한국수학사학회지 제19권 제3호(2006년 8월), 123-146

수학에서 구현하는 자유

석관고등학교 **차주연**
minette-j@hanmail.net

고려대학교 **황우형**
wwhang@korea.ac.kr

이 논문은, 학습자가 내적인 자유를 얻도록 한다는 명분 하에 학습자 개인의 사적인 자유가 침해되어서는 곤란하다는 문제의식을 갖고 수학교육적인 관점에서 자유 개념을 고찰한 것이다. 다양한 자유의 개념을 '과정으로서의 자유'와 '결과로서의 자유'로 구분하여 논의한 결과, 다음의 결론을 얻었다. 첫째, 수학교육에서는 과정으로서의 자유를 누리지 않고는 결과로서의 자유에 도달할 수 없다. 둘째, 두 가지 의미의 자유가 반복된다. 과정으로서의 자유와 결과로서의 자유는 씨앗과 열매처럼 반복되면서 서로에게 밑거름이 되는 자유의 양면이다. 이를 위해 수학 교사는 자유의 가치를 알고 소중히 여기며 그 즐거움을 학생과 함께 공유해야 할 것이다.

주제어 : 자유, 과정으로서의 자유, 결과로서의 자유, 구조, 교육의 리듬, 발아기, 결실기

0. 서론

인간은 공기 없이는 잠시도 견딜 수 없다. 자유 없이도 그렇다. '자유가 아니면 죽음을 달라'는 말처럼 자유는 목숨과도 바꿀 정도로 소중하여 그 소중함을 말로 표현한다는 것 자체가 무색할 정도다.

인간에게 자유가 중요한 만큼 그에 대한 논의도 일찍부터 시작되었다. Plato은 자신을 통제할 수 있는 인간이 진정으로 자유로운 인간이라고 했다. 열정이나 충동, 욕망을 이성으로 제어할 수 있어야 자유롭다고 했다([14, p.72]). Mill([26, p.26])은 「자유론」에서 '자유'라는 이름에 합당한 유일한 자유란, 우리가 타인의 행복을 탈취하려고 시도하지 않고 그의 노력을 방해하지 않는 한에서 우리 자신의 선을 추구하는 자유라고 말한다.

이와 같은 자유에 대한 논의가 교육에서는 자유교육으로 나타난다. 자유교육은 3학 4과와 같은 주지 교과를 교육내용으로 하고 있으며 교육받은 인간이 자유로운 인간임을 전제로 한다. 즉 외적인 속박뿐만 아니라 내적 편견에서 자유로워지도록 하는 것을 목표로 삼는다.

현대에 자유교육을 새롭게 정당화하고자 시도한 Peters([28, pp.64-65])는, 교육받은 사람이 되기 위해서는 교과를 소중히 여기며 자신의 것으로 만들어야 한다고 말한다. 그러나 궁극적으로 그런 상태에 도달해야 한다고 하여 그렇게 되기까지의 교육적 과정이 반드시 흥미에 맞거나 자발적인 활동을 조장할 필요는 없다고 본다. 즉 Peters는 결과를 중요시할 뿐 그렇게 되기까지의 과정을 돌보지 않고 있다.

이와 같은 모습은 비단 Peters의 주장뿐만 아니라 실제의 학교 현장에서도 쉽게 접할 수 있다. 내적 편견으로부터 자유를 얻게 한다는 명분 하에 오히려 학생들의 자유를 침해하고 외적인 속박을 가하는 교육현장을 볼 수 있다.

이러한 상황에 대해 Patterson([27, p.28])은 많은 학교가 아동을 인간으로 취급하지 않고 아동들의 자연적인 학습능력과 건전한 성장능력을 방해하고 질식시킨다고 말한다. Silberman([31, p.89])은 프로크루스테스의 비유를 들어 학교 제도의 불합리함을 말한다. 프로크루스테스가 잡아온 사람을 쇠침대에 눕혀 큰 사람은 다리를 자르고 작은 사람은 잡아 늘렸다는 옛 이야기처럼, 교육자가 학교를 아이들에게 맞추지 않고 아이들을 학교에 맞추어 왔다는 것이다. 이런 의미로 Comenius 또한 학교를 '정신의 도살장'이라고 부르기까지 했다. 이는 결과적으로 얻게 되는 자유에 대한 지나친 집착에서 오는 폐해이다. 결과적으로 얻게 되는 자유가 가치 있고 지속적인 기쁨을 준다는 것에는 이론(異論)이 없겠지만 이를 위해 희생되는 것들을 돌보지 않는다면 그 폐해 또한 작지 않을 것이다.

학습자가 교육받은 사람의 상태에서의 내적인 자유를 얻도록 하는 것이 교육의 진정한 목적이라고 할 때 이를 위해 학습자 개인의 사적인 자유가 침해되어서는 곤란하다는 점에 이 논문의 문제의식이 배태되어 있다. 곧 교육이 지향해야 하는 자유가 내적인 편견으로부터의 자유임을 정당화하고 학습 과정에서 학습자 개인의 자유는 어떻게 다루어져야 하는가가 이 논문에서 논의할 과제이다.

이를 위해 자유의 의미를 살펴보고 수학교육에 펼쳐진 자유의 양상을 고찰한 후, 수학교육의 내용론과 방법론에서 자유를 실현하는 방안을 구안하여 실제 수업안을 구성해 본다.

1. 자유의 두 가지 의미

자유에 관한 문제는 결정론을 바탕에 두고 논의된다. 결정론은 인간의 행동이 예측가능성(predictability)과 규칙성(regularity)을 갖고 있다는 것인데 그 경중에 따라 경직된 결정론(hard determinism)과 온건한 결정론(soft determinism)으로 나누어진다. 경직된 결정론은 과거의 경험이 큰 영향을 미친다고 보기 때문에 인간이 자유로이 행할 수 있는 부분 및 이에 대한 책임도 극히 적다. 그러나 온건한 결정론에서는 인간

의 선택에 대한 영향이 더 크다고 여기므로 자유도 그만큼 큰 의미를 갖게 되어 활발한 논의가 이어진다([15, pp.116-118]). 이처럼 결정론의 입장에 따라, 그리고 인간 및 사회를 어떤 관점에서 보는가에 따라 자유의 의미는 다르게 규정된다. 이제 자유에 대한 여러 의미를 알아보고 교육과 관련지어 보기로 한다.

1.1 자유의 의미와 구분

자유에 대해 언급하고 있는 문헌을 보면, 자유는 흔히 소극적 자유(negative liberty)와 적극적 자유(positive liberty)로 구분한다. 대표적인 경우가 Berlin이다. Berlin([16])은 '나의 행동을 방해하는 것이 없는 상태'로 자유를 규정한 뒤 이를 다시 '소극적 자유'와 '적극적 자유'의 두 가지로 대별한다. 소극적 자유는 '타인의 간섭을 받지 않고 내가 어떤 영역에서 주인처럼 행동할 수 있는가' 하는 질문에 관계되는 반면, 적극적 자유는 '통제나 간섭의 원천이 누구인가'를 따지게 만든다. 즉 소극적 자유는 간섭의 원인이 타인 또는 외부에 있다고 보아 타인의 간섭을 받지 않는 상태가 자유의 상태라고 본다. Berlin이 보는 적극적 자유의 원형은 외부 간섭에 흔들리지 않고 자신의 뜻대로 자기 삶을 살아가는 것이며, 이 때의 '외부'는 비합리적 충동이나 통제되지 않은 욕구 등에 의해 좌우되는 거짓 자아 또는 경험적 자아[1]이다. Berlin은 적극적 자유의 형태를 다시 두 가지로 구분하는데 하나는 인간 내면의 불합리한 욕구를 억제하는 것(self-abnegation)이고 다른 하나는 진리에 초점을 맞추어 자기의 이성[2]에 따라 자기실현을 도모하는 것(self-realization)이다.

Fromm([22, p.46])도 Berlin처럼 자유를 소극적 의미인 '…으로부터의 자유'(freedom from)와 적극적 의미인 '…에로의 자유'(freedom to)로 구분한다. Fromm은 인간 존재와 자유는 그 시초부터 도저히 분리될 수 없는 것이라고 하는데 여기서의 자유는 소극적 의미의 자유이다. 독특한 개인적 자아보다 더 높은 힘을 행사하는 주체란 존재하지 않으며 인간은 그의 생활의 중심이자 목적이라는 것을 전제로 하는 것이 적극적 자유이다. Fromm은 소극적 자유에서 도피한 결과로 자발적 행동이 나타나는 것을 바람직하게 여기며 자발적 행동의 결과, 상위의 가치를 갖는 적극적 자유로 향할 수 있다고 한다.

