

### 3. 특성법에 의한 해석

박 한 영\*

수충격 관련 기술을 연재물 (1회: 수충격 해석 이론, 2회: 압력파란?, 3회: 특성법에 의한 해석, 4회: 단일 관로 및 직렬관로의 수충격 해석법, 5회: 수충격 분석 시 경계조건 설정, 6회: 수충격 완화설비)로 소개하고 있으며, 본 기사는 그 가운데 세 번째 기고이다.

#### 3. 특성법, 근사 지배 공식

##### 3.1 특성 공식의 전개

특성법을 사용하는 것이 오늘날에도 많은 기술자들에게 익숙하지 않으므로 우선 공식 오일러공식과 질량보존공식을 특성법으로 접근하는 방법을 소개한다. 이러한 근사 공식들은 같은 공식에서 공간과 시간이 변화하는 항들이 나타날 때 V와 p의 시간변화만을 고려하고 공간 변화를 무시함으로써 얻을 수 있다. 그 이유는 거동을 결정할 때 공간 변화는 시간 변화 항보다 덜 중요하기 때문이다. 이러한 접근 방식으로 오일러 운동법칙은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{dz}{ds} + \frac{f}{2D} |V| V = 0 \quad (3.1)$$

그리고 질량보존법칙은 다음과 같이 된다.

$$a^2 \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (3.2)$$

특성법의 본질은 한 쌍의 편미분 방정식을 이에 상당한 상미분 방정식으로 성공적으로 대체하는 것이다. 때로는 라그랑지 승수 (Lagrange multiplier)라 불리는 일정 선형 스케일 요소 (constant linear scale factor)

$\lambda$ 를 사용하면 다음과 같이 조합된 하나의 공식으로 나타내는 것이 가능하다.

$$\lambda \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \frac{dz}{ds} + \frac{f}{2D} |V| V \right) + \left( a^2 \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.3)$$

항들을 다시 묶으면

$$\left( \lambda \frac{\partial V}{\partial t} + a^2 \frac{\partial V}{\partial s} \right) + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \right) + \lambda g \frac{dz}{ds} + \frac{\lambda f}{2D} |V| V = 0 \quad (3.4)$$

만일 상미분 방정식의 첫 번째 괄호  $\lambda \frac{\partial V}{\partial t} + a^2 \frac{\partial V}{\partial s}$ 가  $\lambda \frac{dV}{dt}$ 로 대체되면  $\lambda \frac{ds}{dt} = a^2$ 가 되고, 공식 (3.4)의 두 번째 괄호  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$ 을  $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}$ 로 대체되면  $\frac{\lambda}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt}$ 가 된다. 이러한  $\frac{ds}{dt}$ 가 되기 위해 필요한 두 개의 요구 조건을 만족시키기 위해서는  $\lambda^2 = a^2$  또는

$$\lambda = \pm a \quad (3.5)$$

$a$ 가 상수인 경우 스케일러 요소인  $\lambda$ 는 선형이면서 상수이고 공식 (3.1)과 (3.2)를 조합시킬 수 있다. 우선 공식 (3.4)를  $\lambda = +a$ 로 대체하여 첫 번째 공식을 다시 작성한다. 공식 (3.4)를  $\lambda = -a$ 로 대체하여 두 번째 공식을 다시 작성한다. 합성 공식을 파속  $a$ 로 나누면 편미분 공식이라기보다 한 쌍의 상미분 공식을 얻게 된다.

\* 한국수자원공사, 한국수자원연구원  
E-mail : hanyung@kowaco.or.kr

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{a\rho} \frac{dp}{dt} + g \frac{dz}{ds} + \frac{f}{2D} |V| = 0 \quad (3.6)*$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{1}{a\rho} \frac{dp}{dt} + g \frac{dz}{ds} + \frac{f}{2D} |V| = 0 \quad (3.7)*$$

상기 각 식에서 독립 변수들에 특별한 제한 조건이 발생한다. 공식 (3.6)이 성립하기 위해서는  $\lambda \frac{ds}{dt} = a^2$ 가 되어야 하고 따라서  $\frac{ds}{dt} = \frac{a^2}{\lambda} = +a$ 가 되어야 한다. 따라서 공식 (3.6)은 오직  $ds/dt = +a$ 일 때만이 유용하다. 유사하게 공식 (3.7)은 오직  $ds/dt = -a$ 일 때만이 유용하다. 따라서 두 개의 편미분 방정식을 두 쌍의 상미분 방정식으로 대체하고 독립 변수  $s$ 와  $t$ 를 관련시키는 이들의 법칙을 따라야 한다. 해수면을 기준으로 하는 기준선 상부 위치의 EL-HGL의 높이인 피에조미터 수 두  $p = \gamma(H-z)$  항으로 압력 파동의 전파를 가시화 하는 것이 쉽다고 믿기 때문에  $p$ 를  $H$ 로 변환한다. 먼저 공식 (3.6) 및 (3.7)을 변형시키면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dV}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2D} |V| = 0 \quad \frac{ds}{dt} = +a \text{ 일 때} \quad (3.8)*$$

$$\frac{dV}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + \frac{f}{2D} |V| = 0 \quad \frac{ds}{dt} = -a \text{ 일 때} \quad (3.9)*$$

