

## 수학화 경험 수업에서 나타난 초등학생의 수학적 능력 및 수학화 분석

김 윤 전 (서울돈암초등학교)  
김 민 경 (이화여자대학교)

### I. 서 론

수학은 실재하는 사물보다 그들 사이에 존재하는 것으로 인지되는 성질을 파악하고 그들 사이의 관계를 규명하기 위한 학문으로, 논리성, 추상성, 구조성, 직관성, 계통성을 그 특징으로 한다. 학교 수학은 이와 같은 학문으로서의 수학의 성격과 더불어 일반 교육으로서의 수학, 삶의 기반이 되는 수학, 준비 교육으로서의 수학을 그 목표로 한다고 볼 수 있다(교육부, 1998). 이러한 성격을 지닌 수학교육의 중요성은 오랜 세월 동안 항상 강조되어 왔다. 그러나 학습의 많은 시간을 수학 교과에 할애함에도 불구하고 여전히 수학은 학습자의 현실 밖에 머무르고 있는데 그 이유로 수학교육이 학습자<sup>1)</sup>의 흥미, 관심, 경험 등을 반영하지 못하고 형식적인 교육에만 치중하고 있기 때문이라고 보는 견해가 많다.

Freudenthal은 수학교육의 주요 문제에 관하여 수학을 결과적 지식체계로서의 수학, 기성산물로서의 수학으로 보고 교육하는 데에서 기인한다고 인식했다. 그는 이와 같은 문제점을 해결하기 위해서 학생의 현실 상황과 관련된 수학적 상황 가운데에서 정리수단인 본질을 찾는 활동, 즉 학생들에게 있어 현실에 질서를 부여하는 활동의 경험을 강조하였다. 이러한 Freudenthal의 생각을 반영하여 네덜란드의 국립수학교육연구소(IOWO)에서는 수학교육의 한 사조인 현실적 수학교육(Realistic Mathematics Education: 이하 RME)을 제안하였다. RME에 기반한 수학 활동을 통해 학습자는 실제적 맥락의 문제를 접하고, 상호작용적 학습과 반성적 사고를 통해 안내된 재발명 경험의 기회를 갖게 된다. 이러한

RME의 핵심적 원리 중의 하나가 '수학화'이다.

'수학화'란 수학을 인간의 정신적 활동이라고 할 때 이러한 정신적 활동으로서의 수학의 가장 본질적인 특성을 현상의 조직화 활동이라고 보는 것이다. 이러한 수학화를 강조하는 것은 수학화 경험을 통해서 학생들에게 수학에 대한 보다 수준 높은 이해와 자신의 세계를 이해하는 데 수학적 수단을 사용할 줄 알도록 하려는 것이다(정영숙, 1997). 수학화 경험을 강조함으로써 학생들은 수학자들이 수학적인 사고를 하고 수학적 공식을 만들어 가는 것과 같은 과정을 직접 경험해 보게 되면서 수학에 대한 개념과 원리의 이해뿐만 아니라 수학을 현실에서도 충분히 경험할 수 있는 친숙한 것으로 인식할 수 있을 것이다. 여러 관련연구들을 통하여 학생들에게 수학자들이 했던 것과 같은 다양한 수학적 경험을 제공하고 학생들의 수학에 대한 흥미와 성취도에 긍정적인 효과를 가져올 수 있다는 측면에서 RME의 핵심이 되는 수학화 경험이 중요하고 필요함을 시사하고 있다.

이에 본 연구에서는 수학적 능력 향상을 위한 수학화 경험 수업을 개발하여 실제 현장에 적용하여 보고 수학화 경험 수업에서 나타난 초등학생의 수학적 능력 및 수학화를 분석하였다. 나아가 수학과 교육과정을 구성하고 수학 수업을 하는데 있어서 더 이상 수학이 학습자의 외부에 형식적으로 머무르는 것이 아닌 학습자의 현실과 추상적인 수학을 연결시킬 수 있는 바람직한 수학교육의 교수·학습 방법의 개선에 도움을 줄 수 있는 방안을 모색해 보았다.

### II. 이론적 배경

#### 1. Freudenthal의 수학관과 수학교육관

Freudenthal은 수학을 현실로부터 출발하여 현상을

\* 2005년 6월 투고, 2006년 8월 심사 완료.

\* ZDM분류 : D42

\* MSC2000분류 : 97D40

\* 주제어 : 수학화 경험, 수학화 분석

정리하는 인지적 수단을 찾아 확실성을 추구하는 활동으로 보았다. 즉, 상식으로부터 출발하여 내용과 형식의 교대작용을 거치면서 점진적으로 형식화 되어가는 인간의 활동으로 수학을 보았고, 이러한 인간 활동의 중심에 수학화(mathematising)가 있다. 즉, 수학은 고정된 것이 아니라 계속적으로 성장·변화해 가며(정영옥, 1997), 수학화 활동을 통해 역동적인 현실을 수학적인 관점에서 점진적으로 형식화, 추상화, 일반화시킬 수 있는 것이다. 또한 Freudenthal은 수학을 기성 수학(ready-made mathematics)과 실행되는 수학(acted-out mathematics)으로 구분하였다. 여기에서 Freudenthal이 주장한 '실행되는 수학'이란 학습자가, 수학자가 수학을 발명하는 과정을 그대로 경험해 보면서 스스로 수학적 개념과 원리를 깨닫고 수학을 재발명해 보는 것을 의미한다. 이러한 실행되는 수학을 통한 수준의 비약이 이루어지기 위해서는 반성적인 사고가 필수적이다. 교사는 수학화 경험을 강조하면서 학생들이 점진적인 수학화 과정에서 계속적으로 다른 학습자들과 의사소통하고 자신의 사고 과정을 되돌아보는 기회를 제공해 줄 수 있어야 한다.

따라서 수학화 경험의 강조와 수학화 과정에서의 반성적 사고는 Freudenthal의 수학 교육관에 있어서 핵심적인 요소라고 할 수 있다.

## 2. 수학화(mathematising)의 의미와 수학화 경험의 중요성

Freudenthal은 수학은 상식적인 것이며, 수나 기하의 발달에서 보듯이 상식에서 출발해서 점진적으로 체계화·조직화되는 순환적 과정에 의해 발달해 간다고 생각했다. 또한 그는 수학은 현실에서 출발하여 확장되어 가는 것이며, 개인적으로나 역사적으로나, 수학의 출발점은 현실이고 수학은 이런 현실 세계를 이해하기 위한 수단이라고 보았다(정영옥, 1997). 이러한 기본 생각을 바탕으로 한 Freudenthal 이론의 핵심은 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 '수학화'라는 활동이다. '수학화'란 수학을 인간의 정신적 활동이라고 할 때 이러한 정신적 활동으로서의 수학의 가장 본질적인 특성을 현상의 조직화 활동이라고 보는 것이다. 즉, 수학을 완성된 지식체계로 보는 기존의 관점에서 탈피하여 발생적인 관점에서

학생들은 비형식적인 수학적 활동을 통해 기호모델을 창조할 수 있고, 또한 현실과 추상적인 수학을 연결시킬 수 있다고 보는 것이다. 즉, 수학화의 과정은 현실과 관련된 풍부한 문맥 속에서 현상과 본질에 대한 이상화와 단순화 과정을 반복하고, 비형식적인 수준에서 점차 형식적인 수준으로 나아가면서 맥락 속에 포함되어 있는 본질과 개념, 원리를 이해하고 주변 현상을 정리하고 이해하고 조직하는 과정이라고 할 수 있다. 이러한 과정을 경험하면서 학습자는 문맥적인 상황을 수학적으로 정돈하고 세련되게 조직할 수 있다.

수학화는 '수평적 수학화(horizontal mathematization)'와 '수직적 수학화(vertical mathematization)'로 분류할 수 있다(Treffers, 1987). '수평적 수학화'란 현실 내의 문제를 형식적인 수학적 처리를 통해 문제 상황을 도식화, 기호화하여 처리하는 것을 의미한다. '수직적 수학화'란 좀 더 높은 수학적 처리, 즉 수평적 수학화 이후의 수학화의 과정, 즉 문제를 해결하고 일반화하고 형식화하는 것을 의미한다. Freudenthal은 수학은 현실을 매체로 하는 인간의 정신적인 활동이기 때문에 올바른 수학 교수법은 수학적 지식을 전달하는 것이 아니라 수학자가 자신의 수학을 창조하듯 학생들이 직접 수학화 과정을 경험해봄으로써 수학의 본질적 측면을 알아가는 것이라고 주장한다. 이러한 Freudenthal의 수학에 대한 관점은 오늘날의 수학교육 현실이 가지고 있는 논리주의, 형식주의라는 문제점에 많은 시사점을 주고 있으며, 그 핵심에 바로 수학화가 있는 것이다.

## 3. 수학화 과정을 강조한 수학 수업 모형 구현

수학화 경험을 강조하고 있는 현실적 수학교육의 원리로 안내된 재발명, 학습 수준 이론, 교수학적 현상학이 있다. 이러한 원리들을 바탕으로 현실적 수학교육의 점진적인 수학화를 위한 구체적인 수학 수업의 모습에 대해 고찰해 볼 필요가 있다.

Van Groenestijn(1997)은 RME의 기본적인 절차로 6개의 스텝을 제시하고 있다. RME에서 강조하고 있는 수학화 활동의 가장 기초가 되는 것은 풍부한 문맥이다. 현실적 세계와 관련이 있는 풍부한 문맥은 수업 초기 단계에서도 중요하지만 전반적인 수업 과정에서 다루어져

야 한다. 이러한 문맥을 활용한 수학 수업의 단계는 다음과 같다.

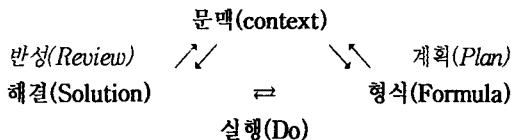
첫 번째 단계는 현실 세계의 문맥 문제를 수학화 하려는 관점을 가지고 직관적으로 탐구하는 단계이다.

두 번째 단계는 학생들 간의 상호작용, 학생들과 교사와의 상호작용, 학생들의 형식화·추상화 능력과 같은 요인들에 의존해서, 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출해 내는 단계이며, 여기에서는 수학화 과정에 대한 반성이 필수적이다.

세 번째 단계는 형식화와 추상화의 단계로서, 예상되고 결과적으로 표현되는 수학적 개념에 대한 기술과 엄격하고 형식적인 정의가 뒤따른다.

네 번째 단계는 개념을 새로운 문제에 적용함으로써 개념을 강화하고 일반화하는 단계이다. 이러한 스텝을 그림으로 정리하면 <그림 II-1>과 같다.

- 기능적, 실제적 생활과 관련된 수학 문제 제시
- 학생들은 문제를 분석, 문제해결 절차를 함께 계획
- 사용할 식에 대해 토의
- 계산
- 해결
- 이 해결책과 그에 따른 절차를 반성해 보고 결론에 도달



<그림 II-1> 현실적 수학교육의 기본 도식

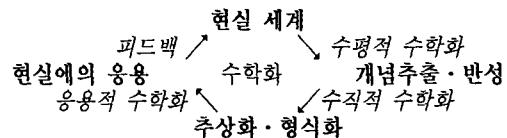
(van Groenestijn, 1997, p. 4)

이와 같은 단계를 거쳐 문제를 해결하는 과정에서 현실 세계를 바라보고 조직하는 학생들의 관점에 변화가 생길 수 있을 것이다.