Neill에게 자유란 남의 자유를 침해하지 않는 한에서 자기가 하고 싶은 일을 하는

1) Berlin([16, p.179]) 자아를 크게 두 가지로 구분한다. 하나는 이성과 동일시할 수 있는 자아이며 고귀한 품성을 가진 자아로, 궁극적인 만족을 목표로 하는 자아이다. 이 자아의 다른 이름은 실재적, 이상적, 자율적 자아이다. 다른 하나는 비이성적 충동과 동일시할 수 있는 자아이며 저급한 품성을 가진 자아로 즉각적인 쾌락을 추구하는 자아이다. 이 자아의 다른 이름은 경험적, 타율적 자아이다.

2) 이성을 사용하여 적극적 자유를 실현하는 것에 대한 예로 Berlin([16, pp.187-188])은 학생 때 수학을 배우던 것을 제시한다. 처음에 수학적 진리들은 장애로 느껴지지만 기호의 사용, 공리, 변형규칙들을 이해하게 되면 오히려 자신의 이성적 활동에 있어 자연스러운 기능으로 작용하게 된다는 것이다.

것이다([3]). 그는 자유를 개인적인 자유(individual freedom)와 사회적인 자유(social freedom)로 나누고, 모든 사람이 개인적인 자유를 누려야 하지만 다른 사람의 자유도 존중해야 하므로 사회적인 자유는 완전히 누릴 수 없는 것이라고 주장한다. 라틴어를 싫어하는 아이에게 억지로 배우게 할 권리는 아무에게도 없지만, 이 아이가 라틴어를 배우고자 했을 때에는 교실에서 계속 떠들고 논다면 쫓겨날 수밖에 없다. 다른 사람의 공부하는 자유를 침해하기 때문이다.

Broudy([19])는 자유를 가능성의 가능성이라 정의한다. 그에게 있어 자유는 사고와 행동을 위해서 참으로 이상적인 가능성들을 택하는 것이다. 가령 노동하는 것이 최선의 가능성이라면 그것은 다른 것을 택하는 것보다 더 안전하고 믿음성 있게 살아갈 수 있기 때문일 것이며 욕구가 좌절되는 일이 적기 때문일 것이다. Broudy는 단순히 가능성을 조작하는 자연적 자유와, 이상적인 결과를 관련지어 여러 가능성들을 평가하는 반성적 자유를 구별하고 있다. 진정한 자유는 여러 가능성 가운데 신중한 선택과 평가를 함으로써 얻게 된다는 것인데, 이 때 자연적 자유를 반성적 자유로 변형하는 것이 바로 지식이다.

이와 같이 자유를 논하는 사람마다 그의 독특한 관점에서 자유의 개념을 구분하고 있음을 알 수 있다. 본 논문에서는 교육의 관점에서 자유를 '과정으로서의 자유'와 '결과로서의 자유'로 구분하고자 한다. 두 가지의 자유가 엄격히 구분되는 것은 아니겠지만, 좀 더 한쪽에 편향되어 있다는 이유로 논의의 편의를 구하려는 것이다.

여기에서 규정하는 '결과로서의 자유'는 교육 받은 학습자가 진리를 추구하여 자기실현을 도모하는 상태에 이르렀을 때 누리게 되는 자유이다. 프랑스어를 배운 후 프랑스어로 된 Apollinaire의 시 '미라보 다리'(Le Pont Mirabeau)를 읽으면서 이제 프랑스어로 된 것은 어느 것이든 읽고 이해하며 저자의 감정을 공유하고 생생하게 느낄 수 있겠다는 생각에서 누리게 되는 자유, 지수가 실수 범위일 때까지 지수법칙을 확장한 후 지수가 어떤 실수이든 지수법칙을 이용하여 계산을 간편하게 할 수 있겠다는 생각에서 누리게 되는 자유, 이러한 자유를 '결과로서의 자유'라고 지칭하려 한다.

'과정으로서의 자유'는 프랑스어를 완전히 습득하기까지, 지수법칙을 실수범위로 확장하기까지의 과정에서 학습자가 경험하는 자유이다. 학습하는 동안 학습자가 상상력을 충분히 발휘하고 자유롭게 학습내용을 익혀 온전히 자신의 것이 되게 하는 과정에서 누리는 자유이다. 이는 자유 없이 창의적이고 생산적인 사고는 불가능하다는 전제하에 상정되는 자유이다.

Plato은 철학자가 되기 위한 두 가지 조건으로 진정한 자유(true freedom)와 여가(leisure)를 든다([6, p.216]). 충분한 여가 속에서 철학함의 결과로 얻는 진정한 자유를 누릴 때 철학자가 된다는 것이다. 이때의 진정한 자유와 여가는 각각 '결과로서의 자유'와 '과정으로서의 자유'에 상응한다고 할 수 있다. 이제 그 각각의 의미를 좀더 명료히 해보기로 한다.

1.2 과정으로서의 자유

본 논문에서의 '과정으로서의 자유'는 학습하는 과정에서의 자유로 개인의 사적인 자유와 가깝다. 이 자유는 어떤 일을 함에 있어서 외부로부터 아무런 방해나 제지가 없는 상태에서 누리는 자유라고 할 수 있다. Berlin([16])은 이러한 자유를 소극적 자유라고 하며 이를 자유의 고유개념으로 본다.

Berenson([15, p.122])은 "하려는 것을 방해하면 하려는 것에 자유롭지 않게 된다. 곧 어떤 행동이 자유롭다면 그것은 방해하는 것이 없기 때문이다"라는 말을 통해 적극적 자유도 중요하지만 적극적 자유를 누리기 위해서는 소극적 자유가 전제되어야 한다고 역설한다. 소극적 자유와 적극적 자유는 논리적으로 연결되어 있을 뿐만 아니라 소극적 자유는 적극적 자유를 함의하고 있기 때문이라고 한다.

Dewey([21, pp.87-92])도 내부적인 자유 못지않게 외양상의 자유를 중요시한다. 지성의 자유가 항구적인 중요성을 띠고 있지만 이러한 자유는 행동의 외부적인 면과 분리할 수 없다는 것이다. 전형적인 전통적 학교 교실에서 볼 수 있는 외면적인 행동에 과해진 구속은 지적 또는 도덕적 자유에까지 과중한 속박을 가져온다고 본다. Dewey는 외양상 자유의 이점으로 두 가지를 들고 있다. 하나는 외양상 자유로 인해 학생들의 거짓 없는 내심을 읽기 쉽다는 것이고 다른 하나는 능동적인 학습과정의 성질과 부합한다는 것이다. 외양상 행동에서의 자유는 어디까지나 수단이며 목적은 아니라고 말하지만 자연적 충동과 욕망이 없이는 지적 성장이란 있을 수 없기 때문에 자연적 충동과 욕망 또한 소중히 다루어야 하는 것으로 본다.

교육에서 소극적 자유를 주장하는 사람들이 제기하는 물음 중 하나는, 자유로움을 겪지 않은 사람이 제대로 자유를 추구할 수 있는가 하는 것이다. 자신의 생활을 결정하는 자유 없이는 자율성을 갖추기 어렵기 때문이다. 따라서 자유를 직접 체험하게 해야 한다는 주장은 일리가 있는 것이다.

그런가 하면 자신의 생활을 규제하는 능력이 없는 이에게 자유가 주어졌을 때의 폐단도 고려해야 한다. 자유가 단지 외적인 구속이 없는 것만을 의미한다면 그것은 단지 '무서운 자유'가 될 뿐이다. 사람들은 이런 '무서운 자유'를 피하기 위해 타인에게 지나치게 의존하게 되며 권위주의로 후퇴하거나 대중에게 순응하는 방식을 취한다. 무서운 자유를 효과적으로 치료하는 방법은 자아의 힘을 기르는 것이다([32, pp.155-156]). 외적인 구속이 없는 것만을 의미하는 자유는 가치가 없음을 피력하는 것이다. 단지 외적인 구속에서 벗어난 자유에 자유라는 이름을 걸기에는 부족함이 있다. 이 부족함을 채우려는 노력은 결과로서의 자유를 추구하는 것으로 이어져 왔다.

1.3 결과로서의 자유

본 논문에서의 '결과로서의 자유'는 학습의 결과로 누리게 되는 자유이다. 학습의 결과 얻게 되는 자유를 목적으로 삼고 학습이 이루어져야 한다는 의미에서 명명한 것

이다. '진리가 인간을 자유롭게 한다'는 말을 두고, Phenix는 자유를 진리에 선행하는 조건이라기보다는 진리탐구의 결과라고 풀이한다([13, p.56]). 인간은 배울 수 있도록 자유로울 뿐만 아니라 학습을 통해서 자유를 배우는 것이라고 하여 결과가 되는 자유를 좀더 중요하게 여기는 것이다. 결과로서의 자유는 과정으로서의 자유보다 좀더 적극적인 의미를 갖는다. 여기서 적극적이라는 말을 사용한 것은 개인의 의지를 반영하고 있기 때문이다.

적극적 자유를 추구하고자 하는 사람들의 입장은, 인지적인 면을 강조하여 지식으로부터 적극적 자유를 누릴 수 있다는 입장과 태도적인 면을 강조하여 자율로부터 적극적 자유를 누릴 수 있다는 입장, 두 가지로 대별된다.