공식 (3.8)과 (3.9)에서  $s$ 와  $t$  사이에는 특별한 관계가 유지되어야 한다는 사실로부터 공식  $\frac{ds}{dt} = +a$  그리고  $\frac{ds}{dt} = -a$ 은 공식 (3.8)과 (3.9)의 특성이라 불리며 분석 절차도 특성법이라 불린다.

해답을 구하기 위해 이러한 특성들을 어떻게 사용하는지 살펴보기 위해  $s$ - $t$  평면으로 불리는 횡축에  $s$  그리고 종축을  $t$ 로 하는 좌표를 갖는 그래프를 갖고 연구한다. 그림 1은 실제적인 문제에 있어  $s$ - $t$  평면이

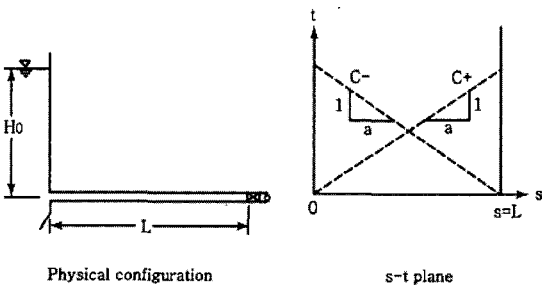


그림 1. 단순한 유동을 위한  $s$ - $t$  평면

어떻게 관련되는지 보여준다. 여기서  $s$  좌표는 상류 끝 부분으로부터의 관로의 거리를 나타낸다.

상수로서  $a$ 를 갖고 공식 (3.8)의  $\frac{ds}{dt} = +a$ 인 특성 공식은 쉽게 적분되어 (적정한 형태로 역변환 된 후)  $t = s/a + C$ (상수)가 된다. 이 공식은  $s$ - $t$  평면에  $1/a$ 의 경사를 갖는 직선 군을 기술한다. 임의 한 직선의 위치는 적분의 상수에 좌우된다. 이러한 직선들은 + 부호의  $a$ 를 갖는 특성 공식과 관련되어 있으므로  $C^+$  특성이라 한다. 그림 1은 원점을 지나는  $C^+$  특성을 묘사한다. 유사하게 공식 (3.9)의 특성 공식은  $s$ - $t$  평면에  $-1/a$ 의 경사를 갖는 직선 군을 기술한다. 공식 (3.9)의 특성들은  $C^-$  특성이라 한다. 그림 1에서  $s=L$  지점을 통과하는 직선이 그려져 있다.

특성의 개념을 더욱 깊이 이해하기 위해 제3장의 단순한 수충격의 일례를 살펴보자. 이 예제에서 하류 끝 관로부에 설치된 밸브가 급작스럽게 폐쇄되어 압력 파가 상류측으로 속도  $a$ 로 전파된다. 마찰은 무시된다. 이러한 상황에서 마찰을 무시하면 공식 (3.8)과 (3.9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{dV}{dt} \pm \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

$dt$ 를 곱한 다음 다시 정리하면 다음과 같이 된다.

$$dV = \pm \frac{g}{a} dH \quad \text{또는} \quad dH = \pm \frac{a}{g} dV \quad (3.11)$$

우측으로부터 좌측으로  $1/a$ 의 경사를 갖는  $C^-$  특성을 추적하면 그림 1로부터 파동은  $t=L/a$ 에서 원점인 관로의 상류 끝단에 도달한다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과들은 제3장에서 단순한 수충격 분석을

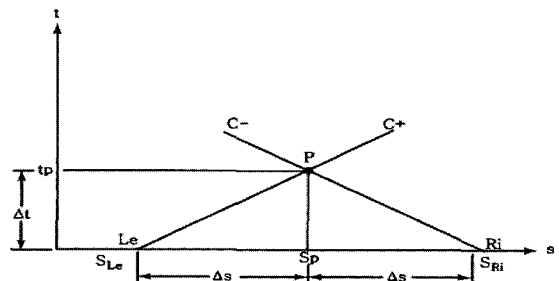


그림 2. 공식 (3.8)과 (3.9)의 특성을 보여주는  $s$ - $t$  평면

유효하게 하고 압력과는 특성 직선을 따라 전파되는 것을 보여준다. 추후에 보겠지만 이러한 중요한 물리적 사실은 수치 해석으로부터 신뢰성 있는 결과를 얻는데 결정적이다.