이러한 문맥을 기초로 수학화 경험을 강조한 수업이 이루어지는 과정을 정영옥(1997)은 하나의 학습 사이클로 표현하였는데, 이 사이클은 ‘현실 세계→(수평적 수학화)→개념추출·반성→(수직적 수학화)→추상화·형식화→(응용적 수학화)→현실에의 응용→(피드백)→다시 현실 세계’로 나타낼 수 있다.

이를 그림으로 나타내면 다음 <그림 II-2>와 같다(정

영옥, 1997).



<그림 II-2> 수업에서의 수학화 과정

(정영옥, 1997, p. 85)

김용성(2000)은 초등학교 5학년을 대상으로 수학화 경험 수업의 단계로 문제상황제시→개별활동→소집단활동→전체토의의 네 단계를 제시하였다.

백경호(2004)는 선행 연구에서 문맥의 구성 방향을 설정하여 ‘배경→문맥→교사의 안내→수평적 수학화→수직적 수학화’의 순서로 문맥의 구성 방향을 설정, 적합한 문맥을 개발하였고, 이 문맥들을 현실적 수학교육 이론 틀에 적용하여 수업지도안을 만들었다.

황혜정(2001)은 수학화 모형의 절차 및 적용 가능한 ICT 활용 유형의 절차를 제시하고 있다. 이 모형의 일반적인 절차는 상황을 분석하고 직관적으로 탐구한 후 문제의 수학적 측면을 알아내고 규칙성을 발견하는 것, 개념을 추출하고 반성하며 다양한 상호작용에 의존하여 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출하는 것, 추상화 및 형식화를 하고 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 형식적인 정의를 제시하는 것, 마지막으로 현실에 응용하고 개념을 새로운 문제에 적용하여 개념을 강화하고 일반화하는 것의 네 가지 단계로 이를 정리하면 다음과 같다.

- 상황 분석 및 직관적 탐구 (직관적 탐구)
- 개념 추출 및 반성 (수평적 수학화)
- 추상화 및 형식화 (수직적 수학화)
- 협력 활동 (응용적 수학화)

본 수학화 경험 수업에서는 황혜정(2001)이 제시한 수학화 모형의 절차 및 적용 가능한 ICT 활용 유형 모형의 절차를 토대로 초등학교 2학년 수와 연산 영역 학습에서 적용할 수 있는 모형으로 구현해 보고자 한다. 그 단계는 문제 상황 분석(직관적 탐구)→도식화 및 규칙과 패턴 찾기(수평적 수학화)→알고리즘화와 형식화(수직적 수학화)→일반화(응용적 수학화)의 네 단계인데

이에 대한 자세한 설명은 ‘수업의 실제’ 부분에서 언급할 것이다.

#### 4. 수학적 능력

제 7차 초등 수학과 교육과정에서는 학생들에게 길러 주어야 할 수학적 지식으로 개념적 지식과 절차적 지식을 강조하고 있다. ‘개념적 지식’은 관계와 분리되어 있는 정보를 이어주는 연결된 그물망에 기초한 지식이며, ‘절차적 지식’은 일련의 행동에 기초를 두고 있으며 종종 규칙과 알고리즘을 포함하는 지식을 의미한다. 이러한 제 7차 교육과정에서 강조하고 있는 개념적, 절차적 지식을 포함하여 본 수학화 경험 수업에서 향상시키고자 하는 수학적 능력은 개념 이해, 원리 이해 그리고 문제 해결력의 세 가지이며, 개념 이해란 덧셈과 뺄셈의 개념을 이해하는 것을 말하며, 원리 이해란 개념 이해를 바탕으로 알고리즘의 원리를 이해하고, 여러 가지 문제 상황에서 수학적인 요소를 추출하고 문제에 적합한 해결 방법을 찾는 능력이라고 할 수 있다. 또한 문제해결력이란 덧셈과 뺄셈에 대한 개념과 원리의 이해를 바탕으로 실생활과 관련된 문제상황을 다양한 방법으로 해결할 수 있는 능력이라고 할 수 있다.

#### 5. 수와 연산 영역 학습의 문제점과 개선 방향

수와 연산 영역은 초등학교 전 과정을 걸쳐 교육과정에 제시되며 강조되고 있는 영역으로서 수와 연산 영역에 대한 개념과 원리의 이해는 매우 중요하다. 그러나 기계적인 알고리즘에 의한 계산의 반복과, 과정보다는 답이 틀리고 맞음의 결과만 중시하는 오늘날의 학교 수학교육에 있어서 학생들은 연산을 단순한 알고리즘에 의한 계산으로 생각하고 그 개념과 원리를 바르게 이해하지 못한 채 정확한 계산에만 치중하고 있는 실정이다.

이렇게 학생들이 수와 연산 영역에 있어서 흥미를 잃고 어려움을 느끼게 된 이유는 여러 가지가 있겠지만, 크게 학습 내용적인 측면과 학습 방법적인 측면으로 나누어 찾아 볼 수 있다.

먼저 학습 내용적인 측면에서는 첫째, 수와 연산 영역의 개념과 원리가 이해하기 어렵기 때문이다. 연산에

서 사용되고 있는 공식적인 수학 기호와 알고리즘은 수학을 공부하는 사람들 사이의 약속이다. 그러나 학생들은 수학 기호와 알고리즘이 생기게 된 배경과 과정에 대한 이해 없이 무조건적으로 알고리즘을 외우고 계산에 익숙하도록 교육받음으로써 수와 연산이 생활에 필수적이고 주변에서 자주 접할 수 있음에도 추상적이고 어려운 개념과 원리로 받아들이고 있다. 둘째, 현재 교과서에 나와 있는 문장체 문제의 내용은 주변의 삶과 관련은 있어 보이나 실제적인 맥락에서 접근할 수 있는 심층적인 문제가 아니기 때문에 학생들은 동기유발을 느끼지 못한다. 수와 연산은 그 어떤 영역보다 우리의 삶과 밀접한 관련이 있다. 따라서 수와 연산에서 제시되는 문제는 학생들의 삶과 연결되어 있어야 한다. 문맥적인 상황을 담은 문제는 RME에서 핵심적인 역할을 한다. 잘 선택된 문맥 문제는 학생들에게 비형식적인 해결 전략을 발달시킬 수 있는 기회를 제공한다. 이 비형식적인 해결 절차는 발명의 기초, 형식화나 일반화의 촉매로서 작용할 것이다. 즉, RME에서의 문맥적인 문제는 수학화의 기초가 되는 것이다(Gravemeijer & Doorman, 1999). 교사는 안내된 재발명을 통해 수평적, 수직적 수학화가 일어날 수 있는 문맥 문제를 구성해야 한다. 학습자의 실세계와 관련된 경험을 제공하는 문맥적인 문제를 구성해야 하지만, 반드시 문맥적인 문제가 실제적인 문제일 필요는 없다. 문제가 ‘실제적’이라고 할 수 있는 기준은 그 학습자가 그 문맥적 문제를 실제처럼 느끼고 개인적인 흥미를 불러일으킬 수 있는 것이어야 한다는 의미인 것이다(Wubbels et al., 1997).

다음으로 학습 방법적인 측면에서는 교사들이 수와 연산의 개념과 원리의 이해가 중요함을 알고 있음에도 불구하고 이를 학생들이 이해할 수 있도록 가르칠 수 있는 방법에 대한 인식이 부족하기 때문에 학생들에게 알고리즘에 의한 능숙한 계산만 강조하게 되고 이에 따라 학생들은 수와 연산 영역에 흥미를 잃게 되는 것이다. 특히 초등학교 저학년은 처음으로 연산을 학습하게 되고 연산에 대한 기초 개념과 원리를 접하는 중요한 시기이기 때문에 이 시기에 수감각과 수체계, 연산의 개념과 원리를 이해할 수 있도록 지도하는 것은 매우 중요하다.

이러한 이유에서 수와 연산 영역의 학습에 있어서 학생들이 수와 연산 영역에 대한 개념과 원리를 이해하고,

학습에서 흥미를 느끼고 문제를 해결하는 과정에서 성취감을 맛볼 수 있도록 수학화 경험을 강조한 수와 연산 학습으로 개선해 나가야 할 것이다.

## 6. 선행 연구

수학 학습에 있어서 개념과 원리의 중요성과 RME와 수학화 경험을 강조한 연구 결과들(권오남 외, 2003; 김용성, 2000; 백경호, 2004; 백선수, 2002; 최선아, 2002; Streefland, 1991 등)을 통하여 교수 학습의 내용과 방법적인 측면에서 다양한 시사점을 얻고자 한다.

우선적으로 수학화의 바탕이 되는 RME 관련 연구들을 살펴보면 역시 RME에 기반한 학습이 학생들의 학업 성취도에 있어서 긍정적인 효과가 있음을 보여주고 있다. Streefland(1991)은 RME 학생들이 전통적인 교육을 받은 학생들보다 계산 능력과 응용 능력에 있어서 우수하다는 결과를 보여주고 있다. 최선아(2002)는 '실제적 맥락의 문제 상황을 활용한 분수 학습의 효과 검증'이라는 연구에서 실제적 맥락의 문제 상황을 활용한 분수 학습 방법이 효과적임을 밝혔다. 백경호(2004)는 '고등학교 학률과 통계 영역에서의 현실적 수학교육의 적용'이라는 연구에서 현실적 수학교육을 적용한 수업이 수학 학습 성취도에 긍정적인 효과가 있음을 밝혔다.

김용성(2000)은 '문제상황을 기초로 한 수학화 경험에 수학적 신념과 문제해결력에 미치는 효과'라는 연구에서 초등학교 5학년용 문맥을 개발하고 수학화 경험을 하게 한 결과 학생들의 수학적 신념과 문제해결력에 긍정적 효과가 있음을 밝힌바 있다. 권오남 외(2003)는 '오일러 알고리즘의 안내된 재발명-RME 기반 미분 방정식 수업에서 점진적 수학화 과정 분석'이라는 연구에서 현실적 수학교육 철학에 입각한 교수 설계가 학생들의 오일러 알고리즘에 대한 심층적 이해와 그들의 수학적 신념과 태도 형성에 긍정적인 영향을 주었음을 밝혔다. 즉 수학화 경험을 강조한 학습이 학생들의 수학적 신념과 태도, 문제해결력 등에 긍정적인 효과가 있음을 보여주고 있다.