먼저 지식과 적극적 자유 사이의 관련을 살펴보기로 한다. Plato은 「리시스」에서 지식과 자유를 다음과 같이 연결짓는다. 말을 잘 다룰 줄 모르는 아들이 마차를 몰려고 한다면, 부모는 아들이 못하도록 말리겠지만 마부는 노예 신분임에도 불구하고 마차를 다루는 일에 관한 한 마음대로 하게 허용한다. 리시스는 학교에 갈 때에도 그를 데려다 주는 노예의 말을 듣지 않으면 안 된다. 리시스가 다른 데에 가지 못하도록 강제하는 것이다. 그 이유를 묻는 Socrates에게, 리시스는 자신이 어리기 때문이라고 대답한다. 그러나 Socrates는 어리기 때문이 아니라 지식의 결핍 때문이라고 설명한다. 어떤 문제에 대해 필요한 지식, 예를 들어 요리라든지 약에 관한 전문 지식이 부족하다면 왕자일지라도 요리나 약을 다루는 건 허용되지 않는다는 것이다([6, pp.214-215]). 곧 지식을 갖추어야 사람은 자유로워지며 다른 사람을 지배할 수도 있다. 지식이 없다면 그 자유가 억압되는 것이다.

또한 인간의 자유는 인간이 사고나 감정을 학습하지 않으면 안 된다는 사실의 이면을 나타낸다고 Oakeshott는 말한다. 곧 자유는 인간의 조건이고 학습은 자유의 조건이다([12, p.12]). 따라서 교과에서 지식을 얻게 된다고 할 때, 지식은 자유의 조건이 된다.

이제 자율과 적극적 자유 사이의 관련을 살펴보기로 한다. 적극적 자유를 옹호하는 사람들은 다음과 같은 주장을 한다. 모든 사람이 이성적인 자기지배를 궁극적인 목표로 삼는 존재가 된다면 본성에서 나오는 이성적인 법칙을 따를 것이고 이 때에 자유롭게 된다는 것이다([16, pp.187-191]). 즉 열정과 욕구를 적절히 통제할 수 있을 때에 이성적인 자기지배가 가능해져 적극적 자유를 얻게 된다는 것이다. 완벽하게 자신을 통제한다면, '종심소욕 불유구'(從心所欲 不踰矩)와 같이 마음 가는 대로 행동하여도 어느 하나 거리낌 없는 상태, 즉 상위자아가 지향하는 상태에 이를 것이다.

위의 논의로부터 적극적 자유를 누릴 수 있는 방법은 크게 두 가지로 볼 수 있다. 하나는 개인이 능력을 갖추는 것이다. 학습의 결과와 관련시킨다면 지식을 갖추는 것이 적극적 자유를 누릴 수 있는 방안이 된다. 다른 하나는 개인의 통제되지 않는 열정과 욕구를 다스려서 자율을 갖추게 하는 것이다.

그런데 상위자아의 성취를 위하여 하위자아를 구속함으로써 '자유의 패러독스' 문제

가 발생할 수 있다. 상위자아를 무엇으로 보는가에 따라 여러 상황이 연출될 테지만 특히 도덕적 자아를 상위자아로 보면 결과를 위해 과정을 돌보지 않아도 된다는 자유의 패러독스가 생긴다. Berlin([16, p.181])도 적극적 자유를 추구하기 위해 소극적 자유가 침해되는 것을 우려하고 있다. 오히려 그는 소극적 자유가 주가 되어 적극적 자유를 추구해야 한다고 주장한다. 두 자유의 의미를 모두 살리기 위해서는 그 경계를 어떻게 설정할 것인가에 대해 상황에 적합한 논의가 수반되어야 할 것이다. 이를 수학교육의 상황에서 살펴보기로 한다.

2. 자유의 양상과 수학교육

자유는 교육에서도 중요한 위치를 차지한다. 학생에게 어떠한 이상을 지향하게 해야 하는가, 또 그 이상을 추구하는 데에 있어 행동 및 사고의 자유를 어느 정도 허용해야 하는가, 이와 같은 물음은 앞에서 논의한 자유의 개념과 밀접한 관련을 맺기 때문이다.

여기에서는 두 교육관 - 인간주의 교육관과 자유교육관 - 에서 펼쳐지는 자유의 양상과 수학교육의 양태를 살펴보고, 두 교육관에 대한 비판적인 논의를 하고자 한다. 이로부터 자유를 추구하는 수학교육에 적용할 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

2.1 인간주의 교육관과 수학교육

인간주의 교육관은 인간의 실존적 자유를 소중히 여기고 학습하는 과정에서 아동의 자유를 존중하고자 한다. Summerhill이나 개방교실(open classrooms)에서는 학생의 자치활동에 의미를 두고 학습의 계획과 진행의 많은 부분을 학습자에게 일임하고 있다. 이렇게 학생에게 자유를 허용하는 밑바탕에는 학생을 신뢰하고 사랑하며 존중하는 마음이 깔려 있다. 또한 학생의 입장에서는 자유를 누릴 때의 책임에 대한 의식이 있으며, 타인의 자유도 고려하면서 자신의 학습의 자유를 누리고자 하는 생각을 가지고 있다. 곧 인간주의 교육관은 학습하는 과정에서 자유를 만끽하게 하는 교육관이라 할 수 있다.

인간주의 교육자들의 수학 및 수학교육에 대한 생각은 Plato, Pestalozzi, Dewey 등의 관점을 중심으로 알아보기로 한다.

Plato이 보는 수학은 현실의 동굴 속에 갇혀 멀게 된 인간의 '영혼의 눈'을 뜨게 하여 이데아의 세계로 향하도록 준비시키는 학문이다. 따라서 수학을 배우는 것은 '진리를 향한 도정(道程)'의 필수적인 단계로 여긴다([8, p.5]).

Pestalozzi가 보는 수학은 '영혼의 조작' (Operation der Seele)으로 이루어지는 '마음의 수학'이다. 자나 컴퍼스의 사용은 인간의 정신 도야를 세공 기술로 전락시키기 때문에 인간 도야의 방법으로 결코 권장될 수 없다고 하면서 수학교육은 '정신의 체조'

이어야 한다고 주장한다([4, p.173]).

Dewey에게 있어 수학은 실행되어야 할 기초 조작이며 수학교육의 목적은 반성적 사고의 함양이다. 따라서 그는 수학교육의 주된 방법으로 '능동적인 작업 활동의 원리'를 들고 있다. 이는 문자나 언어만을 사용해서 지식을 가르치려 하기보다는 일상생활에서 경험하게 되는 유목적적인 활동을 통해서 지식이 자연스럽게 학습되도록 해야 한다는 것을 의미한다([1, p.115]). 이처럼 능동성을 강조하는 그의 수학교육관은 인간주의 교육자들의 수학교육의 중심이 되어 왔다고 할 수 있다.

인간주의 교육에서의 수학교육 상황은 「에밀」에 잘 나타난다. Rousseau([30, p.155])가 에밀에게 기하학을 가르치는 장면은 현대의 인간주의 교육에서 지향하는 수학 교사의 모습을 단적으로 보여준다.

"정확한 도형을 그리고 그것을 조합시켜 겹쳐놓고 그 관계를 계속 관찰하게 하면 정의나 증명법을 가르치지 않더라도 초등기하학을 전부 이해하게 될 것이다. 에밀이 오히려 나에게 기하학을 가르쳐 줄 수도 있다. … 예를 들어 내가 컴퍼스를 사용하지 않고 실 끝에 연필을 묶어 원을 그린 후 두 개의 원의 반경을 비교하려 하면 에밀은 나를 비웃으며, 같은 길이의 팽팽한 실로는 같은 거리가 될 수밖에 없다고 나에게 가르쳐 줄 것이다."

위의 인용문에서 Rousseau는 학습자의 관찰과 경험이 중심이 되는 기하 수업을 하고 있다. 또한 교사는 학습자가 발견할 수 있도록 유도하는 조력자이어야 함을 강조하고 있다. 그리고 생활과 연결지음으로써 학습자가 의미를 갖게 하고자 한다.

2.2 자유교육관과 수학교육

자유교육관은 지식 그 자체를 목적으로 추구함으로써 결과적으로 인간의 궁극적인 자유를 추구하고자 한다. 지적인 이해능력과 합리성을 신장함으로써 마음이 발달하고, 마음이 발달함으로써 인간다운 발달이 이루어져 자유를 얻는다고 본다. 이 때의 자유는 지식을 획득함으로써 얻는 자유이므로 실질적인 능력을 행사할 수 있는 자유이며 더 높은 목표를 추구하는 자유로 가치 지향적이다. 곧 자유교육은 인간의 자유를 결과적인 측면에서 다루고 있다.

