수가 작아지면서 수렴이 중간에 멈추는 현상이 보이는데 이는 반올림오차(round-off error)에 기인하는 것

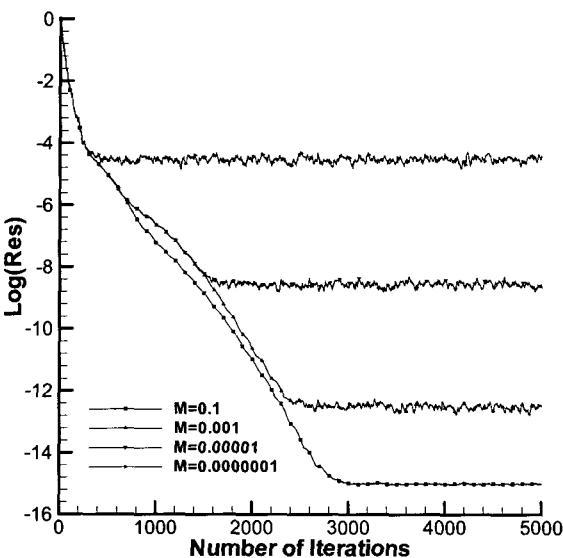


[그림 5] 압력 보정 전 수렴도($\alpha = 1.25^\circ$)

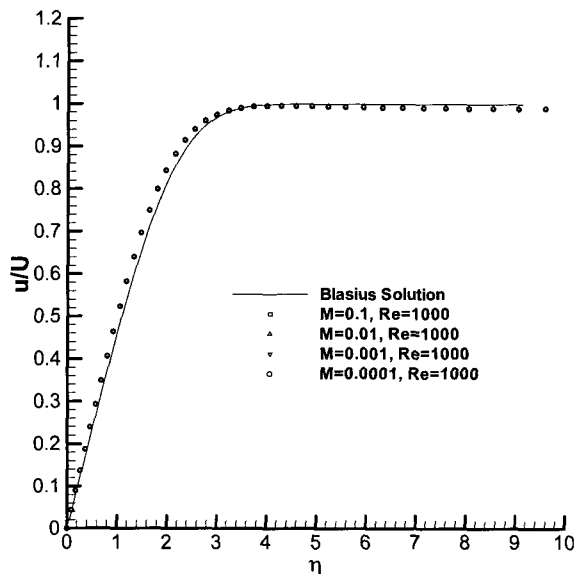
으로 알려졌다^[6].

예조건화 기법의 층류 경계층 유동에 대한 검증하기 위해서 Blasius 유동을 해석하였다. 사용된 격자계의 크기는 100×80 이며, 평판은 계산 영역의 중간에서 시작한다. $Re=1000$ 를 고정하고 마하수를 $M=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ 인 경우에 대해서 해석을 수행하였고 Blasius 해와 비교 검증을 수행하였다. 그림 7에는 Blasius의 경계층에 대한 엄밀해와 본 논문의 결과와 비교하였다. 모든 마하수에 대하여 본 논문의 결과가 대체로 일치하는 것을 볼 수 있다. 그림 8에는 각 마하수에 대해서 수렴 결과를 나타내고 있다. 매우 낮은 마하수임에도 불구하고 좋은 수렴특성을 보이는 것을 알 수 있다.