또한 백선수(2002)는 '초등수학교실에서 알고리즘 지도 방안 탐색'에서 교사와 학생이 현대적인 의미에서 알고리즘을 이해한다면, 학생들 스스로 문제를 해결하는데 가장 적절한 알고리즘을 선택하거나 창안해야 할 것이라

고 보았다. 이에 알고리즘을 적용한다는 것이 더 이상 기계적인 일이 아니고 보다 고차적인 사고를 요하는 지적 활동이라고 보고 Freudenthal 연구소에서 제시한 대안적인 알고리즘 방안을 탐색하고 있다. 정주자(2002)는 '수학화 이론에 기초한 초등학교 저학년에서의 덧셈과 뺄셈 지도 방안'에서 RME에 바탕을 둔 아이디어는 비형식적인 방법과 사고를 존중하며 다양한 방법을 안내하여 교사들로 하여금 수업 장면에서 나타날 수 있는 다양한 수준의 아동들의 사고를 고려하게 하고, 비형식적인 수준에 있는 아동들이 형식화 단계까지 가는 과정을 단축시키는데 수학화 경험이 도움을 줄 수 있다고 보고 있다. 이러한 연구는 연산의 개념과 원리를 이해하기도 전에 알고리즘(공식)에만 치중하는 연산 학습에 있어서 다양한 경험과 이해 과정을 통해 점진적으로 비형식적인 수준에서 형식적인 수준으로 연산에 대한 지도가 이루어져야 함을 시사하고 있다. 본 연구에서는 보다 구체적으로 저학년 초등학생에게 나타난 수학화 과정을 분석, 그 시사점을 제공하고자 한다.

## III. 연구방법 및 절차

### 1. 연구 대상

본 연구는 초등학교 2학년을 대상으로 수와 연산 영역에 있어서 수학적 능력 향상을 위한 수학화 (mathematising) 경험 수업 개발을 목적으로 하였으며, 서울시 성북구에 위치한 D초등학교, 2학년 1개 학급을 선정하여 개발된 수업을 실시하였다. D초등학교는 성북구에서는 번화가에 속하는 곳의 아파트 밀집 지역에 위치하고 있으며, 아동의 학력 수준과 가정의 사회·경제적 수준은 중위권에 해당된다. 연구에 참여한 집단은 남아 21명(51.2%), 여아 20명(48.8%)으로 전체 41명(100%)이다. 한편 이 수업은 연구 특성으로 인하여 통제 집단의 처치 없이 수업 적용 집단의 사전, 사후 검사로 수업의 효과를 검증하게 되었다.

### 2. 연구 설계

본 초등학생의 수학적 능력 향상을 위한 수학화

(mathematising) 경험 수업 개발 순서는 ①요구 조사 ②목표 설정 ③내용 선정 및 조직 ④수업 모형 개발 ⑤평가 방법 개발로 이루어져 있다. 본 연구의 수업은 서울시에 위치한 D초등학교 2학년 학생들에게 1주 2차시(1차시 80분)씩 6주 동안 모두 12차시의 과정을 거쳐 실시되었다. 실시된 수업은 타당성과 신뢰성이 있는 정보를 얻기 위해 사전·사후 수와 연산 영역 이해력 및 문제해결력 검사지를 제작하여 연구 집단의 수와 연산 영역 이해력 및 문제해결력 향상 정도를 알아보았다. 또 수평적, 수직적, 응용적 수학화 단계를 기준으로 학생들의 학습지를 분석하여 이 수업을 통해 나타나는 학생들의 수학화 사례를 살펴보았다.

따라서 본 연구에서는 이상과 같은 선행 연구들에 대한 고찰을 바탕으로 수학적 능력 향상을 위한 초등학교 2학년 수와 연산 영역 수학화 경험 프로그램을 개발하고, 본 프로그램이 수와 연산 영역에 대한 이해력과 문제해결력에 미치는 효과를 검증하고 학생들의 수학화 사례를 분석해 보고자 한다.

### 3. 연구 도구

#### 1) 학생·교사 요구 조사 도구

가르치는 교사와 학생들이 수와 연산 영역에 대해 어떻게 인지하고 있으며 수와 연산 영역 학습에 대한 요구 수준이 어느 정도인지를 가늠하기 위하여 교사, 학생 두 집단에 대한 설문 조사를 실시하였다. 요구 조사는 수업 실시 학급이 포함되어 있는 D초등학교 교사 집단(47명)과 2학년 학생 집단(82명)을 대상으로 이루어졌다. 요구 조사를 통해 얻어진 결과는 수업 개발의 방향을 모색하는 자료로 활용되었다. 조사 내용과 각 항목에 따른 해당 문항의 번호는 다음과 같다.

<표 III-1> 학생 요구 조사 문항 내용 및 문항 번호

문항 내용	문항 번호
수학 교과에 대한 선호도	1
수학 교과 영역별 선호도	2
덧셈과 뺄셈의 유용성 인식도	3
덧셈과 뺄셈의 필요성 인식도	4
덧셈과 뺄셈 학습의 흥미도	5, 6
덧셈과 뺄셈 학습의 태도	7

<표 III-2> 교사 요구 조사 문항 내용 및 문항 번호

문항 내용	문항 번호
초등 수학교육의 궁극적인 목적	1
덧셈과 뺄셈 수업 시 강조하는 지도내용	2
덧셈과 뺄셈 지도 시 어려운 점	3
덧셈과 뺄셈 지도 시 사용하는 교수법	4
공식적 수학 기호와 수 '0'의 개념에 대한 지도	5
덧셈과 뺄셈 수업 시 강조하는 지도 내용	6
저학년(1, 2학년)의 덧셈과 뺄셈 지도 시 어려운 점	7
저학년 수준에서 수학화 경험의 가능성	8, 9
저학년 수와 연산 지도 시 강조해야 할 점	10
개념과 원리 이해에 바탕을 둔 덧셈과 뺄셈 지도 시 개선점	11

#### 2) 학생·교사 요구 조사 결과

학생들을 대상으로 한 요구 조사 분석 결과를 정리해 보면 다음과 같다.

- 많은 아동들이 수학 교과를 좋아하고, 수학의 6 영역 중 '수와 연산'을 가장 재미있다고 생각한다.
- 많은 아동들은 덧셈과 뺄셈을 수학 수업 시간에만 사용하고, 쉽게 문제를 풀 수 있고, 생활을 하는데 편리하기 때문에 필요하다고 생각한다.
- 대부분의 아동들은 덧셈과 뺄셈을 배우는 것이 재미있다고 생각하는데, 재미없다고 생각한 아동들 대부분은 계산은 할 수 있는데, 왜 그렇게 계산해야하는지 이유를 잘 알지 못하기 때문이라고 생각한다.

이를 종합해보면 대부분의 아동들은 수와 연산 영역 학습에 흥미를 가지고 있지만, 기계적인 학습과 알고리즘(공식) 위주의 수업에 어려움을 느끼고 있다. 따라서 실생활과 관련된 개념과 원리 이해에 바탕을 둔 학습이 필요함을 알 수 있다.

수학 교과를 지도해 본 경험이 있는 초등교사 47명을 대상으로 설문 조사를 실시한 결과는 다음과 같다.

- 초등 수학과 교육의 궁극적인 목적은 문제해결 능력 개발이라고 생각하는 교사가 많다.
- '덧셈과 뺄셈'에 관한 수업을 할 때 알고리즘(공식)이 나오게 된 원리를 이해하는 것을 강조하여 지도해야 한

다고 생각하지만, 개념과 원리의 이해에 대한 지도에 어려움을 느끼는 교사가 많다.

· 저학년 수준에서 수학화 경험의 가능성은 어느 정도 가능하다고 생각하는 교사가 많으며, 가능하지 않다고 생각하는 교사는 그 이유로 저학년 단계의 아동들은 수학적 원리를 이해할 만큼 사고 과정이 아직 발달되지 못했기 때문이라고 생각하고 있다.

이를 바탕으로 살펴보면, 교사들은 알고리즘 중심의 계산보다는 개념과 원리의 이해에 수업의 중심을 두어야 한다고 생각하고 있다. 하지만, 개념과 원리의 이해에 대한 지도에 어려움을 느끼는 교사가 많고, 이에 대한 이해를 바탕으로 수와 연산 학습을 할 수 있는 적절한 수업이 없기 때문에 적절한 수와 연산 학습 수업이 제공되기를 희망하고 있음을 알 수 있다.

### 3) 수업의 평가 도구

수업 효과에 대한 평가를 위해 사전·사후 수와 연산 이해력 및 문제해결력 검사지를 제작하여 실험 집단의 사전·사후 평가를 실시하였다. 사전, 사후 검사 평가 요소 및 내용은 다음 <표 III-3>, <표 III-4>와 같다.

<표 III-3> 사전 수와 연산 검사지 구성

문항구성	문항내용	문항번호	문항수	배점
이해	· 개념 이해 · 50까지 수 · 100까지의 수 · 간단한 수의 +, -	2,3,5,8, 11,12 9,10	8	8점
원리 이해	· 간단한 수의 +, - · 두 자리 수의 +, - (받아올림·반아내림 없음)	1,4,6,13, 7,16	6	10점
문제 해결력	· 덧셈과 뺄셈의 활용	14,15,17, 18,19,20	6	22점
	합계		20	40점

<표 III-4> 사후 수와 연산 검사지 구성

문항구성	문항내용	문항번호	문항수	배점
이해	· 개념 이해 · 몇 백과 세 자리 수의 이해 · 두 자리 수의 +, - (받아올림, 받아내림 있음)	1,2 3,4,5, 6,7,8	8	8점
원리 이해	· 두 자리 수의 +, - (받아올림, 반아내림 없음)	9,10, 11,12, 13,14	6	10점
문제 해결력	· 덧셈과 뺄셈의 활용	15,16,17, 18, 19,20	6	22점
	합계		20	40점

### 4) 사전, 사후 검사 평가 기준과 척도 개발

본 연구의 문제를 해결하기 위하여 사전·사후 수와 연산 학습에 있어서 연구 집단 아동들의 수와 연산 영역에 대한 개념 및 원리와 문제해결력을 측정할 때 아동의 사고 과정과 풀이 과정을 보다 구체적으로 알아보기 위하여 평가 기준을 세부적으로 나누어 배점을 달리하였다.

사전·사후 검사에서의 평가 문항의 평가 기준 및 배점은 지도교수, 대학과 대학원에서 수학을 전공한 동료 교사와 대학원에서 수학교육을 전공한 동료 교사 2명, 현재 2학년에서 수학을 가르치고 있는 교사 5명 등 총 8명의 내용 전문가에게 내용타당도를 검증받았다. 구체적인 사전·사후평가 기준 및 배점의 예는 다음 <표 III-5>, <표 III-6>과 같다.