자유교육이 이성을 가진 인간의 교육이며 수학이 실재를 다루는 교과라 할 때, 자유교육의 교과로 가장 적합한 교과는 수학이라고 해도 무방할 것이다. 고대 그리스에서부터 유래한 7개 자유교과는 근대 초기에 이르기까지 주요한 교육과정으로 여겨져 왔다. 문법, 수사학, 논리학, 대수학, 기하학, 천문학, 음악 등의 7 자유교과 중 앞의 3학은 정치적 의사 표현 능력과 인간의 마음을 그 내재적 구조의 법칙에 따라서 형성시키는 교과였다. 그리고 뒤의 4과는 밖의 세계를 지배하는 질서의 법칙에 대한 교과였다. 4과 중 특히 대수학과 기하학은 구체적 실제에 대한 언급 없이 추상적으로 사

고할 수 있도록 할 뿐 아니라 진리의 세계에 가장 직접적으로 접근할 수 있게 한다고 그 가치를 높이 평가해 왔다([9, p.24]).

Hirst([24, p.25])는 지식의 형식을 '수학, 자연과학, 인간에 대한 이해, 문학과 예술, 도덕적인 판단과 앎, 종교, 철학적 이해'로 분류하고, 이 7개 분야로 자유교육의 내용을 구성한다. Hirst에게 수학적 사고란 수학적인 지식의 형식에 입문한 결과이며 수학을 배운다는 것은 수학적인 지식의 형태를 통해 세상을 보게 되어 학생의 마음이 변하는 것이라고 한다([8, pp.11-12]).

자유교육의 수학교육 상황은 Brown의 인용문에 잘 나타나고 있다. Brown([20, p.1292])은 대학교 2학년 학생의 경험으로 전형적인 자유교육에서의 수학교육 모습을 보여준다.

"강의 첫 날, 교수님은 공리와 정의, 논리 규칙과 이미 증명한 정리만을 사용하여 증명해야 한다고 말씀하셨다. 그 이외의 것들은 서자(庶子)일 뿐이라고 하셨다. 교수님은 벡터 공간의 공리들로부터 다른 정리를 유도해 갔다. 때로는 알아들을 수 없는 말을 중얼거리면서 우리에게 등을 돌려 칠판을 가리고는 작은 그림을 그렸다. 그러나 그의 처음 조언에 어긋나지 않게 재빨리 그림을 지우고는 공리들과 따름정리들을 이용하여 다시 진도를 나갔다."

자유교육에서의 수학은 완성된 연역체계를 가진 교과로 다루어지므로 수업에서는 완성된 연역체계를 전수하려고 한다. 따라서 교사와 교과의 권위를 지나치게 앞세우게 되어 논의나 논쟁을 필요로 하지 않는 수업 상황이 벌어지며, 이때 학습자는 많은 제약을 받게 된다.

2.3 두 교육관에 대한 비판적 논의

두 교육관의 수학 교과를 바라보는 관점은 매우 유사하다. 두 교육관 모두 수학을 실재를 다루는 교과로, 영혼을 진리에 입문시키는 교과로, 사고 도야를 위한 교과로, 다른 교과의 기저가 되는 교과로 생각한다. 이는 결과로서의 자유를 지향하는 교육을 목적으로 한다고 볼 수 있다. 다만 유용성 면에서 볼 때, 자유교육관에서는 지식 자체의 유용성에, 인간주의 교육관에서는 실제 생활에의 유용성에 좀더 편향되어 있는 것처럼 보인다.

두 교육관의 가장 큰 차이는 수학교육이 이루어지는 교실 수업에서 나타난다. 인간주의 교육관에서는 학습자 중심의 수업을 지향하여 관찰, 발견, 탐색과 같은 활동을 강조한다. 반면 자유교육관에서는 지식 중심의 수업을 지향하므로 그 결과에 치중하여 수업 과정을 돌보지 않는 폐해가 나타날 수 있다.

포괄적으로 두 교육관을 살펴볼 때, 어느 한 쪽의 자유에만 경도(傾倒)되어 교육 사태를 이끌어 가는 것은 바람직하지 않음을 알 수 있다. 인간주의 교육관은 과정으로서의 자유에 치중하여 결과로서의 자유를 소홀히 다루는 경향이 있다. 그래서 학습자의 요구에 즉각적으로 대응하여 학습자를 자유롭게 풀어 놓지만, 더 높은 가치를 향하도록 끌어올리는 데에는 부족함이 많다. 반면, 자유교육관은 결과로서의 자유를 상위에 두어 과정으로서의 자유를 무시하는 경향이 있다. 이것이 지나치면 학습자의 심리적인 면을 속박하게 되어 결과로서의 자유에 이르는 길은 희생을 요구하는 길이 될 것이다. 따라서 두 교육관의 장단점을 보완할 수 있는 방안이 마련되어야 할 것이다.

3. 자유를 추구하는 수학교육론

자유를 추구하는 교과로서의 수학은 학습자의 실질적인 능력을 갖추게 하므로 결과로서의 자유를 추구하는 데 적합한 교과임을 알 수 있다. 이제 수학에서 결과로서의 자유를 얻는 데 필요한 요건을 찾아보고, 이를 위한 수학 교과 내용의 편성 방안을 구안하려고 한다. 또한 교실 수업에서 '과정으로서의 자유'를 만끽하면서도 학습의 '결과로서의 자유'를 얻게 하는 방법을 논의하고자 한다. 그리고 내용과 방법에 대한 논의를 토대로 교실에서의 실제 수업안을 구성해 보고자 한다.

3.1 내용론

수학은 과학과는 본질적으로 다른 성격을 지닌다. 과학은 어떤 현상이 먼저 있고 이 현상의 법칙을 연구하고 설명하기 위해서 과학이 생겨났다. 그러나 수학의 출발은 현상에만 의존한 것이 아니다. 그 출발은 인간의 사고에 있다. 이런 뜻에서 수학은 본래 추상적인 학문이라고 할 수 있다([21, p.279]). 이러한 생각은 이미 Plato 시대부터 태동된 바, 추상화는 수학의 필수적인 요소로 다루어졌다. 가장 초보적인 수학이라 할 '2+2=4'라는 산술식에서도 개체적 사물의 질적 특성과는 무관하게, 개체화할 수 있는 모든 것에 적용할 수 있기 때문이다. 이러한 특징 때문에 수학은 추상과학(abstract science)이라고 부르는 것이다([33, p.13]).

Bourbaki 학파([17, p.231])가 공리적 관점에서 바라본 수학은 추상적 형태, 즉 수학적 구조의 저장소(storehouse)이다. 따라서 수학의 본질적 요소를 추상이라고 본다면 이는 수학의 구조를 지칭하는 것이라 해도 무방할 것이다.

수학의 구조를 확연히 드러내는 방법인 공리적 방법은 논리 방식만으로는 얻을 수 없는 수학의 명증성(明證性)을 파악하게 한다. 여러 이론 사이에서 공통의 통로를 발견하고 그것을 튼튼히 하려는 것이다. 이 공통의 통로는 바로 '구조'의 확고한 개념에

이어지는 것이며, 구조에 주목함으로써 경제적인 사고가 가능해진다. 결국 수학의 추상적인 측면 때문에 구조라는 개념이 가장 중요한 문제로 대두된다고 할 수 있다 ([2]).

곧 추상적 학문인 수학에서 결과로서의 자유를 누리기 위해서는 구조를 체득해야 하는 것이다. 구조를 체득함으로써 좀더 높은 위치에서 수학의 핵심을 바라볼 수 있으며 수학의 핵심과 연결되는 통로들을 보게 된다. 따라서 구조의 체득은 수학에서 결과로서의 자유를 누리게 하는 중요한 징검다리라고 할 수 있다.

구조를 중요시하는 생각의 밑바탕에는 구조가 지식의 체계에서만 나타나는 게 아니라 인간의 인식 구조에도 유사한 형태로 나타난다는 생각이 있다. 20세기 초 Klein의 Erlangen Program은 독립적으로 존재하던 전통적인 대수학과 기하학을 변환군이라는 하나의 구조 안에 통합시킨다. 이에 Bourbaki 학파([17, pp.226-227])는 군 구조를 포함할 수 있는 기본적 구조의 일반화 작업을 통하여 기하학, 정수론, 추상대수, 해석학, 확률론 등으로 분리되었던 수학을 구조의 측면에서 통합하려는 시도를 하게 된다. 그 결과 그들은 다른 구조적 원천으로는 더 이상 환원될 수 없는 세 가지의 구조 - 대수적 구조(algebraic structure), 순서 구조(order structure), 위상적 구조(topological structure) - 를 발견한다.

그런데 Piaget([29, pp.26-27])는 그가 분석한 아동의 논리-수학적 사고의 구조와 Bourbaki 학파가 말하는 수학에서의 세 가지 모구조(mother structures)가 부합한다는 사실에 주목하게 된다. Piaget는 사고의 본질을 조작[3](operation)으로 파악하는데 조작의 세 가지 범주가 Bourbaki 학파의 세 가지 모구조와 정확하게 일치한다는 것이다. 즉 대수적 구조는 분류와 수 구조에, 순서 구조는 수열과 연속적 대응에, 위상적 구조는 근방, 연속, 경계 등의 개념에 의해서 구별되는 류(class)를 만들어내는 조작에 대응된다는 것이다.