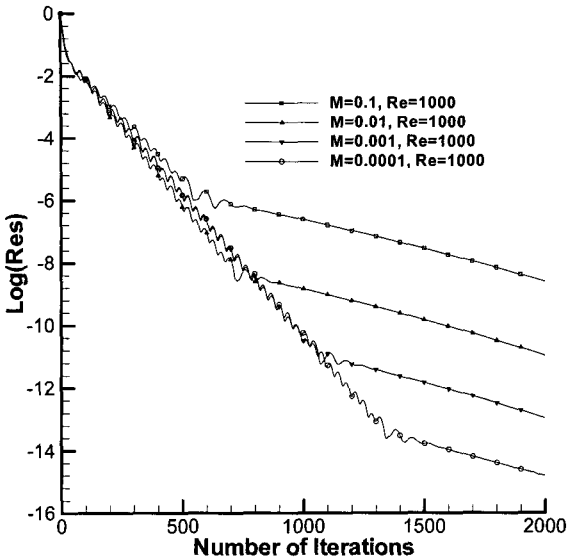
개발된 예조건화된 Navier-Stokes 코드의 낮은 마하수에서의 성능을 검증하기 위하여 진동하는 무한 평판문제(Stokes' 2nd problem)를 해석하였다. 경계층의 두께, δ 와 진동하는 평판의 최대속도, U_{max} 로 무차원화된 레이놀즈수는 1000이며, U_{max} 로 계산된 마하수는 $M=U_{max}/a=0.001$ 로 매우 낮다. 여기에서 경계층 두께를 속도가 $u/U_{max}=e^{-2\eta}$ 되는 평판으로부터 높이로 정의하였다. Reduced frequency는 $k=8\pi^2/Re$ 가 된다. 이 경우 비압축성 유동에 대한



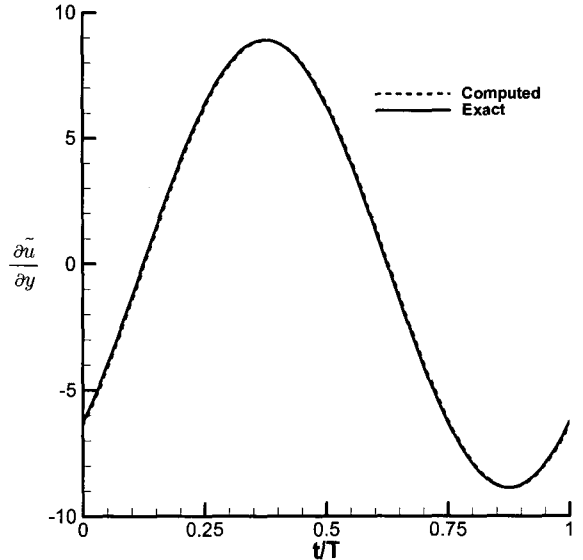
[그림 6] 압력보정 후 수렴도($\alpha = 1.25^\circ$)



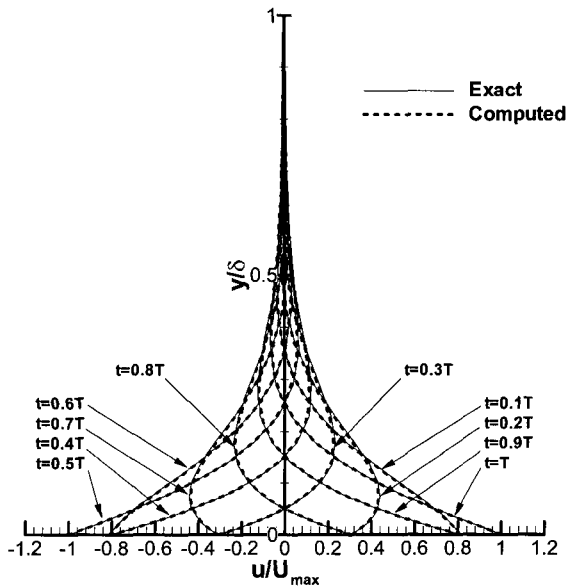
[그림 7] 층류경계층 내의 u 속도



[그림 8] 마하수에 따른 수렴도



[그림 10] 벽면에서의 속도구배



[그림 9] Stokes 문제의 u 속도 분력 비교

엄밀해는 다음과 같이 주어진다.

