韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2006. 8. 제 45권, 제 3호, 263-273.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2006, Vol. 45, No. 3, 263-273.

직관의 즉각성 요인과 효과에 대한 고찰

이 대 현 (광주교육대학교)

Ⅰ. 서 론

어떤 판단의 상황에서 사람들은 주어진 자료와 조건을 주도면밀하게 분석하고 종합하여 신중한 결정을 하기도 하고, 직관적인 판단에 따라 즉각적으로 결정을 하기도 한다. 일상생활에서 나타나는 이러한 현상은 수학 학습이나 수학적 문제를 해결하는 상황에서도 유사하게 나타난다.

상이한 두 사고 과정의 접근 방법에도 불구하고, 학교 수학은 주로 체계적인 사고 과정을 통해 점진적으로 교육 목표에 이르게 하는 논리적인 방법을 주로 강조해 왔다. 그러나 수학교육의 시대적 흐름은 논리적인 접근 방법과 더불어 직관적인 방법에 의한 학습과 문제해결을 강조하고 있다.

Poincaré(1905)는 수학에서 직관 없이는 진정한 창의적인 활동이 불가능하며, 직관은 논리적으로 타당한 길을 선택하는 힘을 부여한다고 보았다. 또한 Pestalozzi도 직관이 인식의 절대적인 기초임을 역설하면서, 직관에 호소하는 교육 방법이 지적 영역뿐 아니라, 신체적·도덕적 영역에도 확장되어야 한다고 주장하였다(김정환, 1974).

직관은 수학 학습이나 문제를 해결하는 상황에서 즉각적인 판단에 의존한다는 면에서 '즉각성(immediacy)'이라는 특징을 가지고 있다. 직관의 즉각성은 시각화를 통한 수학적 개념이나 수학적 사실의 이해와 같이 수학 학습 과정에서 학습 내용에 대한 즉각적인 이해가 가능하도록 해 준다. 또한 직관의 즉각성은 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제의 조건이나 구조에 대한 통찰을 바탕으로 즉각적인 판단과 해결에 이르게 한다.

예를 들어, Gauss가 초등학교 시절에 1부터 100까지의 자연수 합을 순식간에 해결해 내었던 일화는 즉각적인 판단으로 해결책에 도달하는 즉각성의 효과를 볼 수 있다. 마찬가지로 학생들이 수학적 문제를 해결할 때에도 문제에 대한 즉각적인 판단이 이루어진다.

이러한 판단은 옳은 해를 산출하도록 이끌기도 하지만, 때로는 잘못된 판단의 결과를 초래하기도 한다. 다시 말해 즉각성은 문제해결에 유용한 결과를 줌과 동시에 잘못된 판단으로 인해 실수를 허용하기도 한다. 따라서 많은 연구가들은 수학을 발견하거나 이해하고 문제를 해결할 때 즉각적으로 판단을 이끄는 직관과 체계적이고 합리적인 판단을 이끄는 논리의 상보성을 강조하고 있는 것이다((Bruner, 1960, 1979; Poincaré,1905; Wittmann, 1981).

한편 수학 문제해결에서 직관에 의한 즉각적 판단과 처리에 의한 문제해결의 중요성에도 불구하고 수학 문제해결에 관한 연구는 주로 논리적이고 체계적인 사고 과정의 분석 및 발견술, 전략, 메타인지의 훈련 등과 같은 측면의 연구에 집중되어 왔다. 따라서 보통의 인간이면 누구나 소유하고 있는 직관에 의한 즉각적인 판단에 의한 수학적 문제해결에 대해서도 연구가 필요하다. 이것은 수학적 문제해결 영역뿐만이 아니라 수학적 개념, 원리, 법칙의 학습 과정에서도 새로운 접근 방법을 제시해 줄 것이다.

수학 학습과 수학적 문제해결에서 직관의 즉각성의 중요성에 비추어 본 논문은 직관의 즉각성이 수학 학습과 수학적 문제해결에서 작용하는 효과를 이해하기 위한 이론적 고찰을 시도한다. 즉 직관의 즉각성이 수학 학습과 문제해결에서 중요한 역할을 한다는 것을 고려하여, 수학 교수-학습에서 즉각성의 요인과 효과에 대한 이론적 고찰을 하고자 한다. 이것은 추후에 수학 교수-학습

* 2006년 4월 투고, 2006년 7월 심사 완료.
* ZDM분류 : C30
* MSC분류 : 97C30
* 주제어 : 즉각성, 시각화, 기능적 고착화, 대표성, 수학 문제해결

상황에서 즉각적인 판단에 의한 수학 학습이나 문제해결의 상황을 분석하고 해석하는 근거를 제시할 것이다. 이를 위해 즉각성의 요인을 추출·파악하고, 즉각성이 수학 교수-학습 상황에서 끼치는 영향을 선행 연구 자료를 중심으로 긍정적인 면과 부정적인 면으로 나누어 살펴보고, 이에 대한 수학교수학적 시사점을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 즉각성의 요인

Fischbein(1987)은 즉각성의 요인으로 시각화(visualization), 이용가능성(availability), 고정성(anchoring), 대표성(representativeness)을 들고 있다. 특히, 이용가능성(availability), 고정성(anchoring), 대표성(representativeness)은 주로 Tversky와 Kahneman이 그들의 논문에서 확률 상황과 관련하여 제시한 예를 근거로 하여 즉각성의 요인으로 제시되고 있다.

이용가능성은 어떤 판단의 상황에서 객관적인 표본에 의하기보다 개인의 경험에서 어떤 통제되지 않은 표본에 의한 판단에 기초한다는 것이다. 예를 들면 피험자들은 영어 알파벳 r이 단어의 첫 번째와 세 번째 중 어느 경우에 더 자주 나타날 것인가를 물었을 때, 선택된 5개의 문자에서 첫 번째보다 세 번째에 더 많이 나타났음에도 불구하고 피험자들은 반대로 답을 하였다. 이러한 결과는 특정 문자로 시작되는 문자를 발견하기가 더 쉽다는 판단에 의한 것이고, 직관에 의한 즉각적인 판단인 것이다.