Bourbaki 학파가 통찰해 낸 수학의 세 가지 모구조가 논리-수학적 사고의 구조와 일치한다는 것은 다음과 같은 시사점을 준다.

첫째, 논리-수학적 사고를 단련시키기 위해서는 수학의 구조를 체득하게 하는 것이 유용할 것이다.

둘째, 사고의 본질이 구조이므로 인간에 읽어낸 세계 또한 구조의 형태를 띨 것이다. 결국 사고의 본질이 구조이고 사고가 통찰해 낸 세계의 모습이 구조라면, 구조의 중요성은 몇 번을 반복하더라도 충분치 않을 것이다.

이제 이차곡선이 발달해 온 과정을 살펴보면서 자유를 누리게 하는 구조의 중심적 역할을 알아보기로 한다. 대표적인 이차곡선인 포물선, 타원, 쌍곡선에 대한 엄밀한 정의를 한 사람은 Menaechmus(B.C. 375-325)로 알려져 있다. Apollonius 이전에는

3) Piaget는 조작을 '가역성(reversibility)과 내면화가능성(internalizability)을 가지고 있는 지적 활동'으로 보며 조작은 서로 결합되어 통합된 구조(structure)를 나타낸다고 한다([10, p.141]).

타원, 포물선, 쌍곡선을 꼭지각이 각각 예각, 직각, 둔각인 세 개의 다른 직원뿔에서 얻었다고 한다([18, p.237]). 이후 Apollonius는 원뿔 두 개를 꼭지점을 맞대고 축을 한 직선 위에 놓고 절단함으로써 현대의 관점에 좀더 가까운 원뿔곡선을 얻는다. 즉 Apollonius는 하나의 '입체'에서 세 가지 곡선에 모두 적용되는 일관된 정의 방식을 찾아낸 것이다([33, p.125]). Apollonius가 입체에서 한 일을 평면에서 이룬 사람은 Pappus이다([33, p.127]). Pappus는 초점과 준선을 이용하여 일관되게 작도하는 방식을 발견하였다.

17세기에 Wallis는 그의 논문 「원뿔곡선(Tractatus de sectionibus conicis)」에서 원뿔곡선의 산술화를 완성하여 발표한다([18, p.618]). Wallis는 평면좌표를 사용하여 세 개의 표준형 $e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}$, $p^2 = ld$, $h^2 = ld + \frac{ld^2}{t}$ (e, p, h는 각각 원점에 위치한 꼭지점에서 측정한 가로 좌표 d에 대응하는 타원, 포물선, 쌍곡선의 세로 좌표, l은 동경, t는 지름 또는 축)을 이끌어낸다. 즉 원뿔을 이용한 정의에서 자유롭게 되는 원뿔곡선의 산술적인 체계를 세운 것이다. 이후 이 표준형은 일반형 $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$(단, $abh \neq 0$)…(*)의 형태로 거듭나게 된다. 일반적으로 (*)의 계수들로 이루어진 행렬식 $l = \begin{vmatrix} a & h & c \\ h & b & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$을 생각하면 $l \neq 0$일 때 포물선, 타원, 쌍곡선을 나타내게 된다. 특히 $ab - h^2 = 0$이면 포물선, $ab - h^2 > 0$이고 $al < 0$이면 타원, $ab - h^2 < 0$이면 쌍곡선을 얻게 된다([5, p.239]). 특히 $x^2 - y^2 = 0$이면 $y = x$, $y = -x$의 교차하는 두 직선이 그리스 식의 원뿔곡선 개념 안으로 들어오게 된다. $x^2 - 2xy + y^2 + x - y = 0$인 경우 $y = x$와 $y = x + 1$의 평행한 두 직선이 나오게 되는데 이는 원통을 원뿔의 특수한 경우로 생각할 때에 원통을 절단하여 얻게 되는 것으로도 볼 수 있다([33, p.134]).

이처럼 일반화와 확장이 매 단계마다 이루어진 원뿔곡선에 대한 연구가, 실용적 용도와는 무관하게 그저 추상적 지식으로서 지식 자체에 대한 열망을 충족시킬 의도로 1800년 동안이나 지속되어 왔다는 점은 매우 놀랍다. 오랜 기간 추상적 연구로 그쳤으나, 가장 중요한 자연법칙의 단초(端初)로 Kepler에 의해 비로소 빛을 보게 된다. Kepler가 내놓은 행성의 운동에 관한 세 가지 법칙 - 궤도, 면적, 주기에 관한 법칙 - 은 원뿔곡선 이론이 없이는 불가능하다([33, pp.129-131]). Kepler의 행성 운동법칙을 포함하는 좀더 근본적인 운동법칙은 Newton의 만유인력이다. 이 만유인력 법칙의 증명에 가장 본질적인 것은 원뿔곡선 이론인 셈이다. 고대에서 발현했던 수학적 이론이 Kepler 및 Newton에게 이어지면서 물리학에서 자유를 누리게 하는 근원이 된 것이다.

현행 고등학교 과정에서는 각각 그 고유한 특성에 맞게 식을 구하면 $y^2=4px$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$을 얻게 된다. 이런 접근 방식은 이들이 매우 상이한 이차곡선인 것처럼 느끼게 한다. 하지만 이들을 다 배운 후에 음미해 보면 이들은 모두 앞의 식 (*)의 특수한 경우이므로 이들 속에 녹아 있는 구조를 느끼게 하여 결과로서의 자유를 누리게 할 수 있을 것이다.

수학의 구조를 파악하게 하는 방안의 하나로 Wittmann의 교수단원(teaching units)을 생각해 볼 수 있다. 교수단원은 수학적, 교육학적, 심리학적, 실제적인 면을 자연스럽게 모두 통합하는 하나의 도구로서 어떤 일정한 교수 목표를 성취할 수 있도록 체계적으로 설계 · 조직해 놓은 내용 전체를 의미한다(Wittmann, 1984: 25). 따라서 교수단원은 처음에 주어진 한 문제에서 출발하여 그 문제를 탐구하는 과정에서 생겨나는 새로운 문제를 제시하는 방식으로 구성된다.

Wittmann은([35, pp.30-31]) 목표(Objectives), 소재(Materials), 문제(Problems), 배경지식(Background)으로 [그림 1]과 같이 교수단원을 구성한다. 대표적인 예로 arithmogon을 이용한 교수단원을 들 수 있는데 arithmogon은 다각형의 변과 꼭지점에 수를 넣는 것이다. 이 때 한 변에 적힌 수는 그 변에 연결된 두 꼭지점에 적힌 수의 합이 되는 규칙을 따른다.

TU Arithmogons

O : 덧셈, 뺄셈, 덧셈과 뺄셈의 혼합연산, 탐색과 발견

M : 삼각형과 사각형의 arithmogon

P : 변과 꼭지점에 적힌 수를 이용하여 다른 수를 찾아라.

B : 꼭지점과 변의 수 사이의 일차독립 관계, 일차방정식의 체계적인 해법, 연산 규칙

[그림 1] 교수단원의 예 ([35, p.31])

Arithmogon은 분수나 음수를 이용할 수도 있다. 좀더 발전하면 안의 숫자 세 개가 하나의 벡터를 나타내게 할 수 있다. 인접한 부분의 수를 더하는 규칙은 3차원 벡터 공간 내에서의 일차사상으로 정의할 수도 있다. 또한 n-gons로 일반화가 가능하다.

주제가 되는 문제는 정해 놓지만 그 이외의 것은 개방되어 있어 학생은 능동적인 학습자로, 교사는 반성적인 실행자로, 교수단원은 체계적으로 진화하는 디자인과학으로서의 역할을 하게 된다([36]).

구조를 가르쳐야 한다고 주장하는 대표적 교육자로 Bruner와 Freudenthal을 들 수 있다. Bruner는 수학의 구조를 이미 완성된 것으로 보고 고정된 지식 체계로서의 추상적 구조를 출발점으로 하여 그것을 학생들의 발달 단계에 맞게 초등화하고자 한다. 반면, Freudenthal은 수학의 구조를 고정된 것이 아니라 현실적 맥락을 확장해 감에 따라 계속 변화하고 재구성되는 것으로 본다. 따라서 구조가 발생할 수 있는 현실적 맥락에서 출발하여 심상을 구성하고 형식화하는 과정을 거쳐서 추상적 구조에 이르기까지 수준의 비약이 이루어지는 동안 구조를 이해하게 한다([11, pp.122-124]). 구조를 가르치고자 한다면 Freudenthal의 방식을 따라야 할 것이다. 자칫 그 구성이 반대가 되면 학습자에게 결과로서의 자유만을 앞세우게 되어 자유의 패러독스 상황을 야기하게 될 것이다. 곧 구조를 체득하면서 학습자가 자유를 얻게 하려면 학습자 자신이 구조를 발견하면서 추상적 구조에 이르게 해야 할 것이다.