공식 (3.8)과 (3.9)의 해답을 물리적으로 이해하기 위한 절차를 더욱 조심스럽게 정식화하여 진행하도록 한다. 관로의 여러 지점들에서 시간을 함수로 한 H와 V의 수치를 계산하기 위해 s-t 평면에서 s-축에 따른 초기 조건과 모든 시간에서의 관로 말단부  $s=0$  과  $s=L$  지점에서의 경계 조건에 대한 자료를 갖고 시작하여야 한다. H와 V의 수치를 구하기 위한 해답은 s-t 평면에서 전방(상 방향)으로 진행 할 수 있다.

이러한 진행 과정을 어떻게 전개하는지 살펴보기 위해서 아직 정의되지 않은 s-t 평면인 그림 2를 참조한다. s-t 평면의 임의의 점에서 즉, 점 P에서 연속적인 변수 H와 V의 수치들은 유일하다. (즉, H와 V의 수치는 그들이 관련된 특성과 관련이 없다). 다음은  $C^+$ 와  $C^-$  특성 직선을 점 P를 지나 P점의 좌측과 우측의 s-축과 교차하도록  $L_e$ 와  $R_i$  점까지 연장한다. 이 경우 두 점들의 간격은 점 P로부터 같은 거리  $\Delta s$ 가 된다. 공식 (3.8)을  $C^+$  특성에 따라 적용하고 공식 (3.9)를  $C^-$  특성에 따라 적용한다. H와 V를 결정하기 위한 정보는 특성을 따라  $L_e$ 와  $R_i$  로부터 시간이 지남에 따라 전방으로 전파된다.

### 3.2 유한 차분법

문제에 대한 해답을 구하기 위해 공식 (3.8)과 (3.9)를 다음과 같이 유한 차분 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{V_P - V_{Le}}{t_P - 0} + \frac{g}{a} \frac{H_P - H_{Le}}{t_P - 0} + \frac{f}{2D} V_{Le} |V_{Le}| = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{V_P - V_{Ri}}{t_P - 0} - \frac{g}{a} \frac{H_P - H_{Ri}}{t_P - 0} + \frac{f}{2D} V_{Ri} |V_{Ri}| = 0 \quad (3.13)$$

상기 공식을 전개하면서 2개의 중요한 가정을 한다. 우선 시간 간격 동안의 평균 속도가 아닌 시간 간격이 시작되는 점에서 속도는 충분히 마찰 효과를 나타낸다고 가정한다. 계산상의 함축은 중요하다. 만일 마찰 항 속에 미지의 수치  $V_P$ 를 포함하여야 한다면 미분 방정식은 비선형이 되고 반복 해법을 필요로 하게 된다.

이 방정식을 풀기 위한 수많은 시간과 해결하기 위해 성가신 비선형의 특성을 고려하면 그와 같은 접근 방식을 채택하면 안 된다. 일반적으로 부정류 문제를 풀기 위해 미소한 시간 증분을 취하므로 이러한 가정은 계산 결과의 정확도를 크게 손상시키지는 않는다.

두 번째는 정상 상태의 마찰 계수는 부정류 유동에서 마찰 손실을 충분히 나타낼 수 있다고 가정한다. 부정류 분석에 있어 비-부정류 상수 마찰 계수의 가정은 항상 근사치이다. 정상 상태 달시-바하  $f$ 를 사용한다는 것은 배관 내 유동을 완전히 거친 유동으로 취급하여 상수로 간주한다는 것을 함축한다. 즉 부정류 속도가 변화하면 레이놀즈수가 변화하고 이에 따라  $f$  수치도 변화하여야 하나  $f$ 를 상수로 간주한다는 것이다. 하젠-윌리엄 공식의  $C$ 를 사용하면 상용하는  $f$ 가 부정류 속도의 변화에 따라 다소 조정되게 함으로써 부분적으로 보상이 된다. 그러나 두 가지 방법 모두 부정류 유동의 기본적인 거동에 기초를 두지 않는다.

속도는, 반대 방향의 속도조차도, 상대적으로 급속히 변화하므로 속도 분포는 상당히 복잡하게 된다. 전단 응력과 에너지 분산의 계산은 어려워지게 되며 Silva-Araya와 Chaudhry (1997)은 이러한 문제의 현대 평가 기법 (state-of-the-art)에 대해 기술하였다. 그들은 달시-바하의 마찰 계수  $f$ 를 보유하나 이  $f$ 에 에너지 분산 계수를 곱하여 부정류 유동에서의 추가적인 마찰 손실을 설명한다. 이 방법은 점성에 의한 것과 난류에 의한 전단 응력의 영향을 포함하는 축 대칭 유동을 위한 분산 함수를 포함한다. 이러한 방법을 수행하기 위해 추가적으로 계산하는데 소요되는 노력은 현재로서는 실용적인 측면을 고려할 때 과도한 것으로 판단된다. 결과적으로 정상 상태의 마찰 계수의 전통적인 접근 방식을 계속해서 사용하여야 한다.