고정성은 시간의 제약 하에 8×7×6×5×4×3×2×1과 1×2×3×4×5×6×7×8의 값을 결정하도록 하였을 때, 피험자들은 전자를 2250으로 답한 반면, 후자를 512로 답하였다(정답은 40320). 이 예에서 알 수 있듯이 직관적인 판단의 상황에서 피험자는 특별히 두드러진 요소에 의해 판단을 하고 있음을 알 수 있다.

Fischbein(1987)이 제시하고 있는 즉각성의 요인으로 이용가능성과 고정성은 어떤 통제되지 않은 개인의 경험에 의한 왜곡된 표본에 의하거나, 어떤 두드러진 특징을 지닌 요소에 의해 즉각적으로 판단이 이루어진다는 면에서 제시되고 있다. 이 글에서는 이 두 가지 요인을 묶어 기능적 고착화로 표현한다. 따라서 수학학습과 관련하여 직관에 의해 즉각적인 판단을 이끄는 즉각성의 요인으로는 시각화, 기능적 고착화, 대표성을 들기로 한다. 이 장에서는 수학교육에서 이들 3요소에 대한 교수학적 의의와 함의점에 대해 알아보기로 한다.

1. 시각화

시각화는 즉각성에 기여하는 주요 요인으로, 시각화는 수학적 사실의 즉각적인 이해에 도움을 준다. 이것은 시각화가 공간적이고 유한적인 구조를 선호하는 인간의 정신적 특성과 잘 부합하기 때문이다. 수학에서 시각화의 역할과 중요성에 대해서는 많은 역사적 사실을 들 수 있다. 형식주의자인 Hilbert도 그의 책 '기하학과 영상(Geometry and Imagination)'의 서문에서 시각화에 의한 즉각적인 이해의 중요성을 역설하며 다음과 같이 쓰고 있다.

> 수학에서 우리는 두 가지 경향을 발견한다. 하나는 미궁 속에 있는 연구 중인 대상에서 고유의 논리적 관계를 구체화하기 위해 시도하는 추상화로의 경향이고, 다른 하나는 연구 중인 대상의 직접적인 이해나 그들 관계의 구체적인 의미를 강조하는, 생생한 관계를 촉진하는 직관적인 이해로의 경향이다. (중략) 우리는 시각적인 영상의 도움으로 다양체의 사실과 기하학의 문제, 그리고 그 이상의 것들을 설명할 수 있다. 이것은 탐구와 증명 방법의 기하학적 윤곽을 묘사하는 많은 경우에 가능하다(Zimmermann & Cunningham, 1991, p. 1에서 재인용).

이러한 Hilbert의 견해는 수학적 사실의 시각화가 수학학습에서 중요함을 암시한다. 한편, 수학에서 시각화는 컴퓨터의 발달과 더불어 그 중요성이 더욱 강조되고 있다. 전통적인 지필 위주의 교수-학습 상황에서는 수학적 사실을 역동적으로 표현할 수 없었다. 그러나 컴퓨터를 이용한 시각화 환경에서는 역동적인 변화를 관찰하면서 불변의 수학적 성질을 학생 스스로 발견해 내도록 할 수 있다.

수학 교수-학습에서 시각화는 수학의 개념·원리·법칙의 즉각적인 이해와 문제해결 과정에서 즉각적인 해결책을 발견하도록 이끄는 것과 같은 장점을 가지고 있다. 먼저, 수학 교수-학습에서 시각화는 수학의 개념·원리·법칙에 대한 즉각적인 이해에 기여한다. 수학의 많은 사실과 정리들은 시각화가 가능하며, 시각화된 수학의 개념·원리·법칙은 수학 교수-학습에서 수학적 사실의

즉각적인 이해에 도움이 된다.

즉 시각화는 수학적 개념·원리·법칙에 대한 직관적 인지의 즉각성과 자명성을 창안해 내는 필수적인 요소이다. 이것은 시각화된 표상이 그 자체의 이미지에 의해 즉각적인 이해에 도움을 주는 매개체임을 의미한다.

또한 시각화는 수학 문제해결 과정에서 문제에 주어진 자료와 조건을 시각적으로 표현함으로써, 문제를 즉각적으로 이해하고 해결하는데 유용한 전략이 될 수 있다. 이것은 Polya(1957)가 문제해결 과정에서 중요한 권고로 제시하고 있는 '그림을 그려라'와 같은 맥락을 취한다고 볼 수 있다. 이와 관련하여, 확률론을 발달시킨 '분배 문제'는 수학 문제해결에서 원래의 개념에만 의존하지 않고, 문제해결에서 시각화를 이용하여 쉽고 즉각적으로 이해할 수 있는 좋은 예시가 된다.

시각화의 장점에도 불구하고 시각화된 표현이 그 자체로서 즉각적으로 이해 가능한 지식만은 아니다. 시각화는 즉각성에서 중요한 요인이지만, 즉각적으로 이해 가능한 지식을 생산하기 위한 충분조건은 아니다(Fischbein, 1987). 예를 들면 시각적으로 표현된 전자모형에 대한 개념적인 이해 없이 시각적으로 표현된 전자모형만으로는 모형이 어떻게 활동하는지에 대한 깊고 직접적인 이해를 얻을 수 없다.

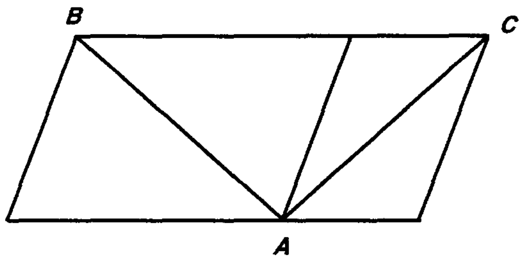
또한 시각화는 시각화 자체가 안고 있는 한계와 그 한계에 대한 이해 없이 즉각적인 판단으로 인해 문제해결 과정에서 오류를 야기할 수도 있다. 시각적 판단에 의한 착시 현상은 시각화에 의한 오류 가능성에 대한 예시로 적절하다.