<표 III-5> 사전 평가 문항 내용 및 기준의 예

번호	평가 문항 내용	평가 기준	배점
17	(두 자리 수)와 (한 자리 수)의 덧셈과 뺄셈의 개념과 원리를 이해하고 버스 문제를 해결할 수 있다.	덧셈과 뺄셈의 개념과 원리를 이해하고 15-3+7-5=14로 나타내는 과정과 답을 바르게 제시함	4
		개념과 원리를 이해하고 덧셈과 뺄셈으로 나타내는 과정을 바르게 제시하고 있으나 답이 틀림	3
	· 덧셈과 뺄셈으로 나타내는 과정은 약간 미흡하나 개념과 원리를 바르게 이해하고 있으며 답이 맞음	덧셈과 뺄셈으로 나타내는 과정은 약간 미흡하나 개념과 원리를 바르게 이해하고 있으며 답이 맞음	2
		문제해결 과정이 미흡하나 덧셈과 뺄셈의 개념과 원리에 대한 이해는 보임	1
		개념과 원리에 대한 이해가 부족하고 덧셈과 뺄셈으로 나타내는 과정이 미흡함	0
	덧셈과 뺄셈으로 나타내는 과정을 제시하지 못하고 개념과 원리를 이해하지 못함		

### 5) 신뢰도 검증

#### 가) 검사도구의 신뢰도

검사도구의 신뢰도를 구하기 위하여 문항 내적 일관성 신뢰도 검사를 실시하였다. 이 연구에 사용된 도구는 인지적 측면의 검사도구로서, 수학교육과정 목표에 근거하여 사전·사후 수와 연산 영역 학습의 향상을 알아보는 검사도구이다. 수학화 경험의 효과를 알아보기 위하여, 사전·사후 검사 문항은 수학 <2-가> 단계 교육과

정 중 실험기간 동안 학습한 수와 연산 단원을 교육과정에 제시된 차시별 목표 수준에 근거하여 수학 교과서, 수학 악함책 그리고 교사용 지도서를 참고하여 제작하였다. 검사 도구의 문항 내적 일관성 신뢰도를 구하기 위해 Cronbach  $\alpha$  신뢰도를 사용하였고 신뢰도 계수를 구한 결과 사전·사후 검사 모두 문항 내적 일관성 신뢰도가 비교적 높다고 해석할 수 있다. 그 결과를 정리하면 다음 <표 III-7>과 같다.

&lt;표 III-6&gt; 사후 평가 문항 내용 및 기준의 예

18	덧셈과 뺄셈의 개념과 원리를 이해하고 41-8-8-8=17 혹은 8+8+8=24, 41-24로 나타내는 과정과 답을 바르게 제시함	4
	덧셈과 뺄셈의 개념과 원리를 이해하고 문제 해결 과정은 바르게 제시하고 있으나 답이 틀림	3
	문제해결 과정은 약간 미흡하나 개념과 원리를 바르게 이해하고 있으며 답이 맞음	2
	문제해결 과정이 미흡하나 덧셈의 개념과 원리에 대한 이해는 보임	1
	문제해결 과정은 제시하고 있으나 개념과 원리를 이해하지 못함	0
	문제해결 과정을 제시하지 못하고 개념과 원리를 이해하지 못함	0

<표 III-7> 문항 내적 일관성 신뢰도(Cronbach  $\alpha$ )

검사지	사전 검사	사후 검사
신뢰도 계수	.7652	.7589

#### 나) 채점자간 신뢰도

본 사전 검사지의 17~20번 문항과 사후 검사지의 1~4~20번 문항은 서술형으로 제작되었다. 연구 대상 아동들의 사전·사후 검사지를 평가하기 위해 서술형 채점을 3인의 채점자를 선정하고 채점자간 신뢰도를 산출하도록 하였다. 채점자는 본 연구자와 대학과 대학원에서 수학을 전공한 교육경력 5년의 여교사와 대학에서 수학교육을 전공한 교육경력 7년의 여교사이다.

문항 채점에 앞서 채점자에게 본 연구의 목적과 연구 문제, 그리고 연구 절차 및 평가 요소에 대한 이론적 배경을 설명하고, 평가 문항 내용과 평가 기준을 중심으로 평가 방법을 알려 주었다. 그리고 서울시 D 초등학교 2학년 아동들의 예비 검사지로 3명의 채점자가 예비 채점을 실시함으로써, 평가 기준에 대한 협의 및 채점 시 유의점, 예상되는 문제점 등을 함께 논의하였다. 평가 점수는 사전 검사와 사후 검사의 서술형 문항을 채점한 뒤 세 평가자의 점수를 합한 후 그 평균값으로 하였으며, 사전 검사 문항의 총점은 16점이고, 사후 검사 문항의 총점은 25점이다.

채점자간의 신뢰도를 알아보기 위해 SPSS/WIN 10.0 통계 수업을 사용하여 Pearson 상관계수를 구하여 알아보았다. 그 결과 사전·사후 모두 신뢰도가 높았으며, 채점자간 신뢰도는 사전·사후로 나누어 각각 <표 III-8>과 <표 III-9>에 제시하였다.

&lt;표 III-8&gt; 사전 서술형 문항 평가 채점자간 신뢰도

	채점자A	채점자B	채점자C	
채점자 A	Pearson 상관계수	1	.942	.945
	유의 확률(양쪽)	.000	.000	
	N	41	41	41
채점자 B	Pearson 상관계수	.942	1	.908
	유의 확률(양쪽)	.000	.000	
	N	41	41	41
채점자 C	Pearson 상관계수	.945	.908	1
	유의 확률(양쪽)	.000	.000	.
	N	41	41	41

$p < .01$

&lt;표 III-9&gt; 사후 서술형 문항 평가 채점자간 신뢰도

	채점자A	채점자B	채점자C	
채점자 A	Pearson 상관계수	1	.890	.903
	유의 확률(양쪽)	.000	.000	
	N	41	41	41
채점자 B	Pearson 상관계수	.890	1	.932
	유의 확률(양쪽)	.000	.000	
	N	41	41	41
채점자 C	Pearson 상관계수	.903	.932	1
	유의 확률(양쪽)	.000	.000	.
	N	41	41	41

$p < .01$

### 6) 학생들의 수학화 사례 분석 기준

본 수업에서는 수업 효과에 대한 평가를 위해 사전·사후 수와 연산 이해력 및 문제해결력 검사지를 제작하여 실험 집단의 사전·사후 평가를 실시하였다. 또한 정영옥(1997)의 논문에서 인용된 De Lange와 Verhage(1987)의 수학화 활동의 구분을 참고하여 수평적, 수직적, 응용적 수학화 단계에 따른 내용을 기준으로 매 차시 아동들이 수업 시간에 활동한 학습지를 분석하여 본 수학적 능력 향상을 위한 수학화 경험 수업을 통해 나타나는 아동들의 수학화 사례를 살펴보았는데 그 구체적인 분석 기준과 내용은 <표 III-10>과 같다.

<표 III-10> 수학화 사례의 분석 기준과 내용  
(De Lange & Verhage, 1987, pp. 243-248)

넘 계	분석 기준	분석내용
1	수평적 수학화	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 일반적인 문맥에서 구체적인 수학을 알아내기</li> <li>· 도식화</li> <li>· 여러 가지 방식으로 문제를 형식화하고 시각화하기</li> <li>· 관계를 발견하기</li> <li>· 규칙성을 발견하기</li> <li>· 여러 가지 다른 문제 사이의 동형적 측면들을 인식하기</li> <li>· 현실 세계 문제를 수학적인 문제로 전환하기</li> <li>· 현실 세계를 잘 알려진 수학적 모델로 전환하기</li> </ul>
2	수직적 수학화	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 관계를 공식으로 표현하기</li> <li>· 규칙성을 증명하기</li> <li>· 모델을 세우기하고 조정하기</li> <li>· 여러 가지 모델을 사용하기</li> <li>· 여러 모델을 결합하고 통합하기</li> <li>· 새로운 수학적 개념을 형식화하기</li> <li>· 일반화하기</li> </ul>
3	응용적 수학화	<ul style="list-style-type: none"> <li>· 개념을 새로운 문제에 적용하기</li> <li>· 개념을 강화하고 일반화하기</li> </ul>

### 4. 자료 분석

본 수업의 효과를 검증하기 위하여 대응 표본  $t$ -검정을 유의수준 .05에서 실시하였다. 연구 집단의 사전·사후 검사의 평균, 표준편차,  $t$ 통계값, 자유도, 유의 확률을 표로 나타낸 후, 개념·원리 이해력과 문제해결력으로 나누어 연구 집단의 향상 정도를 양적으로 해석하였다. 또한 양적 해석을 보완하기 위하여 아동들의 학습지 분석을 통해 나타나는 학생들의 수학화 사례를 질적으로 서술하였다. 모든 자료 분석은 개인용 컴퓨터의 SPSS/WIN 10.0 통계 수업을 이용하였다.

## IV. 수업의 실제 및 결과

### 1. 수업의 실제

#### 1) 목표 설정

본 수업에서는 현재 제 7차 초등학교 수학과 교육과정의 수와 연산 영역에서 본 수업의 주요 단원인 2-가 단계와 관련하여 가장 강조하고 있는 목표인 ‘세 자리 수에 대한 이해를 바탕으로 받아올림과 받아내림이 있는 덧셈과 뺄셈을 할 수 있다’를 달성하고자 하나 수학화 경험을 강조한 학습을 통해 학생들이 수평적 수학화와 수직적 수학화의 단계를 경험하고, 이러한 과정에서 수와 연산 영역에 대한 개념과 원리를 이해하여 실생활과 관련된 문제 상황을 해결할 수 있는 능력을 기르는 것을 주요 목표로 하여 다음 <표 IV-1>과 같이 제시하였다.

#### 2) 수학화 경험 수업의 실제

본 수업의 1차시와 4차시는 수학화 과정의 핵심 중의 하나인 수학자가 수학을 발명해 보는 과정을 직접 경험해 볼 수 있는 기회를 제공하기 위한 활동이다. 수학화 경험을 강조한 수와 연산 영역 학습은 2~3차시와 5~11차시로 구성되어 있다. 수업의 구체적인 내용은 다음 <표 IV-2>와 같다.

#### 3) 수학화 경험 수업 모형

본 수업에서는 수학적 능력 향상을 위한 수학화 경험 학습을 위해 황혜정(2001)이 제시한 ‘수학화 모형의 절차 및 적용 가능한 ICT 활용 유형 모형’ 구성을 토대로 초등학교 2학년 수준에 맞게 재구성하여 개발하였다. 기본적인 수학화 활동으로 규칙과 패턴 찾기, 추론하기, 정의하기, 일반화, 도식화, 형식화, 알고리즘화, 국소적 조직화 등이 있는데, 이러한 여러 가지 활동 중 초등학교 2학년 수준에서 적합한 활동을 기준으로 각 단계를 설정하였다. 본 수업 모형은 문제 상황 분석(직관적 탐구)→도식화 및 규칙과 패턴 찾기(수평적 수학화)↔알고리즘화와 형식화(수직적 수학화)→일반화(응용적 수학화)의 단계로 이루어진다.

여기에서 도식화 및 규칙과 패턴 찾기 단계와 알고리즘화와 형식화 단계 사이를 ↔로 나타낸 것은 첫 번째

단계 다음에 두 번째 단계에서 세 번째 단계로 순차적으로 나아가는 것이 아니라 초등학교 2학년 수준에서는 두 번째 단계와 세 번째 단계가 서로 순환적으로 나올 수 있다는 것을 의미하며 수업 모형에서는 2단계인 '도식화 및 규칙과 패턴 찾기'와 3단계인 '알고리즘화와 형식화' 사이를 점선으로 연결하였다. 각 단계에 따른 구체적인 활동 유형과 활동 내용은 다음 <표 IV-3>과 같이 정리 될 수 있다.