$$\tilde{u} = \frac{u}{U_{\max}} = \exp(-2\pi y) \cos(Mkt - 2\pi y) \quad (35)$$

계산 영역은 평판 방향으로 δ 이며 높이 방향으로는

5δ 이다. 좌우의 경계조건은 periodic 경계조건을 적용하고 윗면은 원방경계조건을 적용하였다. 사용된 격자의 수는 x 방향으로는 등간격의 10개이며, 수직방향으로는 벽면으로 조밀하게 분포된 50개의 격자점을 사용하였다. 한 주기에 100번의 이중시간 적분법을 적용시켰다. 즉, $\Delta t = \pi/50Mk$ 이다. 그림 9에는 2주기 이후 1주기를 10으로 나누어 각 시간에서 x 방향 속도성분을 엄밀해와 비교하였다. 그림에서 보듯이 계산된 결과는 엄밀해와 매우 잘 일치하는 것을 보여주고 있다. 그림 10에는 시간에 따른 벽면에서의 속도구배를 엄밀해와 비교하였으며 본 논문의 결과가 매우 정확하다는 것을 알 수 있다. 예조건화된 코드로 매우 낮은 마하수의 비정상 유동 계산이 가능한 것을 알 수 있다.

6. 결론 및 향후과제

지금까지 Weiss와 Smith의 국소 예조건화 기법을 이용하여 기존의 2차원 Navier-Stokes 방정식⁽¹⁰⁾을 수정하였고 수정한 방정식으로 수치 기법을 이용하여 코드를 개발하고 개발한 코드를 이용해서 비압축성과 압축성 유동, 비점성과 점성 유동에서 결과를 평가하

였다. 국소 예조건화 기법은 예조건화 행렬의 성분들이 모두 국지적 유동 변수로부터 얻어진다.

저 마하수 접근 해석에 의하면 운동 방정식에서 압력항의 보정이 필요한데 압력 보정후의 결과 수렴에서의 향상을 볼 수 있었다. 향후 압축성 유동과 비압축성 유동이 혼재되어 있는 실제 문제에 본 연구의 결과를 이용해서 해석할 수 있을 것을 기대된다.

7. 감사의 글

이 논문은 한국과학재단 특정기초연구과제(R01-2003-000-10744-0) 지원연구비에 의해 수행된 연구의 일부이며 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

- [1] J. M. Weiss and W. A. Smith, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows", AIAA Journal, Vol. 33, No. 11, 1995, pp.2050~2057.
- [2] E. Terkel, V. N. Vatsa, R. Radespiel, "Preconditioning Methods for Low-Speed Flows", AIAA-96-2460-CP, 1996.
- [3] 최윤호, "Preconditioning을 이용한 전속도 영역에 대한 압축성 유체유동 해석", 대한기계학회논문집 제 18권 제 7호, 1994, pp.1840~1850.
- [4] 이재은, "저속 압축성 유동에서 예조건화 방법을 이용한 수렴성 증진에 대한 연구", 석사 학위 논문, 한국과학기술원, 2005.
- [5] 이두환, "시간항 예조건화 기법을 이용한 저마하수 압축성 유동 계산의 수렴성 증진", 석사 학위 논문, 아주대학교, 2001.
- [6] S. Venkateswaran and C. L. Merkle, Analysis of Preconditioning Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations, Von Karman Institute Lecture Series March 8 12, 1999.
- [7] S. Venkateswaran and C. L. Merkle, "Dual Time-Stepping and Preconditioning for Unsteady Computations", AIAA 95-0078, 1995.
- [8] 류세현, "저속 압축성 유동에 대한 국소 예조건화 기법 적용 연구", 석사학위논문, 인하대학교, 2006.
- [9] 이승수, 박민우, "외부장착물 분리운동 해석 S/W(MSAP)개발 연구, 국방과학연구소, MADC-401-000200, 2000.
- [10] S. Lee and D. W. Choi, "On coupling the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations with two-equation turbulence model equations", Int. J. for Numer. Methods in Fluid, Vol. 50 Issue 2, pp.165~197, 2006.