착시는 시각적 한계에도 불구하고 시각적으로 인식되는 대상에 대한 즉각적인 판단에 의하며, 습득된 시각적 정보를 지나치게 과신하기 때문에 나타난다.

<그림 II-1> 수평선과 수직선의 착시

<그림 II-1>에서 왼쪽 그림은 길이가 같은 두 직선 중 수직선이 수평선보다 길게 보이는 반면에 오른쪽 그림은 폭이 더 길지만 높이와 폭이 같아 보인다(Kline, 1985).

이러한 착시는 각의 크기에 의한 예에서도 찾을 수 있다. <그림 II-2>에서 두 평행사변형의 각각의 대각선의 길이 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$는 같지만, 오른쪽 대각선이 훨씬 짧게 보임을 알 수 있다(Kline, 1985).



<그림 II-2> 대각선 길이의 착시

위에서 제시한 착시는 도형에 대한 체계적인 분석이 이루어지지 않는 한 여전히 남아있게 된다. 그럼에도 불구하고 인간은 시각적으로 인식되어지는 사실을 즉각적으로 믿는 경향이 있다.

이러한 사실을 상기할 때, 즉각적인 이해에 도움을 주는 시각화라 할지라도 수학적 사실의 시각화는 시각화하는 도구에 대한 규약이나 개념적 이해와 수학적 사실이 가지고 있는 순수한 개념적 이해가 동시에 추구되어야 한다.

2. 기능적 고착화

형태심리학자들에게 문제해결이란 문제 상황의 한 국면을 다른 국면에 관련시키기 위한 탐색을 의미하며, 이것은 '구조적 이해'로 귀착된다(김언주, 1991). 그들은 '통찰'이나 '구조적 이해'와 같은 명확하게 정의되지 않은 용어를 사용했지만, 고차원적이고 창의적인 정신적 과정을 설명하였다.

문제해결과 관련하여 형태심리학자들의 주요 공헌 중의 하나는 문제해결에서의 '기능적 고착화(functional fixedness)' 현상을 제시한 것이다. 이것은 과거의 습관이나 경험이 새로운 문제를 해결하는데 부정적인 영향을

미칠 수 있다는 것으로 Dunker에 의한 기능적 고착화(functional fixedness), Luchins에 의한 문제해결 태세(problem solving set), Bartlett에 의한 부정적 전이(negative transfer) 등으로 불리어져 왔다(김언주, 1991).

Dunker는 대상의 새로운 이용법을 방해하는 정신적 장애로 기능적 고착화를 정의하였다. 그는 여러 물건들의 기능이 이전에 사용하던 한 가지 기능으로 고착화 되는 것을 실험으로 입증하였다. Luchins는 과거의 습관적 태도가 문제에 대한 맹목적 태도를 유발하며, 과거에 사용했던 방법을 새로운 상황에 기계적으로 적용하도록 한다고 제시하고 있다. Bartlett도 'DONALD+GERALD=ROBERT'에서 D=5이고 각 문자가 0~9까지의 상이한 수를 가질 때 각 문자에 부여된 숫자를 결정하라는 문제에서, 피험자들은 오른쪽에서 왼쪽으로 진행하는 사칙연산에 대한 경험으로 인해 두 번째 L과 R에 대한 정보를 찾으려고 애쓰다가 실패한다는 것을 목격하였다고 한다(김언주, 1991). 물론 사전의 모든 경험들이 문제해결에 방해가 되는 것은 아니다. 그럼에도 불구하고 개인이 지나치게 과거에 얽매이게 되면 창의적인 사고가 불가능하며 과거 경험이 장애로 작용할 수 있다는 것은 당연하다.

실제로 사람들은 그들이 알고 있는 것이 옳다는 것을 과신하는 경향이 있으며(Fischhoff, Slovic & Lichtenstein, 1977), 기능적 고착화에 의한 판단을 당연한 것으로 여긴다는 것은 흥미 있는 사실이다. 사람들은 객관적인 분석에 의하기보다 어떤 통제되지 않은 특이한 특징에 의해 판단하는 것을 당연하게 생각한다. 다른 말로 하면, 사람들은 어떤 판단의 상황에서 자신의 사고안에 형성되어 있는 독특한 범주 안에 있는 판단의 근거를 우선시하여 주어진 조건을 해석하는 경향이 있다. 이러한 판단은 수학 학습이나 문제해결 과정에서 즉각적인 판단을 이끄는 메카니즘을 형성한다. 이 경우에 선택을 결정하는 것은 객관적인 자료보다 몇 개의 주관적인 요인에 의한 것이다. 이런 면에서 기능적 고착화에 의한 즉각성은 객관적인 자료보다 더 강한 요인이다.

수학교육에서 기능적 고착화 현상은 이전 학습의 결과에 의해서도 나타난다. 즉 기능적 고착화 현상은 Brousseau(1997)에 의한 인식론적 장애 중 교수학적 원인에 의한 장애와 관련 있다. 일반적으로 "경험론자나 행동주의자의 이론에서 생각하듯이, 무지, 불확실성, 운의 결과가 아니라, 흥미롭고 성공적인 이전의 지식의 결과이며, 이제는 틀린 것이나 단지 부적합한 것으로 밝혀진 것(Brousseau, 1997, p. 82)"을 '오류'라고 하고, 이런 유형의 오류들은 예측 가능하며 '장애'를 구성한다고 한다.

Brousseau(1997)는 인식론적 장애 관념은 여러 가지 경우에 인식 주체의 발달 상황, 교수의 문제, 지식의 내재적인 어려움 등과 관련이 있으며, 이에 따라 장애의 원인을 개체 발생적 기원을 갖는 것, 교수학적 기원을 갖는 것, 인식론적 장애를 가진 것으로 들고 있다. 이 중에서 교수학적 기원에 의한 인식론적 장애는 '교수 체계 내에서의 어떤 선택이나 계획에 의한 장애'를 의미한다. 예를 들어 자연수에서의 연산에 대한 경험은 유리수에서 곱셈에 의해 결과가 감소될 수 있다거나 나눗셈에 의해 결과가 증가될 수 있다는 사실을 받아들이기 어렵게 한다. 이런 문제를 해결할 때 학생들은 이전의 교수학적 경험에 의한 즉각적인 판단으로 요구된 조작을 추측하고 해석한다. 결과적으로 이전의 교수학적 경험으로 인해 형성된 기능적 고착화 현상이 이와 유사한 기능이 요구되는 상황에 영향을 주는 것이다.