상기 공식에서  $t_P - 0$ 를  $\Delta t$ 로 대체하고  $\Delta t$ 를 곱하면 다음과 같이 된다.

$$C^+ : (V_P - V_{Le}) + \frac{g}{a} (H_P - H_{Le}) + \frac{f \Delta t}{2D} V_{Le} |V_{Le}| = 0 \quad (3.14)$$

$$C^- : (V_P - V_{Ri}) - \frac{g}{a} (H_P - H_{Ri}) + \frac{f \Delta t}{2D} V_{Ri} |V_{Ri}| = 0 \quad (3.15)$$

상기 공식들은  $C^+$ 와  $C^-$  공식이라 부른다. 상기

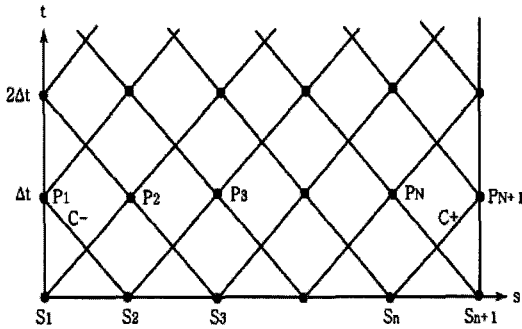


그림 3. 단일 배관을 위한 특성 격자

특성 공식은 유한 차분 형태로 쓰면 다음과 같다.

$$\Delta s = \pm a \Delta t \quad (3.16)$$

이제 유한 차분 수치 해석으로 풀기 위해서  $s$  방향으로 공간 간격 (즉, 관로가 절단되는 부분의 숫자)을 설정하여야 한다. 만일 관로를  $N$  분절로 나누기로 결정하면 각 분절의 길이는  $\Delta s = L/N$  이 된다. 따라서  $\Delta s$ 가 결정되고 공식 (3.16)은  $\Delta t$ 를 계산하기 위해 사용된다. 이제 그림 3에 나타낸 것과 같이 특성 격자를 구축할 수 있다.

$s$ 축에 따른 격자점은 관로 축을 따라 공간  $\Delta s$  만큼 떨어진 점들이고 이러한 점들에서의  $H$ 와  $V$  수치는 초기 조건들이다. 통상적으로 이러한 초기 조건들은 부정류가 시작되기 전 관로 내에 발생하는 정상 유동에서의  $H$ 와  $V$ 의 수치들이다. 점  $L_e$ 와  $R_i$ 로부터 알 수 있는 수치로 공식 (3.14)와 (3.15)를 동시에 풀어 시간  $t = \Delta t$ 에서 지점 2로부터  $N$ 까지 각 점에서  $H_P$ 와  $V_P$  수치를 구한다.  $H_{P1}$ 과  $H_{P_{N+1}}$  수치를 계산하기 위해 적당한  $C^+$  또는  $C^-$  공식과 연관지어  $s=0$ 과  $s=L$ 인 지점에서의 경계 조건을 사용하여야 한다. 이렇게 함으로써 시간  $t = \Delta t$ 에서 모든  $H$ 와  $V$ 의 수치를 구할 수 있다. 다음은 시간  $t = \Delta t$ 에서 공식 (3.14)와 (3.15)를 사용해 방금 계산하여 구한 수치를 사용하여 시간  $t = 2\Delta t$ 에서의  $H$ 와  $V$ 의 수치를 계산한다. 이러한 과정을  $s-t$  평면에서 연속하여 반복한다.

최종적으로 지금까지 분석한 결과로부터 얻을 수 있는 중요한 개념에 대해 강조한다. 관로 내에서 한 점에서 압력파가 파속으로 다른 점으로 전파하는데 필요한 시간이 경과되기 전까지는 다른 점에서의 속도