## 2. 수업의 결과

### 1) 개념 · 원리 이해력과 문제해결력의 차이

<표 IV-4>에 의하면 사전 검사와 사후 검사를  $t$ -검정한 결과, 개념 이해는 유의확률이 .018, 원리 이해는 .012, 문제해결력은 .013으로 모두 유의수준 .05에서 통계적으로 유의하게 나타났다. 따라서 수학적 능력 향상을 위한 수학화 경험 수업 실시 후, 수업 실시 대상의 전반적인 수와 연산 개념 및 원리 이해력과 문제해결력이 향상했음을 알 수 있다.

<표 IV-1> 수학화 경험 수업 목표

총괄 목표		도달하고자 하는 수학화 단계			
세부 목표	직관적 탐구	수평적 수학화	수직적 수학화	응용적 수학화	
	· 수학화 경험을 강조한 수와 연산 학습을 통해 수와 연산의 개념과 원리를 이해하고, 이를 바탕으로 문제해결력을 기를 수 있다.				
	1. 수와 연산의 개념을 이해하고 수평적 수학화의 단계로 나아갈 수 있다.		1) '0'의 개념과 연산 기호의 의미를 이해하고 비공식적 표기법을 발명, 정교화 할 수 있다.	<input type="radio"/>	
			2) 세 자리 수의 기수법과 계열을 이해하고, 세 자리 수를 읽고 쓸 수 있다.	<input type="radio"/>	
			3) 덧셈과 뺄셈의 개념을 이해하고 수평적 수학화의 단계를 경험할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	2. 수와 연산의 원리를 이해하고 점진적으로 수평적 수학화와 수직적 수학화의 단계를 경험할 수 있다.		1) 세 자리 수의 대소를 비교하고, 수 배열표에서 띄어 세는 규칙을 이해할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			2) 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 덧셈을 할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			3) 받아내림이 있는 (두 자리 수)-(한 자리 수)의 뺄셈을 할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			4) 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(두 자리 수)의 덧셈을 할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			5) 받아내림이 있는 (두 자리 수)-(두 자리 수)의 뺄셈을 할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			6) 세 수의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고, 직관적 탐구, 수평적, 수직적 수학화의 단계를 경험할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
	3. 수와 연산의 문제해결력을 기르고 수직적 수학화와 응용적 수학화의 단계를 경험할 수 있다.		1) 여러 가지 전략으로 덧셈과 뺄셈을 계산하고, 직관적 탐구, 수직적, 응용적 수학화의 단계를 경험할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			2) 덧셈과 뺄셈식을 만들어 덧셈과 뺄셈의 관계를 파악하고, 직관적 탐구, 수직적 수학화의 단계를 경험할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
			3) 현실 세계를 반영한 문제를 해결하고, 직관적 탐구, 수직적, 응용적 수학화의 단계를 경험할 수 있다.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

&lt;표 IV-2&gt; 수학화 경험 수업의 실제

주 차 시	학습 주제	학습관련 요소	강조하는 수학화 단계와 내용				시 간
			직관적 탐구	수평적 수학화	수직적 수학화	응용적 수학화	
사 전	1 사전검사						60분
1	1 '0'의 필요성을 인식하고 '0' 대신 쓸 수 있는 표기법 발명해 보기	개념 이해		도식화 정의하기			80분
	2 백, 몇 백, 세 자리 수를 이해하고 몇 백, 세 자리 수를 읽고 쓰기	개념, 원리 이해		규칙과 패턴찾기			80분
2	3 뛰어서 세기, 두 수의 크기를 비교해 보기	개념 이해	수학적 측면알아 내기	규칙과 패턴찾기	추론하기		80분
	4 덧셈과 뺄셈의 표기의 뜻과 필요성을 인식하고 비공식적 표기법을 발명하고 정교화하기	개념 이해		도식화 정의하기	형식화		80분
3	5 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(한 자리 수)의 원리를 이해하고 계산하기	원리 이해		도식화	형식화 알고리즘화		80분
	6 받아내림이 있는 (두 자리 수)-(한 자리 수)의 원리를 이해하고 계산하기	원리 이해		도식화	형식화 알고리즘화		80분
4	7 세 수의 덧셈과 뺄셈의 원리를 이해하고 계산하기	원리 이해		도식화	알고리즘화 일반화		80분
	8 받아올림이 있는 (두 자리 수)+(두 자리 수)의 원리를 이해하고 계산하기	개념, 원리 이해		도식화	형식화 알고리즘화		80분
5	9 받아내림이 있는 (두 자리 수)-(두 자리 수)의 원리를 이해하고 계산하기	개념, 원리 이해		도식화	형식화 알고리즘화		80분
	10 덧셈과 뺄셈식을 만들어 덧셈과 뺄셈의 관계를 파악하고 여러 가지 전략으로 덧셈과 뺄셈 계산하기	원리 이해, 문제해결 력	수학적측 면알아내 기		일반화 국소적 조직화	일반화	80분
6	11 세 수의 혼합 계산 원리를 이해하고 계산하기	원리 이해	수학적측 면알아내 기		알고리즘화 일반화		80분
	12 현실 세계를 반영한 덧셈과 뺄셈 문제를 여러 가지 전략으로 해결하기	문제해결 력	수학적측 면알아내 기		국소적 조직화	일반화	80분
사 후	1 사후검사						60분

&lt;표 IV-3&gt; 수학화 경험 수업 모형

단계	단계	활동유형	활동내용
1	문제 상황 분석 (직관적 탐구) -(문제 상황을 분석하고 직관적으로 탐구한 후 문제의 수학적 측면을 발견하는 단계)	문제 상황 제시 및 개별 활동	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 동기유발</li> <li>• 학습 목표 확인</li> <li>• 현실 세계를 반영한 흥미 있는 수학적 문제 상황을 제시</li> <li>• 문제 상황 분석</li> <li>- 문제에서 드러나는 해결해야 할 문제 상황을 명확히 하고 문제의 수학적 측면을 발견하여 학습지에 적고 발표해 본다.</li> </ul>
2	도식화 및 규칙과 패턴 찾기 (수평적 수학화) -(문제 상황에서 발견한 수학적 측면을 도식화하고 규칙과 패턴을 찾으면서 수평적 수학화를 경험하는 단계)	전체 토의 및 소집단 토의	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 전체 토의 및 발표</li> <li>- 교사는 아동들의 문제해결 과정을 살펴보고 적절한 질문을 통해 아동들의 사고의 확장을 돋는 역할을 한다.</li> <li>• 도식화 및 규칙과 패턴 찾기</li> <li>- 토의를 통해 자신이 찾은 문제 상황의 수학적 측면을 도식화하고, 규칙과 패턴을 찾으면서 다양한 해결 방법을 생각해 본다.</li> <li>- 소집단 활동이 끝나면 소집단 별로 친구들에게 자신의 문제해결 과정을 발표한다.</li> </ul>
3	알고리즘화와 형식화 (수직적 수학화) -(문제 상황을 형식화하고 다양한 방법과 알고리즘으로 문제를 해결하면서 수직적 수학화를 경험하는 단계)	개별 활동	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 알고리즘화</li> <li>- 다양한 방법과 알고리즘을 사용하여 분석한 문제 상황을 해결해 본다.</li> <li>• 형식화</li> <li>- 지금까지 한 수학적 활동에 대해 살펴보고 종합해 보고 추상화, 형식화 시킬 수 있는 기회를 갖는다.</li> <li>- 교사는 적절한 질문과 피드백을 통해 학생들이 수학화 경험을 정교화하고 일반화할 수 있도록 돋는 역할을 한다.</li> </ul>
4	일반화 (응용적 수학화) -(개념을 새로운 문제에 적용하여 개념을 강화하고 일반화하면서 응용적 수학화를 경험하는 단계)	전체 토의를 통한 반성적 사고	<ul style="list-style-type: none"> <li>• 일반화</li> <li>- 교사가 제공하는 현실 세계를 반영한 문제를 그 동안의 수학화 경험을 통해 배운 개념과 원리를 적용하여 개별적으로 해결해 본다.</li> <li>• 전체 토의 및 정리</li> <li>- 전체적인 토의 시간에 자신이 푼 문제와 이해한 개념과 원리에 대해 이야기 하면서 다시 한 번 반성적 사고의 시간을 갖는다.</li> </ul>

&lt;표 IV-4&gt; 사전·사후 검사의 t-검정 결과

수학적 능력	검사 사례 수	평균	표준편차	t 통계 값	자유 도	유의 확률
개념 이해	사전 41 사후 41	7.0488 7.5366	1.26395 .74490	-2.465	40	.018**
위리 이해	사전 41 사후 41	7.5366 8.4146	2.01367 1.70258	-2.647	40	.012**
문제해 결력	사전 41 사후 41	12.8293 14.8537	5.95358 4.61281	-2.610	40	.013**

\*\* $p < .05$ 

결과적으로 수학적 능력 향상을 위한 수학화 경험 수업은 수와 연산 이해력 및 문제해결력에 긍정적인 영향

을 주었다고 볼 수 있다.

## 2) 학생들의 수학화 사례 분석

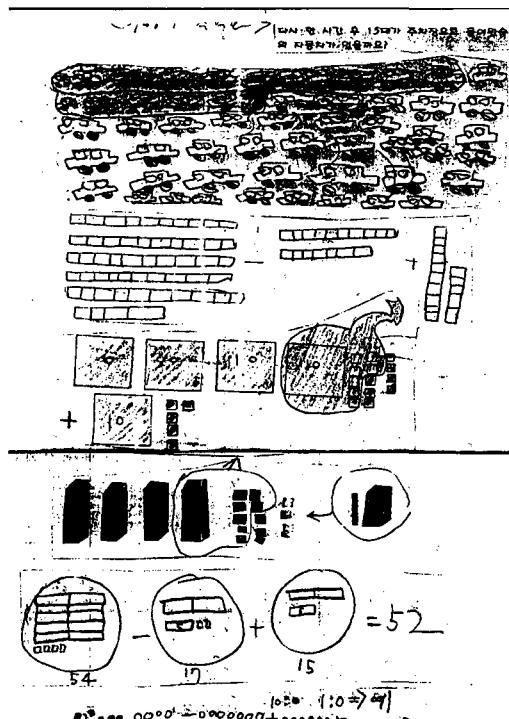
### 가. 수평적 수학화의 사례의 예

'수평적 수학화' 단계는 개념을 추출하고 반성하며 다양한 상호작용에 의존하여 현실 상황으로부터 수학적 개념을 추출하는 단계이다. 다음에 제시된 문제 상황과 그 풀이 과정에서 아동들의 수평적 수학화 사례를 살펴볼 수 있었다.

【문제】 주차장에 자동차가 54대 있습니다. 한 시간 후 17대가 빠져나갔습니다. 다시 한 시간 후 15대가 주차장

으로 들어왔습니다. 현재 주차장에는 몇 대의 자동차가 있을까요?