학생들은 수학 학습이나 수학적 문제해결의 상황에서 기능적 고착화에 의해 즉각적으로 판단을 하게 된다. 선택이 자동적이기 때문에 학생들은 정보의 중요한 부분을 이용하지 않을 뿐만 아니라, 과거의 경험에 우선적인 조건을 무조건적으로 수용한다. 이러한 결과는 과거의 경험에 의한 과신에 의한 것이다.

과거 경험이 이후의 수학 학습이나 문제해결에 부정적인 영향을 주는 기능적 고착화 현상과는 달리, 과거의 경험이 새로운 상황에서 요구되는 기능과 유사하다면 새로운 내용의 학습이나 문제의 해결에 도움이 된다는 기능적 고착화 현상의 유용성도 고려할 수 있다.

이와 관련하여 Polya(1957)는 문제해결 4단계에서 문제를 해결하기 위한 계획을 세울 때 관련된 문제를 발견하는 것이 중요하다고 언급하고 있다. 그는 문제해결을 위한 계획 수립의 과정에서 미지의 것이나 결과가 같거나 유사한 문제를 생각해 보기, 관련된 문제의 풀이방법과 결과를 활용하기, 유사한 문제 등 관련 문제 풀어보기 등을 사고의 전략으로 제시하고 있다. 이런 면에서 Polya의 문제해결 활동은 경험에 따른 판단이 요구되는 발명의 활동이며, 귀납적인 발견의 논리를 중시한다고

볼 수 있다.

이와 같이 학생들이 가지고 있는 경험은 그 활용 방법에 따라 다른 결과를 초래할 수 있다. 따라서 수학 교수-학습에서는 자신의 사고 과정을 반성의 대상으로 하는 메타인지 활동이 요구된다. 즉 새로운 내용을 이해하고 문제를 해결하기 위한 지식이나 전략 이외에도 자신의 사고 과정을 인지하고 조절하고 통제하는 메타인지 능력이 필요한 것이다.

3. 대표성

대표성은 확률적 판단과 관련 있다. 확률적 판단의 상황에서 학생들은 자신이 가지고 있는 확률에 대한 막연한 원시적 확률 직관을 근거로 판단하는 경향이 있다. 확률적 판단에서 원시적 확률 직관은 즉각적인 판단이 이루어지도록 유도하며, 원시적 확률 직관의 중요한 특징의 하나로 대표성을 들 수 있다.

대표성은 확률분포가 임의 할당에 대한 고정 관념에 의해 객관적인 자료보다 주관적인 판단에 우선하는 특징으로, 표본이 모집단과 유사해야 하며 표본이 작은 경우에도 그 추출과정에 대표성이 반영되기를 기대하는 것이다. 예를 들면 한 연구(Kahneman & Tversky; Fischbein, 1987 재인용)에서는 20개의 구슬을 다섯 명의 아이들에게 임의로 나누어 주었을 때 각 아이들이 가질 구슬 수의 분포에 대하여 물었다. 그 결과 피 실험자의 52명중 36명이 4, 4, 4, 4, 4인 것 보다 4, 4, 5, 4, 3일 가능성이 더 높다고 판단하였다.

이 연구에서 나타난 학생들의 반응 결과는 4, 4, 5, 4, 3이 객관적으로 다른 분포보다 좀 더 임의 할당에 대표적으로 여겨진다는 것을 의미한다. 반면에 4, 4, 4, 4, 4는 너무 규칙적이어서 임의 과정의 결과가 되지 않을 것으로 판단하기 때문이다.

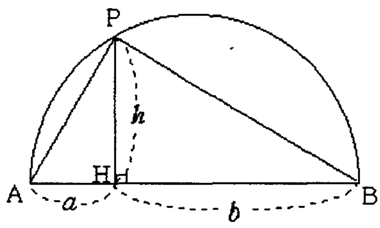
이와 같이 확률적 판단의 상황에서 대표성에 근거하여 즉각적인 판단을 한 것은 인간의 오랜 경험에 의한 원시적 확률 직관으로 견고히 형성되어 쉽게 교정되기가 어렵다. 따라서 확률적 지식이 주관적 직관과 어떻게 다른가를 인식시키기 위하여 학문적 지식과 이론적 지식의 차이를 제기하고, 그 사이의 간격을 줄이려는 의식적인 노력이 요구된다

Ⅲ. 수학 학습에서 즉각성의 효과

수학 학습이나 수학적 문제해결 과정에서 즉각성은 주어진 상황에 따른 즉각적인 판단으로 인해 수학적 사실을 쉽게 인식하게 하거나 수학적 문제의 해결책을 발견하게 하기도 하고, 반대로 수학적 사실의 인식에 어려움을 주거나 문제풀이 과정에 오류를 일으키게 하기도 한다. 이 경우에 형식 교육은 학생들의 즉각적인 직관적 해석에 거의 영향을 주지 않는다. 이 장에서는 즉각성의 3가지 요인이 수학 학습에 끼치는 영향을 학교 수학 내용과 선행연구에서 밝힌 자료를 중심으로 긍정적인 측면과 부정적인 측면으로 알아보고, 이에 대한 수학 교수학적 시사점을 추출한다.

1. 시각화

시각화는 수학적 사실의 인식이나 수학적 문제해결 과정에서 즉각적인 판단에 이르도록 이끌어 주는 즉각성에 기여하는 주요 요인이다. 먼저, 수학 교수-학습에서 시각화는 수학의 개념·원리·법칙에 대한 즉각적인 이해에 기여한다. 수학의 많은 정리들은 시각화가 가능하며, 시각화된 수학의 개념·원리·법칙은 수학 교수-학습에서 수학적 사실의 즉각적인 이해에 도움이 된다.