Cantor는 수학의 본질을 자유라고 했다. 이는 수학 그 자체에 자유의 요소를 포함하고 있어 수학을 하면 자유를 얻게 된다는 말로 해석할 수 있다. 수학에서 얻는 자유란 공리와 구조로부터 오는 절제된 자유이다. 이 자유는 수학의 생명이라 할 일관성으로부터 오는 것이므로 일관성이 축이 되어 구조로서의 수학을 경험하게 해야 한다. 결과로서의 자유를 지향하는 수학교육의 모습은 이런 것이어야 한다.

3.2 방법론

방법론은 20세기 최고의 수리논리학자이며 과학철학자, 그리고 형이상학자로 여러 분야에 업적을 남겼다고 일컬어지는 Whitehead의 교육이론을 적용하여 제시해 보고자 한다. 그의 중심적 견해는, 교육의 처음에도 그리고 끝에도 자유가 있지만 그 중간에 자유를 종속적으로 보는 하나의 규율 단계가 있다는 것이다. Whitehead([34, p.94])는 지혜에 이르는 유일한 길이 자유롭게 지식에 직면하는 것이라고 보고, 자유와 규율을 자연스러운 변화에 적응케 하여 인격의 발달을 도모하고자 한다. 이 때, 자유와 규율의 율동적인 조정을 그는 '교육의 리듬'이라고 부른다.

Whitehead([34])는 생활의 본질을 주기로 파악하면서 정신발달에도 주기적인 되풀이를 동반한 미묘한 주기가 있다고 한다. 주기 속에는 종속되는 주기가 있으며 되풀이되는 틀 속에는 본질적인 차이가 있는데 Whitehead는 이를 '리듬'이라고 부른다. Hegel이 정 · 반 · 합이라고 부른 3단계의 진보와 유사하기는 하지만 Whitehead는 지성의 발달과 연관시켜서 이 3단계를 로맨스의 단계, 정밀화의 단계, 일반화(종합화)의 단계로 각각 명명한다.

먼저 로맨스의 단계는 사고의 주제가 신선한 생기를 띠고 있으며 여러 가능성과 연결되어 있고 낭만적 정서가 있는 단계이다. 낭만적 정서란 있는 그대로의 사실로부터

미처 탐구하지 못했던 사실들 간의 관계성의 중요함을 최초로 깨닫는 데서 오는 흥분을 말한다. 예를 들면 이원일차연립방정식에서 각각의 방정식을 좌표평면에 그래프로 나타내었을 때, 두 그래프의 교점과 연립방정식의 해는 어떤 관련이 있는 것 같다는 가능성을 문득 깨달을 때, 낭만적 정서가 만들어지는 것이다. 진공 속의 마음은 교육할 수 없다. 이미 마음속에 움직이기 시작한 발효가 있어야 교육이 이루어지므로 발효시키는 단계인 로맨스 단계는 매우 중요하다.

두 번째 정밀화의 단계는 지식이 현저하게 증가하는 단계로 관계의 확대보다는 계통적인 조직화와 정확성이 우선한다. 이 단계에서는 여러 사실들을 일정한 방식으로 조금씩 분석하는 것을 학생들이 수용하도록 함으로써 전진해 간다. 로맨스 단계의 사실들은 가능성을 갖는 관념들이지만, 정밀화의 단계에서의 사실들은 조직화된 질서 속에서 얻게 된 것들이다. 앞의 예와 연결하면 이원일차연립방정식의 해와 그래프의 교점은 표현 방식이 다를 뿐이며, 구하는 해는 그래프의 교점으로부터 얻을 수 있다는 것, 그러나 그래프의 교점은 도해로부터 얻는 것이어서 정확하지 않으므로 수식에 의존한다는 것, 그래서 수식의 도움으로 이원일차연립방정식의 해를 구하는 것이 필요하며 그 방법을 직접 습득한다는 것 등으로 진전한다.

세 번째 일반화(종합화)의 단계는 정밀한 학습의 결실기로, 명확해진 관념과 적절한 기술이라는 이점을 가지고 로맨티시즘으로 되돌아오는 단계이다. 앞의 예와 연결하면 어떤 연립방정식에서든 그것의 해는 그 방정식들을 나타내는 각각의 그래프의 교점과 일치하게 된다는 사실로 일반화될 수 있다. 차수를 높이면 이차방정식과 일차방정식이 연립된 방정식의 해는 좌표평면에서 곡선과 직선의 교점이 되는 것으로 관점을 넓힐 수 있다. 또 차원을 높이면 3차원에서 평면의 교선인 직선의 방정식은 삼원일차연립방정식 두 개가 연립되었을 때의 해와 관계가 있음에 눈을 돌리게 된다. 이것은 또 다른 탐구의 시작이므로 또 다른 주기의 시작인 로맨스 단계로 볼 수 있다.

Whitehead([34, pp.105-106])는 일반화의 단계에 이르면 로맨스를 향한 반작용이 생기게 된다고 한다. 일반화 단계를 막 마친 부분의 일반적 규칙이나 법칙에 관한 공식 및 상세한 예증을 명확하게 이해하게 될 때, 학생들은 이제 손 안에 쥔 새로운 무기를 구사하고 싶게 되며 로맨스 단계의 산만한 모험심으로 되돌아가게 되는 것이다. 하지만 이 때의 산만함은 처음 로맨스 단계의 산만함에서 한 차원 높여진 것이며, 학생의 정신은 오합지졸이 아니라 훈련된 한 연대로 성장하게 되는 것이다. 따라서 Whitehead의 주기는 진보의 형태를 띤다. 주기적 진보(cyclic advance)는 교육 리듬의 본질이라 할 수 있다.

Wittmann의 교수단원과 관련지어보면 문제가 제기되어 탐구가 시작되는 단계가 로맨스 단계이며, 문제를 해결하여 해를 구하는 단계가 정밀화의 단계, 문제를 확장하여 일반화된 탐구를 하는 단계가 일반화의 단계가 된다. 그리고 새로운 문제를 제기하는 단계는 또 다른 주기의 시작으로서의 로맨스 단계가 된다.

Peters([28, pp.58-59])는 Whitehead의 교육의 단계를 다음과 같이 해석한다. 로맨스 단계에서 흥미가 유발되고 정밀화 단계에서 흥미가 도야되며 일반화 단계에서는 자기 자신의 힘으로 교육을 해 나간다. 일반화 단계에서 개인은 활동의 안에 들어와 있으며 그 활동의 내용, 그 내용을 만들어 낸 방법을 완전히 몸에 익힌다. 이제 개인은 그 활동을 혼자서 수정하고 발달시키며 새로운 길을 발명하고 개척할 위치에 서게 된다. Peters는 공적 전통을 배경으로 할 때 개인의 독창성이 나타난다고 본다. Peters의 입장에서는 로맨스 단계와 정밀화 단계를, 공적 전통에 입문하여 공적 체계를 자신의 것으로 만드는 과정으로 보고 일반화의 단계에 이르러서는 독창성을 발휘하여 스스로 탐구할 수 있는 것으로 본다.

위의 3단계와 맞물리는 것이 앞에서 언급한 자유와 규율의 리듬이다. 그는 '규율'에 의해 사실이 지식으로 발전하고 '자유'로워야 지식이 지혜로 이르게 된다고 말한다. Whitehead([34, pp.93-95])는 자유 및 규율과 연관지어 '로맨스 단계'를 최초의 자유 기간, '정밀화 단계'를 중간의 규율 기간, '일반화 단계'를 최종의 자유 기간이라고 한다. 그리고 자유→규율→자유도 주기를 이루면서 교육이 성립된다고 본다.

이 때의 규율은 자기-규율이며 이 자율성은 폭 넓은 자유의지의 활용으로만 획득할 수 있다. 자기-규율로서의 정밀화 단계를 잘 이끌어 나가기 위해서는 로맨스 단계의 자유를 충분히 누려야 할 것이다. 학습에 대한 자연스러운 열망과 사색활동을 하는 습관은 자유로운 상태에서 비롯되는 것이기 때문이다. Whitehead의 3단계가 지적인 성장을 이루어가는 단계라면 자유와 규율의 반복은 3단계가 진행되는 데에 필요한 외적인 조건이 될 것이다.

Whitehead의 교육의 리듬을 살펴볼 때, 첫 단계의 자유는 과정으로서의 자유와, 마지막 단계에서의 자유는 결과로서의 자유와 상응한다. 첫 단계의 자유는 하위자아가 겪는 자아이며, 마지막 단계의 자유는 상위자아가 겪는 자유이다. 인간주의 교육관에서 소홀히 한 '결과로서의 자유'를 놓치지 않아야 하며, 자유교육관에서 소홀히 한 '과정으로서의 자유'를 놓치지 않으려는 방안이라 할 것이다.