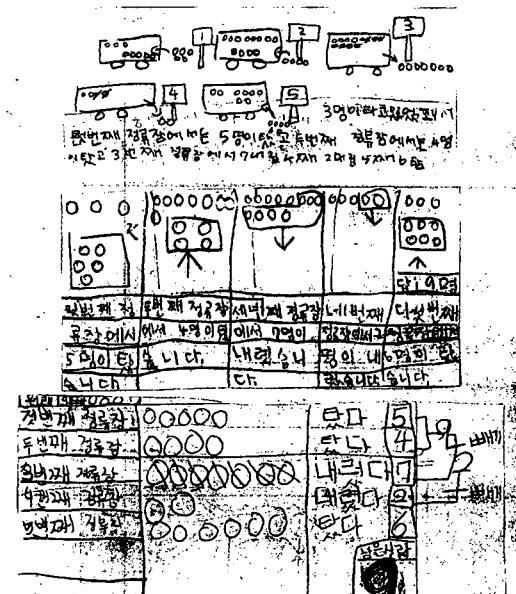
<그림 IV-1>에서 아동들은 여러 가지 방식으로 문제를 형식화하고 시각화하는 수평적 수학화의 단계를 보여주고 있다. 첫 번째 아동은 문제 상황을 명확히 하기 위해 문제에 제시된 숫자만큼의 버스를 직접 그림으로 그리고 있다. 반면 두 번째, 세 번째, 네 번째, 다섯 번째 아동은 수모형을 직접 그리거나 색종이로 잘라서 만들어 문제를 해결하고 있다. 두 번째와 네 번째 아동은 네모 하나를 일로 하여 십모형을 나타내고 있는 반면 세 번째 아동은 큰 네모 하나를 십모형으로, 다섯 번째 아동은 큰 네모 하나를 5로 하여 네모 두 개를 십모형으로 나타내고 있다. 마지막 아동은 10단위를 ●, 1단위를 ○로 나타내는 자신만의 표기법으로 문제를 해결하고 있다. 이러한 사례들에서 아동들이 문제의 수학적 측면을 탐구하여 덧셈과 뺄셈을 도식화하여 문제를 해결하는 수평적 수학화의 단계에 있음을 볼 수 있다.



<그림 IV-1> 수평적 수학화-다양한 도식화

[문제] 버스에 3명이 타고 있습니다. 첫 번째 정류장에서 5명이 탔습니다. 두 번째 정류장에서 4명이 탔습니다. 세 번째 정류장에서 7명이 내렸습니다. 네 번째 정류장에서 다시 2명이 내렸습니다. 다섯 번째 정류장에서 6명이 탔습니다. 이 버스에는 모두 몇 명이 타고 있을까요?

<그림 IV-2>에서 아동들은 위에서 본 도식화의 사례와는 또 다르게 관계와 규칙을 발견하여 체계적인 방식으로 버스 문제를 도식화하고 있다. 첫 번째 아동은 간략한 버스 그림과 함께 정류장을 숫자로 표시하고, 버스를 탔다는 의미인 +와, 버스를 내렸다는 의미인 -를 화살표의 방향으로 나타내고 있다. 두 번째와 세 번째 아동은 문제를 표처럼 정리하여 알아보기 쉽게 나타내고 있다. 세 번째 아동은 문제에서 주요 용어인 ‘탔다’와 ‘내렸다’를 추출하여 이를 바탕으로 문제를 도식화하여 해결하고 있다.



<그림 IV-2> 수평적 수학화-규칙성과 관계를 발견하기

#### 나. 수직적 수학화의 사례의 예

‘수직적 수학화’ 단계는 예상되고 결과적으로 발생되는 수학적 개념에 대한 기술과 형식적인 정의를 제시하는 단계이다. 수직적 수학화의 내용으로는 관계를 공식

으로 표현하기, 규칙성을 증명하기, 모델을 세련시키고 조정하기, 여러 가지 모델을 사용하기, 여러 모델을 결합하고 통합하기, 새로운 수학적 개념을 형식화하기, 일반화하기 등이 있다.

처음 수업을 시작하면서 바둑돌, 색종이, 수모형 등을 이용한 직접적인 조작 활동을 경험한 아동들은 문제를 다양한 그림과 자신만의 표기법으로 나타내는 도식화의 모습을 보였다. 그러나 소그룹 토의와 전체 토의를 하고 교사의 안내를 받으면서 점점 다양한 모델로 문제를 해결하고 모델들을 세련시키고 여러 가지 모델을 결합하고 통합하여 문제를 해결하는 수직적 수학화의 사례를 보였다.

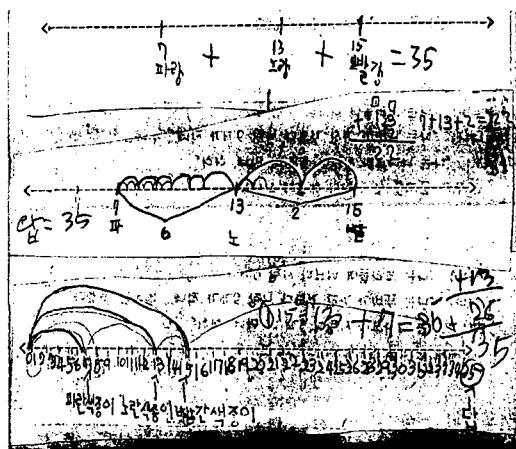
다음에 제시된 문제 상황과 그 풀이 과정에서 아동들의 수직적 수학화 과정을 살펴볼 수 있었다.

[문제] 종이접기를 합니다. 빨간 색종이가 15장, 노란 색종이가 13장, 파란 색종이가 7장 있습니다. 색종이는 모두 몇 장인가요? 다음의 선 위에서 문제를 해결해 보세요.

종이접기 문제는 그 동안의 문제해결 방법과는 다르게 아동들에게 수직선을 제시하고 이 수직선 위에서 생각하고 문제를 해결하여 보게 하였다. 교사의 안내를 받아 아동들은 수직선 위에서 숫자 사이의 거리를 생각해 보고, 위의 문제에서 나오는 7, 13, 15라는 숫자가 각각 어느 위치쯤에 있어야 하는지 생각해 보는 시간을 가졌다.

<그림 IV-3>은 아동들이 수직선 위에서 숫자를 표기하는 방식을 점점 조정하고 세련화시키는 예이다.

첫 번째 아동은 7, 13, 15를 차례로 표시하는 방식으로, 두 번째 아동은 비록 한 칸 사이의 간격이 같지만, 7과 13 사이의 거리와 13과 15 사이의 거리를 나타내는 방식으로, 세 번째 아동은 한 칸의 간격을 설정하고 7, 13, 15가 각각 0에서부터 일곱 칸, 열세 칸, 열다섯 칸 떨어져 있음을 표시하고 있다. 이러한 수직선 위에서 문제를 해결하는 활동을 통해 아동들은 숫자와 숫자 사이의 크기에 대한 개념을 거리로 느껴보는 기회를 가져볼 수 있었다.



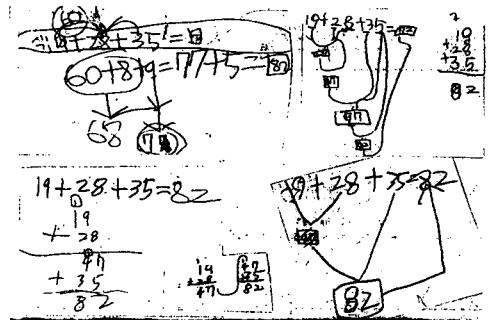
<그림 IV-3> 수직적 수학화-수직선 모델을 조정하고 세련화시키기

[문제] 2학년에서 체육을 좋아하는 학생 수를 조사하였습니다. 1반에서 체육을 좋아하는 사람은 19명입니다. 2반에서 체육을 좋아하는 사람은 28명입니다. 3반에서 체육을 좋아하는 사람은 35명입니다. 그렇다면 1, 2, 3반에서 체육을 좋아하는 사람은 모두 몇 명입니까?

<그림 IV-4>는 지금까지 수학화를 강조한 수업을 통해 경험한 다양한 모델을 사용하여  $19+28+35$ 의 문제를 해결하는 사례이다.

왼쪽 위의 아동은 가로셈으로 문제를 해결하면서 먼저 십의 자리끼리 더한 후( $10+20+30=60$ ) 남은 일의 자리 숫자들을 더해서( $60+8+9+5=82$ ) 답을 도출하는 과정을 보여주고 있다. 왼쪽 아래의 아동은 (두 자리 수)+(두 자리 수)의 세로셈의 전형적인 알고리즘으로 문제를 해결하는 방식을 보여준다. 오른쪽 위의 아동은 선으로 더하는 수들을 연결하면서 먼저  $19+8$ 을 더한 후 남은  $20$ 을 더하고 여기에다가 다시  $30$ 을 더하고  $5$ 를 더해서 문제를 해결하는 과정을 보여주고 있다. 오른쪽 아래의 아동은 가로셈으로 차례로 더해서 해결하는 모습을 보여주고 있다.

이상과 같은 모습에서 아동들이 구체적인 문맥에서 수학적인 요소를 추출하여 이를 수학적 식으로 만들고, 여러 가지 모델을 이용하여 이 식을 해결하는 수직적 수학화의 사례를 보여주고 있음을 알 수 있다.



<그림 IV-4> 수직적 수학화—여러 가지 모델을  
사용하여 문제를 해결하기

#### 다. 응용적 수학화의 사례의 예

‘응용적 수학화’란 개념을 새로운 문제에 적용하여 개념을 강화하고 일반화하는 단계이다. 응용적 수학화의 내용으로는 개념을 새로운 문제에 적용하기, 개념을 강화하고 일반화하기 등이 있다.

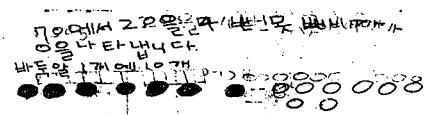
다음에 제시된 문제 상황과 그 풀이 과정에서 아동들이 덧셈과 뺄셈의 개념을 새로운 문제에 적용하는 모습을 보임으로써 2학년 수준에서도 응용적 수학화의 가능성이 엿보임을 알 수 있었다.

[문제] 과학자가 젊어지는 약을 개발했습니다. 이 약은 한 알 먹을 때마다 20년이 젊어집니다. 70살 할아버지가 약을 4알 먹으면 어떤 일이 일어날까요?

이 문제는 70-80의 식을 나타내는 문제로 사실 -10이  
라는 음수의 개념을 모르는 2학년 아동들에게는 많은 갈  
등과 어려움을 줄 수 있는 문제이다. 그러나 <그림  
IV-5>에서 볼 수 있는 것과 같이 2학년 아동들은 빨셈  
의 개념을 생각하면서 나름대로 논리적인 해결 과정과  
답을 보여주었다.