<그림 Ⅲ-1> 산술 평균과 기하 평균과의 관계 (Nelsen, 1993)

예를 들면, 고등학교 수학에서 다루어지는 산술 평균과 기하 평균의 대소 관계($a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$)에 대한 증명(Nelsen, 1993)은 <그림 Ⅲ-1>과 같은 시각화에 의해 쉽게 이해시킬 수 있다.

한편 제시된 문제 상황의 시각화는 문제에 대한 이해를 쉽게 해 줄 뿐만 아니라, 문제 해결의 실마리를 즉각적으로 제공하기도 한다. 이런 면에서 시각화는 문제 해결에서 유용한 수단이며, 문제에 대한 즉각적인 이해에 도움을 준다.

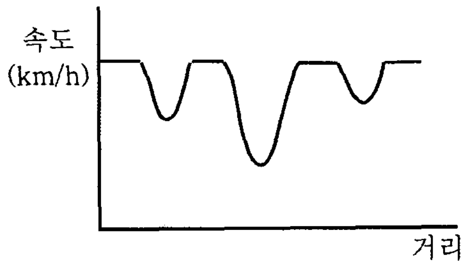
예를 들면 다음과 같은 문제를 해결하는 가상의 수학 교실을 생각해 보자. '점 A(-3, 0)과 B(3, 0)에 대하여 $\overline{AP}:\overline{PB}$=2:1을 만족하는 점 P의 자취를 구하여라.' 이 문제는 '아폴로니우스(Apollonius)의 원'이라고 불리는 원의 자취를 구하는 문제로, 구하고자 하는 점의 자취를 P(x, y)라 놓고 두 점 사이의 거리와 비례식의 관계를 이용하여 대수식의 조작을 통해 해결할 수 있다. 그러나 그 결과로 제시되는 식인 $(x-5)^2+y^2=16$에서 지름의 양 끝점이 점 A(-3, 0)과 B(3, 0)을 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점이 된다는 것을 인식하기란 쉽지 않다. 그렇지만 대수식을 이용하지 않고 좌표평면 상에 두 점 A와 B를 표시하고, 두 점을 2:1로 나누는 점들을 표시해 보는 시각화를 이용하면 $(x-5)^2+y^2=16$을 쉽게 발견할 수 있으며, 점 P의 자취의 의미에 대해서도 명확히 이해할 수 있다는 이점이 있다.

그러나 시각화에 의한 즉각성이 수학적 개념의 이해에 어려움을 주거나 문제해결 과정에서도 오류를 일으키게 하는 원인이 될 수 있음을 알아야 한다. 즉 수학적 사실을 시각화하는 도구에 대한 규약이나 개념적 이해가 없으면 오히려 수학적 사실의 이해 과정이나 수학 문제 해결 과정에서 혼란이 야기될 수도 있다. 이러한 예는 중등학교 수학에서 종종 발견할 수 있다.

예를 들면 반점으로서 점을 나타내거나, 띠로서 선을 나타내는 수학 학습은 점과 선에 대한 즉각적인 이해에는 유익하지만, 이후에 '선분의 길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응이다'라는 사실을 받아들이는데 어렵게 한다. 점이 실제적인 물리적 반점이라면 길이가 긴 선분이 더 많은 점을 갖고 있게 되지만, 점의 개념은 실제적으로 크기가 없는 0차원 대상이기 때문에 길이가 다른 두 선분 위의 점들은 일대일 대응하는 것이다.

다른 예로는 벤다이어그램을 들 수 있다. 부분집합을 이해시키기 위하여 이용하는 벤다이어그램은 부분집합에 대한 의미를 즉각적으로 이해하게 하는데 유용한 도구이지만, 'A가 B를 포함한다'에서 'A=B'라는 의미도 내포하고 있다는 사실을 받아들이기 어렵게 한다.

한편 Janvier(1981)는 자동차 경주 트랙의 출발점을 출발한 자동차가 트랙을 2바퀴째 달리는 상황을 아래 <그림 Ⅲ-2>와 같이 속도와 거리의 관계로 주어진 그래프로 표현하고, 이 자동차가 달리는 트랙에는 몇 개의 굽은 곳이 있는가를 물어 보았다.

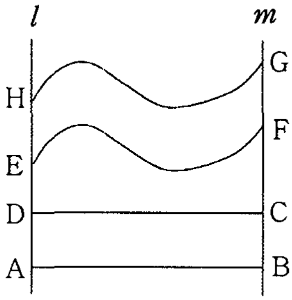


<그림 Ⅲ-2> 속도와 거리와의 그래프

이 문제에서, 아동들은 주어진 문제에 옳게 답하기 위하여 시각적으로 표현된 그래프의 규약을 이해해야만 하는데, 연구 대상인 11-15세의 아이들은 주어진 그래프와 실제 트랙을 혼동하여 굽은 곳의 개수가 6, 8, 9라고 답하였다.

마찬가지로 도형이 주는 직관적인 이미지 때문에 도형이 가지는 개개의 특성에 대한 체계적인 분석 없이 전체적인 특성에 의해 즉각적으로 판단함으로써 수학 문제 해결에서 오류를 일으키기도 한다.

예를 들면, 다음 <그림 Ⅲ-3>과 같이 서로 평행인 두 직선 l, m에 대하여 $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$이고, $\overline{AB}$와 $\overline{CD}$ 사이의 거리와 곡선 EF와 HG사이의 거리가 같을 때, 두 영역의 넓이를 비교하라고 하면, 학생들은 EFGH의 넓이가 ABCD의 넓이보다 넓다고 대답한다. 이것은 정적분을 배운 학생조차도 두 도형의 폭은 같으나 곡선으로 구성된 영역의 길이가 더 길기 때문에 넓이가 클 것이라고 판단하는 것이다(이대현, 2001; Fischbein, 1987, p. 116).