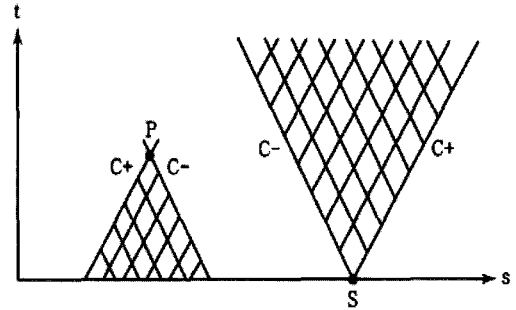


그림 4.  $s-t$  평면에서 교란 전파

또는 수두 변화를 결정하면 안된다. 이러한 영향을 그림 4에 나타내었다. 즉  $S$  지점에서 어디서 그리고 언제 교란이 후속적인 시간에서 결정되는지 보여준다. 그림 4는 이러한 개념의 추론을 설명하고 있다. 지점  $P$ 에서  $H$ 와  $V$ 의 수치는 오직  $C^+$ 와  $C^-$  특성 삼각형 변에 의해 형성된 구역 내에 포함된 이벤트에 의해 영향을 받는다.

### 3.3 수치 해석 절차의 설정

#### 내부절점

앞 절에서  $C^+$ 와  $C^-$  특성의 미리 설정된 교차점에서  $H$ 와  $V$ 를 계산할 수 있는 유한 차분 공식을 전개하였다. 관로의 끝에서  $H$ 와  $V$ 의 수치는 경계 조건을 사용하여 결정된다. 이제 해결 절차를 정리하여 컴퓨터가 쉽게 수행할 수 있도록 한다.

우선 내부 점 (점 2부터  $N$ 까지)들에 있어  $H$ 와  $V$ 를 구하기 위한 한 쌍의 공식을 전개한다. 이것은 공식 (3.14)와 (3.15)를 동시에 풀어 얻을 수 있다. 즉, 공식 (3.14)와 (3.15)를 더하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$2V_P - V_{Le} - V_{Ri} + \frac{g}{a}(H_{Ri} - H_{Le}) + \frac{f\Delta t}{2D}(V_{Le}|V_{Le}| + V_{Ri}|V_{Ri}|) = 0 \quad (3.17)$$

$$V_P = \frac{1}{2} \left[ (V_{Le} + V_{Ri}) + \frac{g}{a}(H_{Le} - H_{Ri}) - \frac{f\Delta t}{2D}(V_{Le}|V_{Le}| + V_{Ri}|V_{Ri}|) \right]$$

공식 (3.14)와 (3.15)를 감하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$-V_{Ri} + V_{Le} - 2\frac{g}{a}H_P + \frac{g}{a}(H_{Ri} + H_{Le}) - \frac{f\Delta t}{2D}(V_{Le}|V_{Le}| - V_{Ri}|V_{Ri}|) = 0 \quad (3.18)$$

$$H_P = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{g}(V_{Le} - V_{Ri}) + (H_{Le} + H_{Ri}) - \frac{a}{g} \frac{f\Delta t}{2D}(V_{Le}|V_{Le}| - V_{Ri}|V_{Ri}|) \right]$$

관로의 양 끝단에서 경계 조건들은 외부에서 부여된 속도 그리고 또는 압력 수두에 의해 결정된다. 독자들에게 어떻게 경계 조건들이 적용되는지 이해를 돕기 위해 광범위하게 사용되는 몇 가지 예를 들기로 한다.

### 저수지 경계 조건 (관로의 상류측 끝)

저수지로부터 관로가 연결되어 물이 유입된다면 이 유입부에서의 피에조미터 수두 H는 저수지 수위에 상응한 수치로 가정한다. 만일 수위가 시간이 지나도 일정하면 H는 상수가 되고 유입부에서의 유입 손실을 무시한다. 저수지 수위 고도가 시간에 따라 변화하면 H도 변화한다. 이러한 경계조건을 다음 공식으로 나타낼 수 있다.

$$H_{P1} = H_0 \quad (3.19)$$

$H_{P1}$ 을 공식 (3.15) ( $R_i=2$ )에 대입하여 다음과 같이 속도를 나타낸다.

$$V_{P1} = V_2 + \frac{g}{a}(H_0 - H_2) - \frac{f\Delta t}{2D} V_2 |V_2| \quad (3.20)$$

만일 저수지가 하류측 관로 끝단에 있으면  $C^+$  공식을 사용하여 같은 방법으로 접근하면  $V_{P_{N+1}}$ 에 대해 유사한 결과를 가져온다.

$$V_{P_{N+1}} = V_N + \frac{g}{a}(H_N - H_{P_{N+1}}) - \frac{f\Delta t}{2D} V_N |V_N| \quad (3.20a)$$

### 속도 경계 조건 (관로의 하류측 끝)

하류측 끝 부분에서 속도를 알면  $C^+$  특성 공식과 조합하여  $H_{P_{N+1}}$  공식을 전개한다. 한 예로 밸브가 시간

$T_c$ 에 걸쳐 속도  $V_0$ 에서 선형으로 감소되어 0가 된다고 가정한다. 속도 거동은 다음과 같이 된다.