자유를 추구하는 수학교육에서는 Whitehead의 3단계를 어떤 형태로 구현하여 과정으로서의 자유와 결과로서의 자유를 실현해야 하는가를 다른 수학교육적 논의와 관련하여 생각해 볼 수 있다. Piaget의 내용과 형식, Freudenthal의 현상과 본질, van Hieles의 수단과 대상이 교대, 반복되는 것처럼 Whitehead의 로맨스의 단계, 정밀화의 단계, 일반화의 단계가 교대, 반복되는 것이다. 그러나 Whitehead의 경우에는 학습자가 다루는 개념의 상태에 초점을 둔 것이 아니라 개념을 습득하는 과정에서의 학습자의 지성 발달 상태에 초점을 두고 있다는 점에서 차이가 있다.

Whitehead의 로맨스의 단계에서는 Piaget의 내용, Freudenthal의 현상, van Hieles의 수단을 다루는 단계라 할 수 있다. 따라서 자유로이 조작하고 사고하는 단계이어야 하고 수학적 내용은 구체적이어야 한다. Whitehead의 정밀화 단계에서는 Piaget의 형식, Freudenthal의 본질, van Hieles의 대상을 얻고자 하는 단계이다. 따라서 내성적

활동이 중요시되고 개념의 정착을 위해 애써야 하며 이를 통해 수학적 내용이 세련되어진다. Whitehead의 일반화 단계에서는 이전 단계에서의 Piaget의 형식, Freudenthal의 본질, van Hieles의 대상이 다음 수준으로 도약이 일어나게 된다(표 1).

Whitehead의 단계	Piaget의 연구 대상	Freudenthal의 연구 대상	van Hieles의 연구 대상
로맨스 단계	내용	현상	수단
정밀화 단계	형식	본질	대상
일반화 단계	형식→내용	본질→현상	대상→수단

<표 1> Whitehead의 3단계와 다른 논의의 비교

그런데 다른 수학적 논의들과 관련하여 Whitehead의 논의들을 살펴보면 Whitehead의 일반화 단계는 정밀화 단계와 다음 주기의 로맨스 단계가 얽힌 단계로 보인다. Whitehead의 이론은 계속되는 주기 속에 창조적 전진이 있음을 강조하고 있기에 이전 주기의 마무리와 이후 새로운 주기의 시작이 함께 어우러진 일반화 단계가 필요하다. 결국 일반화 단계는 이전 주기의 정밀화 단계와 이후 새로운 주기의 로맨스 단계가 공존하는 단계이며 이후에 새로운 주기로 이어짐을 강조하는 단계라 할 수 있다. 그러나 수학에서는 개념의 특성상 계속하여 새로운 단계로 이어진다는 것이 명확하므로 일반화 단계를 굳이 설정할 필요는 없다고 할 수 있다. 따라서 다음 절의 실제에 적용하는 방안을 구성할 때에는 Whitehead의 3단계 중 로맨스의 단계와 정밀화의 단계에 중점을 두기로 한다. 그런데 이렇게 두 개의 단계로 구분지어 본다면, 로맨스의 단계에서는 이전 주기의 일반화된 개념에서 자연스럽게 새로운 확장에 대한 생각을 품어야 하고, 정밀화 단계에서는 개념의 정련에만 그치는 게 아니라 그 주기에서의 일반화까지 이어져야 한다.

Whitehead가 붙인 이름과 혼동되지 않도록 여기에서는 두 단계의 이름을 발아기(發芽期)와 결실기(結實期)로 명명한다. 곧 발아기는 씨앗이 갖는 가능성처럼 여러 가능성을 가지고 탐색하면서 개념을 성장시켜 가는 단계이고 결실기는 탐색 후 개념의 열매를 맺는 단계이다. 결실기에서의 열매는 후속되는 새로운 주기의 발아를 가능케 하는 씨앗이 되어 창조적 전진을 가능하게 한다. 또한 발아기에서의의 씨앗은 이전 주기의 결실로 맺어진 열매이므로 잠재력이 풍부한 씨앗이라 할 수 있겠다. 따라서 발아기는 새로운 개념이 발효되는 기간이면서 충분한 자유가 필요한 기간이라는 것, 학습자가 과정으로서의 자유를 충분히 누려야 결실기로 이어질 수 있다는 것에 유의할 필요가 있다. 이제 수업 실제에의 적용 방안을 구상해 보기로 한다.

3.3 수업의 실제

지금까지 논의한 바에 따르면 수학 수업이 이루어지는 중에 자유를 얻기 위해서는 우선 학습할 내용이 수학의 구조에 초점을 맞추고 있어야 한다. 피상적으로는 다른 수업과 차이가 없어 보일지도 모르지만, 내용의 제시 순서와 발문 방법 등을 주도면밀하게 계획한다면 학습자가 작은 실마리로부터 시작하여 거대한 개념의 덩어리에 다가가면서 구조를 느낄 수 있게 될 것이다.

다음에 제시하는 내용은 고등학교 1학년 학생이 배우는 수학 10-나의 '정점을 지나는 방정식'에서 시작한다. 직선이라는 도형의 특성상 실제로 직선을 그려 정점을 찾아낼 수도 있겠지만, 이는 항등식의 성질을 이용할 수도 있다. 그러나 항등식의 성질만을 강조하면 자칫 좌표평면에서 도형이 갖는 의미를 잃을 수도 있다. 따라서 그 의미를 풍부히 하기 위해서는 두 가지 방식의 접근을 모두 유도하여야 하며, 가능한 여러 접근을 허용하여 자유로운 탐색 활동이 일어나게 해야 한다. 탐색 활동 가운데 학습자는 과정으로서의 자유를 누리게 될 것이다. 여러 논의 끝에 정련된 개념을 얻게 되는데 이때 학습자는 결과로서의 자유를 잠시 맛볼 수 있다. 그러나 여기서 종결되는 것이 아니다. 항등식의 개념을 확장하면 두 직선의 교점과 다른 한 점을 지나는 직선의 방정식을 쉽게 구할 수 있다. 이는 직선에서만 성립하는 개념이 아니다. 탐색과 정련을 반복하면서, 과정으로서의 자유와 결과로서의 자유를 반복하면서, 직선에서 원으로, 평면도형에서 공간도형으로 계속 확장해갈 수 있다. 확장이 이루어지는 가운데 학습자는 일반화를 거듭하게 되고 무언가 공통의 통로가 있음을 발견하게 될 것이다.

수학 10-가에서 학습하는 동안 무의미할 수도 있었던 항등식의 개념은 가시적인 도형을 만나면서 유용성을 얻게 된다. 이 때의 유용성은 일회적인 유용성이 아니라 계속적인 확장에 사용됨으로써 빛을 발하는 유용성이다. 곧 구조에 유념하여 구성하는 수업안은 개념의 확장을 용이하게 하며 확장된 개념 속에서 구조의 정수(精髓)를 발견하게 되고 유용성까지도 느낄 수 있게 한다.

앞에서 언급한 것처럼 수업 과정 중에 학습자의 자유가 구현되도록 해야 할 것인데 이 때 교사의 역할은 막중하다. 탐색 과정 중에 충분히 자유로운 활동을 할 수 있는 상황을 만들어야 하고, 일반화를 하면서 개념이 정련되어야 하는 과정에서는 정밀함과 치밀함이 발현되도록 학습 환경을 조성해야 한다. 또한 학습자가 정련된 개념을 얻었을 때에는 그것이 고갯마루임을 느낄 수 있게 해 주어야 하고, 지금의 이 고갯마루에서 멈출 것이 아니라 이보다 더 높은 고갯마루를 향할 수 있도록 눈을 돌리게 해야 한다. 그리고 눈을 돌렸을 때에는 다시금 자유로운 탐색 활동이 일어나는 여건을 만들어야 한다.

이제 예시안을 보면서 자유를 추구하는 수학교육에 대한 전망을 타진해 보기로 한다.