<그림 III-3> 폭과 길이가 같은 두 도형

시각화는 즉각성 창안의 중요한 요인이며, 수학 학습에서 긍정적인 영향을 주기도 하고 부정적인 영향을 주기도 한다. 따라서 수학교육은 시각화가 가능한 모든 수학적 개념, 원리, 법칙에 대한 시각화 도구의 개발에 노력을 기울여야 할 것이며, 수학적 개념, 원리, 법칙의 형식적 증명에 앞서 시각화에 의한 직관적 이해를 통해 이들에 대한 명확하고 생생한 이해를 돕도록 이끌어 주어야 할 것이다. 이러한 노력은 대수적 언어 체계에만 의존하는 것보다 시각적 언어 체계와의 상보적인 역할의 효과를 최대한 이용할 수 있는 수학교육의 가능성을 열어 두는 장점이 있다. Skemp(1986)도 우리가 현재 수학교육에서 이용하고 있는 방법보다 더욱 유리하고 효과적으로 사용할 수 있는 시각적으로 제시된 논증의 예를 통하여 언어적으로 표현된 수학적 사실을 더욱 명확하고 생생하게 전달할 수 있음을 강조하고 있다.

또한 시각화에 의한 오류 발생의 가능성에 대해서도 인지하고 교정하도록 노력해야 한다. 시각화에 의해 즉각적으로 야기된 오류는 시각화가 가지고 있는 규약 체계나 논리적 근거를 바탕으로 교정해야만 한다. 즉 학생들은 시각화에 의한 즉각적인 판단이 오류를 일으킬 수 있음을 인식하고, 시각적 도구에 대한 규약이나 의미를 명확히 파악하고 이용하여야 한다.

2. 기능적 고착화

기능적 고착화에 의한 수학 학습이나 수학적 문제해결의 유용성은 과거의 수학 학습이나 문제해결에 대한 경험이 유사한 수학적 상황에 유용한 단서를 제공한다는 것이다. 이것은 Polya(1957)가 제시한 문제해결의 계획을 세울 때 관련된 문제를 발견하는 것이 중요하다고 언급하고 있는 내용과 맥을 같이 한다.

예를 들면 사면체의 무게중심을 알아보려고 할 때, 사면체는 삼각형과 유사하기 때문에 삼각형의 무게중심을 찾는 원리를 이용하는 유추적 사고를 할 수 있다. 삼각형의 무게중심은 한 변과 평행하게 얇게 잘랐을 때 각 조각의 무게중심은 그 중심이므로 세 중선의 교점이 될 수밖에 없다. 마찬가지로 사면체를 한 면에 평행하게 얇게 잘랐다면 생기는 모든 삼각형의 무게중심은 한 모서리의 중점과 그 모서리가 마주보는 모서리로 이루어진 삼각형 면 위에 있게 된다. 사면체에는 그러한 삼각형의 면이 6개 있으며 각각은 모두 사면체의 무게중심을 포함한다. 따라서 사면체의 무게중심은 그러한 6개의 삼각형의 면의 교점이 될 수밖에 없게 된다(우정호, 1998).

마찬가지로 Descartes가 모든 유형의 문제해결에 적용하고자 했던 '방정식 풀이 패턴'은 방정식을 세워 문장제를 푸는 일반적인 경우에 적용 가능하다. 이 방법은 비록 모든 경우의 문제에 적용되지는 않지만, 다양한 방정식 유형의 문제에 적용되며, 초기에 방정식을 세워 문제를 해결한 경험은 이후의 다양한 형태의 방정식으로 표현되는 문장제에 같은 원리로 적용 가능하게 된다. 이와 같이 문제해결에 필요한 Descartes방법의 이면에 있는 아이디어는 일차방정식에서 분수방정식에 이르기까지 이전의 문제해결 경험이 이후에도 같은 원리로 유사하게 적용되는 것이다.

한편, 기능적 고착화는 수학 학습이나 수학 문제해결에서 부정적인 영향을 미칠 수도 있다. 특히 이전의 교수학적 경험으로 형성된 고착화는 이와 유사한 기능이 요구되는 수학적 상황에 영향력을 행사하게 된다. 예를 들면 산술평균에 대한 이전의 교수학적 경험은 조화평균이 요구되는 상황에 적용되어 오류를 야기 시키기도 한다(이대현, 2001).

이러한 상황은 이전의 교수학적 경험이 즉각적인 판단을 유도하는 역할을 하며, 지속적으로 수학 학습과 문제해결 과정에 영향을 주는 것이다. 다음에 제시된 문제는 비례적 사고의 경험이 이와 유사한 형태로 표현된 문제에 적용되어 오류를 일으키는 예이다. 어떤 시계가 5초 동안 6번 울린다면 12번 울리기 위해서는 몇 초가 걸

리겠는가? 당연히 10초 일거라고 판단할 수 있으나 11초가 정답임을 알 수 있다.

기능적 고착화는 과거의 수학 학습이나 문제해결에 대한 경험이 과거 경험과 유사한 상황에서 즉각적인 판단을 이끌게 하는 즉각성의 한 요인이다. 전술한 바와 같이 기능적 고착화는 수학 학습과 문제해결에 긍정적인 결과를 이끌기도 하지만, 부정적인 결과를 초래하기도 한다. 따라서 과거의 수학적 경험이 이와 유사한 새로운 맥락에 즉각적으로 적용될 때에는 그 상황에 내재된 개념과 의미에 대한 체계적이고 논리적인 분석이 병행되어야 한다.

3. 대표성

대표성은 확률적 판단의 상황에서 일상의 경험에 근거하여 주어진 상황을 즉각적으로 인식하고 판단하는 기능을 가지고 있다. 따라서 학습자는 일상에서 접하는 확률적 판단의 상황에서 그들의 경험적이며 실험과 관찰에 근거하여 판단하는 경향이 강하다. 이와 같이 확률에 대한 학습자의 구체적인 경험적 판단은 대표성의 인식에 유용한 배경이 되며, 수학적 확률의 인식에 도움이 될 수 있다.