$$V_{P_{N+1}} = V_0 \left(1 - \frac{t}{T_c}\right), \quad 0 \leq t \leq T_c$$

$$V_{P_{N+1}} = 0, \quad t \geq T_c \quad (3.21)$$

$H_{P_{N+1}}$ 을 구하기 위한 공식은 공식 (3.21)을 공식 (3.14)에 대입하여 아래 첨자  $P=P_{N+1}$ ,  $Le=N$ 으로 대체하여 정리하면 0을 포함하여  $H_{P_{N+1}}$ 의 임의의 수치를 구할 수 있다.

$$(V_P - V_{Le}) + \frac{g}{a}(H_P - H_{Le}) + \frac{f\Delta t}{2D} V_M |V_M| = 0$$

$$H_{P_{N+1}} = H_N - \frac{a}{g}(V_{P_{N+1}} - V_N) - \frac{a}{g} \frac{f\Delta t}{2D} V_N |V_N| \quad (3.22)$$

### 정속 펌프의 경계 조건 (관로의 상류측 끝 단)

이 경계 조건은 경계 공식에서  $H_{P1}$ 과  $V_{P1}$ 을 갖는 복잡성을 더한다. 결과적으로 경계 공식은 공식 (3.15)와 함께 동시에 풀어  $H_{P1}$ 과  $V_{P1}$  공식을 작성하여야 한다. 펌프 경계 조건을 나타내는 방법을 선택하여야 한다. 일반적으로 펌프의 토출 수두특성을 나타내는 가장 간단한 방법은 2차 방정식의 형태이다.

$$h_p = A_p' Q^2 + B_p' Q + C_p' \quad (3.23)$$

여기서 Q는 펌프의 유량이고  $h_p$ 는 펌프를 통과하면서 상승하는 수두이다. 이러한 변수들은  $C^-$  공식의 변수와 일치하지는 않는다. 따라서 약간의 조정이 필요하다. Q를  $V_{P1}A$ 로  $h_p$ 는  $H_{P1} - H_{sump}$ 로 대체한다.

$$H_{P1} - H_{sump} = A_p'(V_{P1}A)^2 + B_p'(V_{P1}A) + C_p'$$

$$H_{P1} = A_p A^2 V_{P1}^2 + B_p A V_{P1} + C_p + H_{sump}$$

단,  $A_p = A_p' A^2$ ,  $B_p = B_p' A$ ,  $C_p = C_p' + H_{sump}^0$ 로 대체하면 다음과 같이 된다.

$$H_{P1} = A_p V_{P1}^2 + B_p V_{P1} + C_p \quad (3.24)$$

상기 곡선이 아래로 오목한 곡선이고 항상 유량 Q가 증가할수록 경사가 아래로 향한다면  $A_p < 0$ ,  $B_p < 0$  그리고  $C_p > 0$ 이 된다. 이러한 정보는 경계 조건 계산에 필요하다.

공식 (3.24)를  $C^-$  특성 공식 (3.15)와 동시에 풀면  $H_{p1}$ 이 제거되고  $V_{p1}$ 은 다음과 같은 공식이 된다.

$$V_{p1} - V_2 - \frac{g}{a}(A_p V_{p1}^2 + B_p V_{p1} + C_p) + \frac{g}{a} H_2 + \frac{f \Delta t}{2D} |V_2| |V_2| = 0 \quad (3.25)$$

다시 정리하면

$$\left( \frac{g}{a} A_p \right) V_{p1}^2 + \left( \frac{g}{a} B_p - 1 \right) V_{p1} + \left( V_2 + \frac{g}{a} C_p - \frac{g}{a} H_2 - \frac{f \Delta t}{2D} |V_2| |V_2| \right) = 0 \quad (3.26)$$

상기 2차 방정식으로부터  $V_{p1}$ 을 구할 수 있다. 다시 공식 (3.24)에 대입하여  $H_{p1}$ 을 구한다.

덧붙여 말하면 만일 손실이 없는 역지면이 펌프의 하류 측에 설치된다면 공식 (3.26)으로부터  $V_{p1}$ 을 계산하고 속도의 부호를 확인함으로써 수학적 모델을 작성할 수 있다. 만일 부호가 -이면  $C^-$  특성 공식 (3.15)로부터  $H_{p1}$ 을 계산하기 전에  $V_{p1}$ 을 0으로 설정한다.