첫 번째 아동과 왼쪽 맨 아래의 아동은 70에서 20을 4번 못 뺀다는 것을 알고 이에 대한 답으로 자신들이 알고 있는 최소수인 0을 제시하였고 따라서 문제 상황과 관련하여 0살이므로 엄마 뱃속에 있다고 답하였다. 두 번째 아동은 나름대로 풀이 과정을 논리적으로 설명하고 있는데, 70에서 80을 빼려면 10이 더 필요하므로 10을 -10으로 생각한다는 답을 제시하고 있다. 오른쪽 아래 아동은 0과 0보다 10이 적기 때문에 -10이라는 두 가지 답을 제시하면서 문제 상황과 관련하여 할아버지가 태어나기 10년 전으로 돌아간다는 답을 제시하였다.

郁闷의 개념을 정확히 알고 있는 몇 명의 아동들은 스스로 음수의 개념을 유추하고 있는 과정을 보이는 응용적 수학화의 모습을 보이고 있다. 2학년 수준에서 개념을 강화하고 일반화하는 단계까지는 어려움이 있으나 개념을 새로운 문제에 적용하여 강화시키는 응용적 수학화의 단계도 나타날 수 있다는 가능성을 보여주는 사례라고 할 수 있다.



70-89=0  
10자인 뒤에 10자이기 때문에  
20자인 끝에 20자인  
700-11880을 빼면 1000이 되고  
그러면 100-100은 0이 되어  
로 정답이다.

$$70 - 20 = 50$$

$$50 - 20 = 30$$

$$30 - 20 = 10$$

$$10 - 20 \text{은 엄마 배 속}$$

태어나기 10년 전으로 돌아간다

의문

Do	Be	Do	Be
20은	0	보다 (10+)	
하기	되는		

<그림 IV-5> 응용적 수학화-뺄셈 개념을 새로운 문제에 적용하기

## V. 결론 및 제언

본 연구는 '수학적 능력 향상을 위한 수학화 경험 수업'을 개발하여 초등학교 2학년 아동들의 수와 연산 이해력과 문제해결력을 발달시킬 수 있는 수업을 제공하는 데 그 목적이 있다. 이와 더불어 수업 실시 후, 아동들의 수와 연산 이해력과 문제해결력 향상 정도를 살펴보고, 수업 실시 과정에서 활동 사례가 기록된 학습지를 분석함으로써 수업의 효과를 검증하고자 하였다.

본 수업의 타당성을 검증하기 위한 수업의 효과를 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 연구 집단의 사후 수와 연산 개념 및 원리 이해력과 문제해결력 검사의 평균은 사전 수와 연산 개념 및 원리 이해력과 문제해결력 검사의 평균보다 높았으며, 이들을  $t$ -검증한 결과 유의 수준 .05에서 유의미한 차이를 나타냈다. 따라서 수학화 경험 수업은 수와 연산 개념·원리 이해력과 문제해결력에 있어 긍정적인 효과가 있는 것으로 볼 수 있다.

둘째, 연구 집단의 수와 연산 학습 과정에서 나타나는 수업 사례를 분석한 결과 대부분의 아동들은 알고리즘의 암기에 의해서만 문제를 해결하는 것이 아니라 그림, 선, 설명 등 다양한 방법으로 문제를 해결하는 가운데 수와 연산의 개념과 원리에 대한 이해는 물론 알고리즘을 충분히 이해하고 문제를 해결하는 모습을 보였다. 아동들의 학습지에서 나타나는 문제해결 과정을 분석한 결과 처음에는 수평적 수학화 단계의 사례를 많이 보이다가 점점 수직적 수학화 단계의 사례도 보였고, 응용적 수학화의 가능성도 엿볼 수 있었다. 따라서 수학화 경험 수업은 아동들에게 다양한 수업 단계의 경험을 제공하고 나아가서 아동의 수와 연산 이해력과 문제해결력 향상에 긍정적인 효과를 주었다고 볼 수 있다.

이러한 결과는 질적·양적 연구 결과 RME와 수학화 경험을 강조한 교육을 받은 학생들이 전통적인 교육을 받은 학생들보다 계산 능력과 응용 능력에서 우수하다는 선행 연구 결과(Treffers, 1987; Strefland, 1991)와 수학화 경험 집단이 전통적 학습 집단보다 문제해결력에서 우수하다는 선행 연구 결과(김용성, 2000)를 고려해 볼 때 본 연구가 수학화 경험 연구에 있어서 긍정적인 효과를 가져 온 한 사례가 될 수 있다고 볼 수 있을 것이다.

앞의 선행연구에서 살펴보았듯이 아직까지 수학화와 관련하여 초등학교 수준에서는 연구가 많지 않으며, 이루어진 연구에서도 수업 모형을 구성, 적용한 연구보다는 Freudenthal 연구소에서 제시한 여러 가지 수학 문제를 아동들에게 제시하고 그 결과를 분석한 연구가 대부분이다.

초등학교 5학년을 대상으로 수학화 경험 수업의 단계로 문제상황제시→개별활동→소집단활동→전체토의의 네 단계로 제시하였던 선행연구(김용성, 2000)를 바탕으로, 본 연구의 수업 단계에서는 위의 네 단계를 활동유형으로 제시하고, 문제 상황 분석(직관적 탐구)→도식화 및 규칙화→페턴 찾기(수평적 수학화)→알고리즘화와 형식화(수직적 수학화)→일반화(응용적 수학화)의 네 단계를 새롭게 구성하였다.

각 단계에서는 초등학교 2학년을 대상으로 하는 만큼 높은 수준의 고차원적인 수학화가 아닌, 각각의 수학화에서 강조하는 주요 활동과 내용으로 수업을 구성하였다. 즉, 수평적 수학화의 단계에서는 도식화 및 규칙화

페턴 찾기 활동 위주로, 수직적 수학화에서는 알고리즘을 발견하거나 구성할 수 있는 활동 위주로 구성하였고, 응용적 수학화 단계에서는 실생활과 관련된 다른 여러 가지 문제 상황을 해결하는 활동 위주로 구성하였다. 이러한 다양한 활동을 통해 6주라는 단기간의 연구였지만, 학생들은 수와 연산의 표준적 알고리즘을 이해하기에 앞서서 그림, 선, 표, 도식, 수 가르기, 수 모으기, 말로 설명하기 등 다양한 방법과 사고 과정으로 현실 세계와 관련된 수와 연산 문제를 분석하고 해결하는 모습을 보여주었다.

따라서 초등학교 저학년에서도 수학화 경험 수업을 통해 여러 가지 수학화 단계의 모습을 볼 수 있고, 학생들도 교사의 안내와 동료와의 상호작용과 끊임없는 반성적 사고 과정을 경험하면서 다양한 방법을 통해 수학적 개념과 원리를 발견하고 이해할 수 있는 가능성을 보여주었다는 측면에서 본 연구가 의의를 가진다고 할 수 있을 것이다.

또한 본 연구는 초등학교에서 수학화와 관련한 수업 모형을 구성, 적용해 보았다는 측면에서 앞으로 초등학교에서 이루어지는 수학화와 관련된 다른 연구의 바탕이 될 수 있을 것으로 기대한다.

## 참 고 문 헌

- 교육부(1998). 초등학교 교육과정.  
 권오남, 주미경, 김영신(2003). 오일러 알고리즘의 안내된 재발명-RME 기반 미분 방정식 수업에서 점진적 수학화 과정 분석. 한국수학 교육학회 수학교육 학술지, 42(3), pp.387-402.  
 김용성(2000). 문제상황을 기초로 한 수학화 경험이 수학적 신념과 문제 해결력에 미치는 효과. 한국 교원대학교 석사학위 논문.  
 백경호(2004). 고등학교 확률과 통계 영역에서의 현실적 수학교육의 적용. 한국교원대학교 석사학위 논문.  
 백선수(2002). 초등수학교실에서 알고리즘 지도 방안 탐색. 한국교원대학교 수학교육연구소 청남수학교육, 10, pp.153-171.  
 정영옥(1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

- 정주자(2002). 수학화 이론에 기초한 초등학교 저학년에 서의 덧셈과 뺄셈 지도 방안. 한국교원대학교 수학교육연구소 청남수학교육, 10, pp.91-113.
- 최선아(2002). 실제적 맥락의 문제 상황을 활용한 분수 학습의 효과 검증. 이화여자대학교 교육대학원 석사 학위논문.
- 황혜정 외(2001). 수학교육학신론. 서울: 문음사.
- De Lange, J., & Verhage, H. B. (1987). "Math A and achievement testing". *Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp.243-248.
- Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1-3), pp.111-129. (ERIC Document Reproduction Service No. EJ602429)
- Streetland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research* (ERIC Document Reproduction Service No. ED341566)
- Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A Model of goal and theory description in mathematics-The Wiscobas project* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- van Groenestijn, M. (1997). *Constructive numeracy teaching as a gateway to independent learning*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED436425)
- Wubbels, T., Korthagen, F., & Broekman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 32(1), pp.1-28. (ERIC Document Reproduction Service No. EJ540156)

## **The Analysis of Mathematical Abilities and Mathematization in the Mathematising Experience Instruction for Elementary Students**

**Kim, Yoon-Jin**

Donam Elementary School, Seoul, Korea

Email: gina1015@freechal.com

**Kim, Min Kyeong**

Department of Elementary Education, Ewha Womans University, Seoul, Korea

Email: mkkim@ewha.ac.kr

This study, to effectiv<sup>2</sup>ely teach the concepts, principles and problem solving ability of the 2nd graders' learning of numbers and operations, offers realistic problem situation and focuses on the learning based on 'mathematization', one of the most important principles of RME (Realistic Mathematics Education) which is the mathematics education trend of Netherlands influenced by Freudenthal's theory.

The instruction is applied to forty-one students of the 2nd grader for six weeks in twelve series in an elementary school, located in Seoul. To investigate the effects of the mathematising experience instruction for improving mathematical abilities, the group takes tests before and after the instruction. Also the qualitative analysis on the students' mathematising aspects through students' output at the instruction process is taken into account to evaluate the instruction's effects. The result shows that the mathematising experience instruction for improving mathematical abilities is proved to improve students' understanding of mathematical concepts and principles and their problem solving ability in learning numbers and operations after carrying out this instruction. Also the result indicates that students' mathematising aspects are mostly horizontal and vertical mathematization.