예를 들면 Laplace의 고전적 확률의 정의인 수학적 확률은 표본공간을 이루는 각 결과가 일어날 가능성이 똑 같다는 가정 하에서 가능하다. 이 정의는 '이유 불충분의 원리'와 같이 모든 시행에서 물리적 대칭성이 보장되는 것이다. 수학적 확률에서 표본공간의 각 원소들의 이상화된 대칭성과 '이유 불충분의 원리'에 의하여 학생들은 실세계에서 부딪치는 사건에 대하여 가능성이 동등하다는 가정을 암묵적으로 수용하며, 일어날 가능성이 동등한 모든 경우를 기꺼이 객관적으로 표현하려고 한다. 고전적인 수학적 확률은 현행 교육과정의 기초를 이루고 있으며, 형식적인 패턴 학습을 강조한다는 면에서 비판의 대상이 되기도 하지만(우정호, 1998), 우연현상에 대한 수학적 확률 개념을 이해하는데 기초가 되고 있다.

한편, 대표성은 확률적 판단이 요구되는 상황에서 객관적인 자료보다 주관적인 판단에 우선적으로 의존하는 경향이 있으며, 오랜 경험에 의해 형성된 원시적 확률직관으로 교정하기도 쉽지 않다. 학생들은 어떤 시행에서 나타난 결과가 모집단의 특성을 보존해야 한다고 생각하며, 추론 과정에서도 그러한 무작위성이 보존되기를 기대한다.

예를 들면, 동전 던지기에서 연속적으로 5번 앞면이 나오고 난 후에 뒷면이 나오면 뒷면이 너무 늦게 나타난다고 생각하며, 앞면과 뒷면이 골구로 배열되기를 기대한다. 동전던지기는 반복시행에 의해 개개의 결과가 무작위적이고 같은 확률을 가지지만, 대부분의 사람들은 이론적인 확률 개념과는 다른 원시적 확률직관에 의해 대표성을 기대하는 것이다.

확률적인 판단의 상황에서 대표성에 의해 즉각적인 판단을 하는 예는 다음의 예에서도 알 수 있다. 남자아이와 여자아이가 태어날 확률이 같다고 할 때 (a) 남, 여, 여, 남, 여, 남 (b) 남, 남, 남, 남, 여, 남 (c) 두 경우의 확률이 거의 같다는 항목에 대하여 조사 대상인 대학생의 70%가 (a)를 선택하였다(Kapadia & Borovcnik, 1991; 우정호, 1998 재인용). 이것은 (a)의 경우가 더 대표성이 있는 것처럼 보이기 때문에 그러한 확률적 판단에 의해 즉각적인 판단을 하였기 때문이다.

마찬가지로 남·녀 학생의 수가 각각 같은 학급에서 임의로 10명을 추출할 경우에 반은 남학생이고 반은 여학생일거라고 기대한다. 이러한 주관적인 확률적 판단은 형식적-이론적 확률의 개념과 갈등을 야기하며, 확률 개념에 대한 제2직관의 형성에 장애가 되기도 한다.

또한, "매일 대략 45명의 아이가 태어나는 병원과 대략 15명의 아이가 태어나는 병원에서 일년 동안에 남자아이가 60%이상 태어날 날이 많은 병원은 어느 병원이겠는가"라는 질문에 95명의 피험자 중에서 21명이 45명의 아이가 태어나는 병원을, 21명은 15명의 아이가 태어나는 병원을 선택했으며, 53명은 두 병원이 같다고 대답하였다(Fischbein, 1987, p. 109). 실제로 큰 표본은 이론적으로 기대되는 기대치인 50%에 거의 가까우므로 15명의 아이가 태어나는 병원에서 남자아이가 60%이상 태어날 날의 기대수가 더 크다. 그럼에도 불구하고 이러한 연구 결과는 두 표본 모두가 집단의 대표성을 나타내고 있다는 즉각적인 판단으로 인하여 사건 가능성의 판단에서 표본의 크기를 고려하지 않음을 알 수 있다.

확률적 판단의 상황 외에 문제해결에 영향을 끼치는 대표성의 예로는 수학적 정의나 개념과 관련하여 그들의

인식에 대표적인 모델을 주로 이용하게 된다는 것을 들 수 있다. 예를 들면 직사각형을 생각할 때는 정사각형을 떠오르기보다 서로 이웃하는 변의 길이가 다른 직사각형을 생각하게 되고, 삼각형을 생각할 때는 주로 예각삼각형을 떠오르게 된다. 이 경우에도 어떤 정의나 개념에 대한 대표적인 모델은 그 정의나 개념의 본질과 성질을 인식하는데 도움이 된다. 그렇지만 대표적인 모델에 지나치게 얽매이게 되면 정사각형을 직사각형의 한 예로 수용하기를 꺼리는 것과 같은 오류가 발생할 수도 있다.

대표성에 의해 나타나는 이러한 경향은 개인의 일상적인, 또는 교수학적 경험에 의해 굳은 신념으로 정착되고 강화되어진다. 따라서 초기에 형성된 대표성에 대한 개념이 형식적 개념 학습과 일관성을 유지할 수 있도록 배려하는 교수학적 노력이 요구된다.

Ⅳ. 결 론

수학 학습 과정에서 학습 내용에 대한 즉각적인 이해나 수학적 문제를 해결하는 과정에서 문제의 전체적인 구조의 이해로부터 오는 통찰을 통한 문제해결 방법에 대해 관심이 요구된다. 즉각적으로 통찰을 얻는 즉각성은 직관에 의한 것이며, 이 글에서는 즉각성의 요인으로는 시각화, 기능적 고착화, 대표성을 들었다.

수학 학습이나 수학적 문제를 해결할 때 즉각성의 요인은 학습자에게 유용한 통찰을 제시하지만, 부정적인 효과를 줄 수 있다. 이러한 예로 시각화의 경우에 다이어그램이나 함수의 그래프, 수형도와 같은 시각적 표현은 원래의 개념의 의미를 좀 더 직관적이고 즉각적으로 전달해 줄뿐만이 아니라, 문제의 원형을 구체적으로 표현해 주는 기능을 가지고 있다. 그러나 시각적 표현은 반점으로 점을 표현함으로써 점에 대한 이미지를 즉각적으로 구성하는데 유용하지만, 이후에 '선분의 길이가 다른 두 선분 위의 점들이 일대일 대응이다'라는 사실을 받아들이는데 어렵게 하는 것과 같이 수학의 개념을 설명하거나 문제해결을 위한 도구로 이용되어지는 경우에 오류 발생의 원인이 되기도 한다.