### 3.4 수치 해석 절차의 전산화

#### 내부절점

우리가 전개한 문제 해결 방안은 상대적으로 컴퓨터 프로그램을 하기 쉽다. 관로는 N 분절로 나누어져 있기 때문에 분절들간의 절점은 관로의 상류부 1부터 시작하여 끝 단 N+1로 구분된다. 공식들에 있어 아래 첨자들의 조합과 컴퓨터 프로그램에 있어 아래 첨자 변수의 지표표를 명심하여 공식 (3.14)와 (3.15)를 다시 쓰면 다음과 같이 된다.

$$C^+ : (V_{p,i} - V_{i-1}) + \frac{g}{a}(H_{p,i} - H_{i-1}) + \frac{f \Delta t}{2D} |V_{i-1}| |V_{i-1}| = 0 \quad (3.27)$$

$$C^- : (V_{p,i} - V_{i+1}) - \frac{g}{a}(H_{p,i} - H_{i+1}) + \frac{f \Delta t}{2D} |V_{i+1}| |V_{i+1}| = 0 \quad (3.28)$$

공식 (3.17)과 (3.18)의  $H_p$ 와  $V_p$  내부 수치에 대한 해답은 다음과 같다. ( $2 \leq i \leq N$ )

$$V_{p,i} = \frac{1}{2} \left[ (V_{i-1} + V_{i+1}) + \frac{g}{a}(H_{i-1} - H_{i+1}) - \frac{f \Delta t}{2D} (|V_{i-1}| |V_{i-1}| + |V_{i+1}| |V_{i+1}|) \right] \quad (3.29)$$

$$H_{p,i} = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{g}(V_{i-1} - V_{i+1}) + (H_{i-1} + H_{i+1}) - \frac{a}{g} \frac{f \Delta t}{2D} (|V_{i-1}| |V_{i-1}| - |V_{i+1}| |V_{i+1}|) \right] \quad (3.30)$$

모든 경계 조건들은 일관성 있는 아래첨자 변수의 형태로 표기되어야 한다. 저수지와 선형으로 변화하는 속도를 위한 경계 조건은 이미 적정한 형태를 취하고 있다. 그러나 두 개의 공식을 동시에 풀 것을 요구하는 정속 펌프 경계 조건은 추가적인 작업이 필요기 때문에 실행자는 전술한 과정을 수행한 후 컴퓨터 프로그램을 수행하여야 한다. 반드시 풀어야 하는 한 쌍의 공식을 도출하는 경계 조건은 부정류 문제에서 매우 광범위하게 사용되므로 이러한 절차를 상세하게 검토하기로 한다. 예제에서는 상당한 양의  $C^+$ 와  $C^-$  공식들을 컴퓨터 코드로 직접 도입하여 효율적인 방법으로 처리하는 기술을 보여준다.

#### 정속 펌프

앞으로 사용될 공식을 단일 기호에 의해 알려진 항의 집합으로 표현하는 공식으로 단순화하는 것이 편리하다. 여기에서는 공식 (3.28)을 관로의 상류 끝에 적용할 수 있도록 다음과 같이 사용한다.

$$V_{p1} = V_2 + \frac{g}{a} H_{p1} - \frac{g}{a} H_2 - \frac{f \Delta t}{2D} |V_2| |V_2| \quad (3.31)$$

$$V_{p1} = C_3 + C_4 H_{p1}$$

여기서

$$C_3 = V_2 - \frac{g}{a} H_2 - \frac{f \Delta t}{2D} |V_2| |V_2| \quad (3.32)$$

$$C_4 = \frac{g}{a}$$

컴퓨터에서 전 시간 (previous time)으로부터 알려

진 수치들을 사용하여 계산하기 때문에  $C_3$ 과  $C_4$ 는 단순한 숫자이다. 공식 (3.31)을 공식 (3.24)와 조합하여  $H_{p1}$ 을 제거하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{V_{p1} - C_3}{C_4} = A_p V_{p1}^2 + B_p V_{p1} + C_p \quad (3.33)$$

상기 공식을 표준 2차 방정식의 형태로 변형하면

$$V_{p1}^2 + \frac{B_p - 1/C_4}{A_p} V_{p1} + \frac{C_p + C_3/C_4}{A_p} = 0 \quad (3.34)$$

$C_5 = \frac{B_p - 1/C_4}{A_p}$  그리고  $C_6 = \frac{C_p + C_3/C_4}{A_p}$ 라 놓으면 상기 공식은 다음과 같이 된다.

$$V_{p1}^2 + C_5 V_{p1} + C_6 = 0 \quad (3.35)$$

해답은 다음과 같다.

$$V_{p1} = \frac{C_5}{2} \left[ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4C_6}{C_5^2}} \right] \quad (3.36)*$$

이것은  $\pm$  부호를 결정하기 위해 남는다. 부호는 여러 번 결정하여야 하므로 지금부터 상세하게 이러한 결정 과정을 검토한다.  $C$  항의 부호를 결정하는 것부터 시작한다. 공식 (3.32)로부터 우리는 다음을 알 수 있다.