\* ZDM Classification : D42

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

\* Key Word : mathematising experience, analysis of  
mathematization

## &lt;부록&gt; 수와 연산 학습에 관한 요구 조사 질문지 분석 (아동용)

1.(수학 교과에 대한 선호도) 수학 과목을 좋아합니까?				
① 매우 좋아한다.	② 좋아한다.	③ 보통이다.	④ 별로 좋아하지 않는다.	⑤ 전혀 좋아하지 않는다.
26(31.7%)	23(28%)	24(29.3%)	3(3.7%)	6(7.3%)
2.(수학 교과 영역별 선호도) 수학 수업 중 가장 재미있는 내용은 어느 것입니까?				
① 수와 연산	② 도형	③ 측정	④ 확률과 통계	⑤ 문자와 식
28(34.1%)	20(24.4%)	7(8.5%)	0(0%)	9(11%)
⑥ 규칙성과 함수				
18(22%)				
3.(덧셈과 뺄셈의 유용성 인식도) '덧셈과 뺄셈'은 언제 사용하나요?(여러 개 ○ 표시 가능)				
① 수학 수업 시간에만	② 다른 과목 공부할 때 필요	③ 친구들과 이야기 할 때	④ 가게에서 물건 살 때	⑤ 학습지나 문제지의 문제를 풀 때
60(38%)	14(8.9%)	13(8.2%)	40(25.3%)	31(19.6%)
4.(덧셈과 뺄셈 필요성 인식) '덧셈과 뺄셈'은 왜 배운다고 생각하나요?(여러 개 ○ 표시 가능)				
① 시험을 보기 때문에	② 학교에서 수업 시간에 사용하기 때문에	③ 생활을 하는데 편리하기 때문에	④ 쉽게 문제를 풀 수 있기 때문에	
52(23.5%)	50(22.6%)	53(24%)	66(29.9%)	
5.(덧셈과 뺄셈 학습의 흥미도) '덧셈과 뺄셈'을 공부하는 것이 재미있습니까?				
① 매우 재미있다.	② 재미있다.	③ 보통이다.	④ 별로 재미없다.	⑤ 전혀 재미없다.
35(42.7%)	21(25.6%)	11(13.4%)	7(8.5%)	8(9.8%)
6.'덧셈과 뺄셈'을 배우는 것이 재미없다면, 그 이유는 무엇인가?				
① 계산이 복잡하고 어렵다.	② 계산은 할 수 있는데 왜 그렇게 해야 하는지 이유를 잘 모른다.	③ 왜 "덧셈과 뺄셈"을 배워야 하는지 모르겠다.	④ "덧셈과 뺄셈"을 배우는 과정이 지루하고 지겹다.	
5(6.8%)	15(20.5%)	3(4.1%)	4(5.5%)	
7.(덧셈과 뺄셈 학습의 태도) '덧셈과 뺄셈'에 관한 문제를 풀다가 모르는 것이 나오면 어떻게 해결하나요?				
① 조금 생각해보다 모르면 포기한다.	② 옆의 친구에게 물어본다.	③ 선생님께 여쭈어 본다.	④ 집에 가서 부모님의 도움을 받는다.	
9(11%)	7(8.5%)	41(50%)	25(30.5%)	

## &lt;부록&gt; 수와 연산 학습에 관한 요구 조사 질문지 분석 (교사용)

1.초등 수학과 교육이 궁극적인 목적은 무엇이라고 생각하십니까?					
① 문제 해결 능력 개발	② 개념상의 지식 개발	③ 다른 사람들과 작업하며 의사소통하는 능력 개발	④ 추론 능력 개발	⑤ 과정상의 지식 개발	⑥ 긍정적인 태도 개발
41(57.7%)	4(5.6%)	5(7%)	12(16.9%)	9(12.7%)	0(0%)
2.'덧셈과 뺄셈'에 관한 수업을 할 때 가장 강조하여 지도하시는 내용은 무엇입니까?					
① 알고리즘(공식)을 이용해 덧셈과 뺄셈을 능숙하고 정확하게 하기	② 알고리즘(공식)이 나오게 된 원리와 개념 이해하게 하기	③ 실생활과 관련된 문제 해결의 기회를 제공하기	④ 논리적으로 자신의 생각을 표현할 수 있도록 하기	⑤ 공식적 수학기호(+,-,=)의 필요성 이해하게 하기	
1(2.1%)	27(57.4%)	3(6.4%)	12(25.5%)	4(8.5%)	

3. '덧셈과 뺄셈'에 대한 지도 중 가장 어려운 것은 무엇입니까?				
① 덧셈과 뺄셈의 알고리즘(공식)에 대한 지도	② 덧셈과 뺄셈의 개념과 원리의 이해에 대한 지도	③ 덧셈과 뺄셈을 정확하고 능숙하게 하기	④ 덧셈과 뺄셈에 관련된 문제 해결하기	⑤ 공식적 수학기호(+,-,=)의 필요성 이해하게 하기
1(2.1%)	27(57.4%)	3(6.4%)	12(25.5%)	4(8.5%)
4. '덧셈과 뺄셈' 지도 시 주로 사용하는 교수 방법은 무엇입니까?				
① 말로 설명한다.	② T-나라 등의 인터넷을 활용한 시각자료, 그림 자료를 이용한다.	③ 아동들이 직접 손으로 만지고 조작할 수 있는 구체적 자료를 사용한다.	④ 실생활 문제를 제공하여 해결하게 한다.	⑤ 기타
2(4.3%)	9(19.1%)	20(42.6%)	15(31.9%)	1(2.1%)
5. 수와 연산 영역 지도 시 공식적 수학기호인 '+, -, ='과 '0'이라는 개념을 어떻게 지도하고 있습니까?				
① 따로 지도하지 않고 있다.	② 공식적인 수학 기호로 소개하고 있다.	③ 비정식적인 기호를 만들어 보도록 한 후 공식적 수학 기호를 소개하고 있다.	④ 기타	
5(10.6%)	24(51.1%)	18(38.3%)	0(0%)	
6. '반아울림이 있는 덧셈과 뺄셈' 지도에서 가장 강조하고 있는 부분은 무엇입니까?				
① 알고리즘(공식)을 이용해 덧셈과 뺄셈을 능숙, 정확하게 하기	② 알고리즘(공식)이 나오게 된 원리와 개념 이해하게 하기	③ 실생활과 관련된 문제 해결의 기회를 제공하기	④ 논리적으로 자신의 생각을 표현할 수 있도록 하기	
15(31.9%)	22(46.8%)	8(17%)	2(4.3%)	
7. 저학년(1, 2학년)의 덧셈과 뺄셈' 지도 시 가장 어려운 부분은 무엇입니까?				
① 알고리즘(공식)	② 알고리즘(공식)이 나오게 된 원리와 개념 이해에 대한 지도	③ 문제 해결 방법 지도	④ 기타	
1(2.1%)	36(76.6%)	9(19.1%)	1(2.1%)	
8. 저학년(1, 2학년) 수준에서 수학자들이 경험하는 것과 같은 수학기호를 재발명하고 수학적 원리를 탐구해 보는 것이 가능하다고 생각하십니까?				
① 가능하지 않다.	② 어느 정도는 가능하다.	③ 충분히 가능하다.		
9(19.1%)	34(72.3%)	4(8.5%)		
9. 저학년 수준에서 수학자들이 경험하는 것과 같은 수학기호를 재발명하고 수학적 원리를 탐구해 보는 것이 가능하지 않다면 그 이유는 무엇이라고 생각하십니까?				
① 아직 저학년 단계의 아동들은 수학적 원리를 이해할 만큼 사고과정이 발달되지 못했다.	② 저학년 단계의 아동들에게는 원리탐구보다는 계산을 능숙하고 정확하게 하는 능력이 더욱 필요하다.	③ 기타 (학급 내 아동들의 수준 차, 교사의 지도력 미흡)		
7(77.8%)	1(11.1%)	1(11.1%)		
10. 저학년(1, 2학년)의 수와 연산 영역 학습에서 가장 강조되어야 할 것은 무엇이라고 생각하십니까?				
① 알고리즘(공식)을 통한 계산능력 향상	② 실생활과 관련된 문제해결능력 향상	③ 수학적 원리의 이해	④ 기타	
7(14.9%)	22(46.8%)	18(38.3%)	0(0%)	
11. '개념과 원리의 이해에 바탕을 둔 덧셈과 뺄셈' 학습을 위해 개선되어야 할 점은 무엇이라고 생각하십니까? (있는 대로 표시해 주세요.)				
① "덧셈과 뺄셈" 학습에 필요한 교사 연수 제공	② "덧셈과 뺄셈 학습을 위한 교수 자료	③ "덧셈과 뺄셈" 학습 프로그램 개발	④ 기타	
6(11.1%)	26(48.1%)	20(37%)	2(3.7%)	

<첨부자료-프로그램 차시안과 활동지>				
프로그램 차시안	2/12 차시	주제	수: 6-12 익: 5-10	
		목표		
강조하는 수학화 단계와 내용	· 수평적 수학화 - 규칙과 패턴 찾기			
단계	활동 유형	내용		
문제 상황 분석 (직관적 탐구)	문제 상황 제시 및 개별 활동	<p>문제 상황: 뚜비 마을에서는 돈이 10원짜리 한 종류 밖에 없습니다. 물건을 살 때도, 버스를 탈 때도 10원짜리로만 낼 수 있습니다. 우리가 이 마을을 방문했을 때 어떤 일이 일어날까요?</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>◎ 동기유발 및 생각열기           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 동기유발로 “이 병에 들어있는 사탕은 모두 몇 개일까요?”라는 문제를 통해 아동들이 어림짐작으로 병에 들어있는 사탕의 수를 예상해 보게 한다.</li> </ul> </li> <li>◎ 수학적 문제 상황 제시 및 문제 상황 분석           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 문제 상황을 제시하고 이에 대한 자신의 생각을 자세하게 적고 이를 발표해 보게 한다.</li> </ul> </li> </ul>		
도식화 및 규칙과 패턴 찾기 (수평적 수학화)	전체 토의 및 소집단 토의	<ul style="list-style-type: none"> <li>◎ 백, 몇 백의 개념과 필요성 이해하기           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 뚜비 마을의 문제 상황에 대한 토의를 통해 백의 자리의 개념과 필요성을 이해하고 나아가 현실에서 쓰이는 돈의 단위인 천, 만 단위의 필요성까지 생각해 보게 한다.</li> </ul> </li> <li>◎ 도식화 및 규칙과 패턴 찾기           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 자신이 찾은 문제 상황의 수학적 측면(백, 몇 백의 필요성)을 도식화하고 세 자리 수의 계열에서 규칙과 패턴을 찾아본다.</li> </ul> </li> </ul>		
알고리즘화와 형식화 (수직적 수학화)	개별 활동	<ul style="list-style-type: none"> <li>◎ 알고리즘화와 형식화           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 세 자리 수의 개념과 계열을 이해하고 읽고 써본다.</li> <li>- 모형 동전을 세어보는 활동을 통해 세 자리 수의 자리 값과 계열을 이해하고 세 자리 수를 읽고 써보는 활동을 한다.</li> </ul> </li> </ul>		
일반화 (응용적 수학화)	전체토의를 통한 반성적 사고	<ul style="list-style-type: none"> <li>◎ 일반화           <ul style="list-style-type: none"> <li>- 실제 우리 생활에서 세 자리 수가 쓰이는 경우를 찾아서 발표해 보게 한다.</li> </ul> </li> </ul>		

2차시 학습지	세 자리 수를 알아보아요!	수: 6-12, 익: 5-10
	◎ 문제를 잘 읽어보고 자신의 생각을 자세하게 써 보세요.	
<p>◎ 뚜비 마을에서는 돈이 10원짜리 한 종류 밖에 없습니다. 물건을 살 때도, 버스를 탈 때도 10원짜리로만 낼 수 있습니다. 우리가 이 마을을 방문했을 때 어떤 일이 일어날까요?</p> <p>◎ 우리 주변에서 볼 수 있는 세 자리 수에는 어떤 것이 있나요? 자세하게 써 보세요.</p>		