이와 같이 즉각성으로 인해 오류가 야기될 수 있다는 사실은 인간의 정신이 경험적인 실재를 바탕으로 판단한다는 것과 수학이 모든 경우에 인간의 경험에 바탕을 둔 지식 체계가 아니라는 것을 시사한다.

따라서 수학 교수·학습은 즉각적인 판단에 의한 수학적 해석과 체계적이고 분석적인 과정을 통한 판단의 점검과의 조화를 이끄는 교수학적 노력이 필요하다. 이를 위해 직관에 의한 즉각적인 판단에 의한 수학 학습이나 문제해결 후에는 체계적으로 사고 과정을 고찰해 볼 수 있는 논리적 사고에 의한 검증의 과정이 필요하다.

Wittmann(1981)도 수학적 사고를 직관적 사고와 반영적 사고(Reflective Thinking)로 구분하고 직관적 사고와 반영적 사고의 상보성을 강조하고 있다. 그에 따르면 반영적 사고는 직관적 사고에 비해 메타 수준이다. 사고의 주체는 자신의 활동에 대하여 반성해야 한다. 직관적 사고는 증명을 검증하고 오류를 찾아내는데 필수적이며, 직관적 사고에 의존한 반영적 사고는 수학의 성장에 필수적이다(Wittmann, 1981).

한편 자신의 판단이나 문제해결 과정 중에 체계적으로 자신의 사고 과정을 뒤돌아 볼 수 있는 메타인지적 사고는 즉각적인 판단에 의한 사고 과정을 재점검함으로써 자신의 판단과 문제해결 과정에 확신을 심어줌과 동시에 만약에 일어날 수 있는 오류를 수정할 기회를 제공할 수 있다는 면에서 중요하다. 특히 메타인지적 사고는 문제해결의 반성 단계에서 이루어지는 결과와 풀이 과정의 점검, 다양한 풀이 방법의 모색, 다른 문제에의 일반화, 우아한 해법 추구 등을 가능하게 하는 중요한 요소이다. 학생들은 이전의 문제해결의 경험과 기지의 지식을 바탕으로 문제에 대한 근거 있는 추측을 하고, 이를 체계적이고 논리적으로 분석할 기회를 가짐과 동시에 발견된 사실을 정교하게 표현하도록 함으로써 문제해결의 발견술을 습득하고 문제해결과정에서 나타날 수 있는 체계적인 오류를 수정할 수 있다.

마지막으로 이 글에서는 즉각성의 요인과 효과를 학교 수학 내용과 선행연구의 자료를 중심으로 알아보았는 바, 실제 학교 현장에서 즉각성이 어떻게 어느 정도 영향을 끼치는가를 알아보는 연구를 제언으로 제시한다.

참 고 문 헌

김언주(1991). 교육·심리 학도를 위한 인지심리학 이론과 적용. 서울: 정민사.

김정환(1974). 페스탈로찌의 생애와 사상. 서울: 박영사.

우정호(1998). 학교 수학의 기초. 서울: 서울대학교출판부.

이대현(2001). 수학 문제해결 과정에서 고등학생들의 직관적 사고의 분석. 한국교육원대학박사학위논문.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bruner, J. S. (1960). *The process of Education*. New York: Macmillan Publishing Co. 이홍우 (역) (1997). 교육의 과정. 서울: 배영사.

__________(1979). *On Knowing: Essays for the left hand*. Harvard University Press.

Ervynck, G. (1991). Mathematical Creativity. In Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking(pp. 42-53)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht: D. Reidel Publisching Company.

Fischhoff, B., Slovic, P., & Lichtenstein, S. (1977). Knowing with Certainty: The Appropriateness of Extreme Confidence. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 3(4), pp.552-564.

Janvier, C. (1981). Use of Situations in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp.113-122.

Klein, M. (1985). *Mathematics and the Search for Knowledge*. Oxford University Press. 김경화·박혜숙(역) (1994). 지식의 추구와 수학. 서울: 이화여자대학교 출판부.

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America.

Poincaré, H. (1905). *La Valeur de la Science*. 김형보(역) (1983). 과학의 가치. 서울: 단대출판부.

Polya, G. (1957). *How to solve it: Vol. 2*. New York: Doubleday. 우정호(역) (1986). 어떻게 문제를 풀 것인가. 서울: 천재교육.

Skemp, R. R. (1986). *The Psychology of Learning Mathematics: Vol 2*. Harmonsworth: Penguin.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). Editers' Introduction: What is Mathematical Visualization. In Zimmermann, W. & Cunningham, S.(Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. New York: The Mathematical Association of America.

Wittmann, E. (1981). The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), pp.389-397.

A Study on the Factors and Effects of Immediacy in Intuition

Lee, Dae Hyun
Department of Mathematics Education, Gwangju National University of Education,
1-1, Punghyang-dong, Buk-ku, Gwangju 110-230, Korea.
E-mail: leedh@gnue.ac.kr

The purpose of this paper is to research the factors and the effects of immediacy in mathematics teaching and learning and mathematical problem solving. The factors of immediacy are visualization, functional fixedness and representatives.

In special, students can apprehend immediately the clues and solution using the visual representation because of its properties of finiteness and concreteness. But the errors sometimes originate from visual representation which come from limitation of the visual representation. It suggests that students have to know conceptual meaning of the visual representation when they use the visual representation.

And this phenomenon is the same in functional fixedness and representatives which are the factors of immediacy

The methods which overcome the errors of immediacy is that problem solvers notice the limitation of the factors of immediacy and develop the meta-cognitive ability. And it means we have to emphasize the logic and the intuition in mathematical teaching and learning. Clearly, we can't solve all mathematical problems using only either the logic or the intuition.

* ZDM Classification : C30
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Word : immediacy, visualization, functional fixedness, representatives, mathematical problem solving