$$C_3 = \text{미지의 부호 } C_4 = (+) \quad (3.37)$$

공식 (3.24) 펌프 모델의 계수를 위한 통상적인 거동을 가정하면 다음과 같다.

$$A_p = (-) \quad B_p = (-) \quad C_p = (+) \quad (3.38)$$

$C_5$ 와  $C_6$ 을 위한 공식 정의로부터

$$C_5 = \frac{(-) - (+)}{(-)} = (+) \quad (3.39)$$

$$C_6 = \frac{(+)+(\text{unknown})}{(-)} = (\text{unknown})$$

우리는  $C_5$ 는 항상 양 부호이나  $C_6$ 의 부호는 확인

할 수 없다고 결론지을 수 있다. 공식 (3.36)의 부호를 표시하면 다음과 같이 된다.

$$(V_{p1} \text{의 부호}) = (+) \left[ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{(?)}{(+)}} \right] \quad (3.40)$$

정상 유동 과정 초기에서는  $V_{p1}$ 은 양의 부호를 갖기 때문에 상기 공식으로부터 반드시 양의 수치를 얻을 수 있어야 한다. 이것은 괄호들 안의 항들이 양일 경우에만 가능하다. 음의 속도의 가능성도 존재하기 때문에 이 경우에는 각 괄호들 안에 있는 항은 음의 수치를 취하여야 한다. 체공근의 부호는 반드시 양이기 때문에 괄호가 양의 부호 또는 음의 부호가 될 수 있는 유일한 가능성은  $\pm$ 의 선택 사항으로부터 +의 부호를 취할 때이다. 따라서  $V_{p1}$  공식은 다음과 같다.

$$V_{p1} = \frac{C_5}{2} \left[ -1 + \sqrt{1 - \frac{4C_6}{C_5^2}} \right] \quad (3.41)$$

그리고 공식 (3.31)로부터

$$H_{p1} = \frac{V_{p1} - C_3}{C_4} \quad (3.42)$$

역류의 경우 역지변이 설치되었다고 가정할 수 있다. 역지변을 모의하기 위해  $V_{p1}$ 의 부호를 확인하여야 하는데 만일 음일 때는  $V_{p1} = 0$ 으로 설정한다. 그 후 부압발생  $H_{p1}$ 를 계산하기 위해 공식 (3.42)를 사용한다. 전술한 바와 같이 역지변은 펌프를 판로로부터 분리시키기 때문에  $H_{p1}$ 을 계산하기 위해 공식 (3.24)를 사용할 수 없다.

## 참 고 문 헌

- (1) Bruce E. Larock, "Hydraulics of Pipeline Systems," 2000, CRC Press.
- (2) J. E. Dendy, "Two Methods of Galerkin-Type Achieving Optimum  $L^2$  Rates of Convergence for First-Order Hyperbolic," SIAM J. Numer. Anal., Vol. 11, pp. 637~653, 1974.

- (3) D. E. Goldberg and E. B. Wylie, "Characteristic Method Using Time-Line Interpolations," J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 109, No. HY1, Jan. 1983.
- (4) N. D. Katopodes, "A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow," J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 450-466, Apr. 1984.
- (5) N. D. Katopodes and E. B. Wylie, "Simulation of Two-Dimensional Nonlinear Transients," Symp. Multi-dimensional Fluid Transients, ASME, New Orleans, La., pp. 9~16, Dec. 1984.
- (6) Chintu Lai, "Numerical Modeling of unsteady Open-Channel Flow," Chap. 3 in V. T. Chow and B. C. Yen (eds.), Advances in Hydroscience, Vol. 14, Academic Press, New York, pp. 161~333, 1986.
- (7) J. Parmakian, Water-Hammer Analysis, Dover, New York, 1963.
- (8) H. H. Rachford, Jr. and Todd Dupont, "Some Applications of Transient Flow Simulation to Promote Understanding the Performance of Gas Pipeline Systems," Soc. Pet. Eng. AIME, pp. 179~186, Apr. 1974.
- (9) H. H. Rachford, Jr., and E. L. Ramsey, "Application of Variational Methods to Model Transient Flow in Complex Liquid Transmission Systems," Paper SPE 5663, 50th Annual Fall Meeting, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, Sept. 28~Oct. 1, 1975.
- (10) C. S. Watt, A. P. Boldy, and J. M. Hobbs, "Combination of Finite Difference and Finite Element Techniques in Hydraulic Transient Problems," Proc. 3rd Int. Conf. Pressure Surges, BHRA, Canterbury, England, pp. 43~62, Mar. 1980.
- (11) "전산기로 푸는 수충격해석입문", 동명사, 2005.