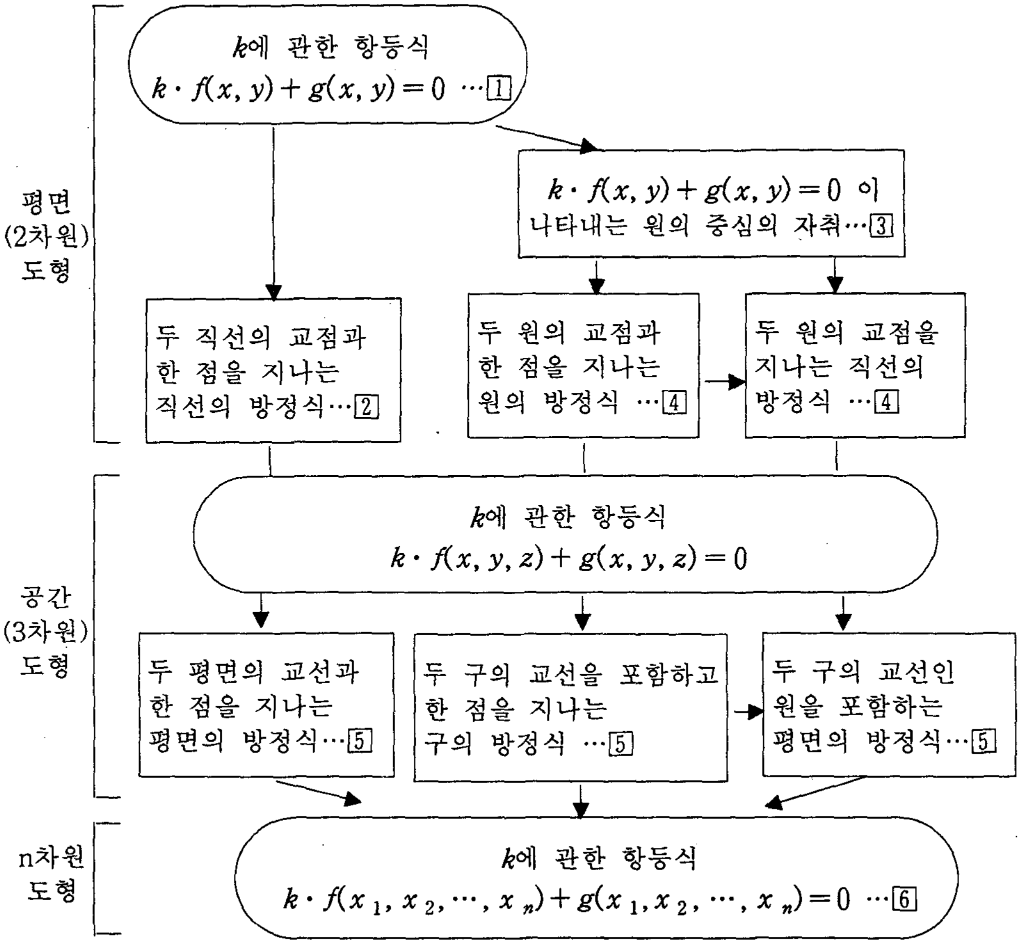
【1】 관련 단원

항등식(수학10-가), 직선의 방정식(수학10-나), 원의 방정식(수학10-나), 직선과 평면의 방정식(수학Ⅱ), 구의 방정식(수학Ⅱ)

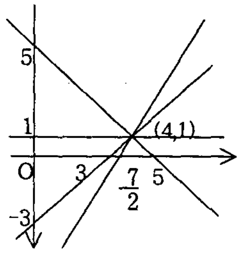
【2】 학습 목표

- 항등식 개념을 이용하여 두 도형의 교점 또는 교선을 지나는 도형의 방정식을 구할 수 있다.
- 평면도형에서 성립하는 성질을 공간도형 및 n차원 도형에서의 성질로 확장하려는 생각을 품게 한다.

【3】 개념 구조도



【4】 수업 전개

단계	교수-학습 활동	단계의 특성
$\boxed{1}$ 발 아 기	◈ 무수히 많은 직선을 나타내는 직선의 방정식이 일정한 점을 나타내는 경우가 있을까? ◆ 직선 $kx-y-4k+1=0$이 k의 값에 관계없이 지나는 점의 좌표가 있을까? 구해보자. ① k에 직접 값을 대입하여 직선을 그려본다. $k=-1$: $x+y-5=0$ $k=\ 0$: $y-1=0$ $k=\ 1$: $x-y-3=0$ $k=\ 2$: $2x-y-7=0$ 항상 (4, 1)을 지남을 알 수 있다.  ② 'k의 값에 관계없이'에 초점을 맞추어 항등식 개념을 상기하면, $k(x-4)+(-y+1)=0$ 에서 $x=4$, $y=1$ 즉 직선 $x=4$, $y=1$ 의 교점인 (4, 1)을 지난다.	씨앗이 되는 생각의 발아 과정으로서의 자유를 누리면서 다양한 접근과 탐색 시도
결 실 기	• ①, ②에서 수학적 의미를 함축하는 방법에 대해 논의한다. ◉ 직선 $k(ax+by+c)+(dx+ey+f)=0$은 k의 값에 관계없이 두 직선 $ax+by+c=0$, $dx+ey+f=0$ 의 교점을 지난다.	정련 및 일반화로 개념의 결실
$\boxed{2}$ 발 아 기	◈ 그렇다면, 두 직선의 교점을 지나는 직선의 식을 k를 이용하여 $k(ax+by+c)+(dx+ey+f)=0$과 같이 나타낼 수 있지 않을까? ◆ 두 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$ 의 교점과 점 (-2, 2)를 지나는 직선의 방정식을 구해보자. ① $k(2x+y+1)+(x-y+2)=0$ …(*)은 두 직선의 교점을 지나는 무수히 많은 직선을 모두 표현하는 방정식이다. 이 때, 점 (-2, 2)도 이 직선 위의 점이므로 (*)에 $x=-2$, $y=2$를 대입하면 $k=-2$ $\therefore\ x+y=0$ ② 두 직선의 교점을 구하면 (-1, 1) (-1, 1)과 (-2, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $y=-x$	새로운 주기의 시작, 이전 주기의 열매가 이번 주기의 씨앗이 됨.
결 실 기	• ①, ②에서 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$에 모두 적용 가능한 ①의 수학적 의미에 대해 논의한다. ◉ 두 직선 $ax+by+c=0$, $dx+ey+f=0$의 교점을 지나는 직선의 식은 k를 이용하여 $k(ax+by+c)+(dx+ey+f)=0$과 같이 나타낼 수 있다.	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$에 모두 활용 가능한 개념으로 정련
$\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$의 발아기와 결실기를 거치면서 개념의 발아와 정련이 계속된 후 $\boxed{6}$에 이른다.		
$\boxed{6}$ 발 아 기	◈ 평면도형과 공간도형뿐만 아니라 n차원 도형에서도 두 도형 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$, $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$의 공통부분을 포함하는 도형의 방정식은 $k\cdot f(x_1, x_2, \cdots, x_n)+g(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$으로 나타낼 수 있지 않을까?	n차원 도형으로 확장하려는 생각의 발아

4. 결론

이상의 논의를 통해 본 논문에서는 다음의 결론을 도출하였다.

첫째, 수학교육에서는 과정의 자유를 누리지 않고는 결과로서의 자유에 도달할 수 없다는 것이다. 수학의 개념들은 의미 있게 학습하였을 때에만 그 개념을 활용할 수 있다. 그런데 의미 있게 학습하려면 학습자가 충분한 탐색 활동을 통해 개념에 대한 발효가 이루어졌을 때에만 가능한 것이다. 즉 과정으로서의 자유를 만끽하면서 얻은 지식이어야 활용가능한 지식이 되어 실질적인 능력을 갖추게 하므로 이 때에 학습자는 결과로서의 자유를 누릴 수 있는 것이다. 이는 Spranger가 말하는, 스스로를 낮은 단계에서 풀어놓아 더 높은 단계의 기쁨을 맛보게 하는 과정과 같은 것이다. Spranger도 자유를 지향하는 교육은 '자유' 안에서 이루어져야 한다고 역설(力說)하고 있다([7, p.153]).

둘째, 자유를 추구하는 수학교육의 내용은 구조를 담고 있어야 하는데, 구조를 탐색하고 체득하는 과정에서 두 가지 의미의 자유가 반복된다는 것이다. 과정으로서의 자유와 결과로서의 자유는, 마치 씨앗이 발아하고 성장하여 열매를 맺고 그 열매가 다시 씨앗이 되는 것처럼 서로에게 밑거름이 되는 역할을 한다. 이런 의미로 본 논문에서 구분한 발아기와 결실기는 반복의 의미뿐만 아니라 학습자의 수준이 상승된다는 의미, 누려야 할 자유와 얻게 되는 자유의 의미까지 담게 된다. 곧 발아기와 결실기가 반복되면서 학습자는 과정으로서의 자유를 누리고 결과로서의 자유를 얻는 과정을 거듭하게 되며 수학적인 개념은 수준의 계속적인 상승을 일으켜 구조로 통하게 된다.

셋째, 이와 같은 과정에서 가장 중요한 역할을 담당하는 것은 수학교사이다. 수학교사는 좀더 높은 가치를 지향하여 학생들을 이끌어야 한다는 것이다. 현재의 삶의 상황에 일치하는 방식이 아니라 미래의 좀더 나은 삶의 상황에 일치하는 방식으로, 인간성의 이념과 인간의 소명, 인간의 목적에 합치하는 방식으로 교육이 이루어져야 하기 때문이다([25, p.32]). 또한 수학 교사는 학습자의 상황을 파악하여 필요한 여건을 조성하는 데에 주력해야 한다. 과정으로서의 자유가 필요한지 또는 결과로서의 자유를 누리고 있어서 다음 주기로의 도약이 필요한지 학습자의 상황을 파악하고 적절한 환경을 만들어 주어야 할 것이다. 이를 위해서는 교사 자신이 자유의 소중한 의미를 알고 그 기쁨을 향유할 수 있어야 한다. 교사가 먼저 가치를 알고 학생과 공유할 때 교사와 학생 모두 자유에 한 발짝 다가설 수 있으리라 기대된다.

참고 문헌

1. 강홍규, Dewey의 경험주의 수학교육론 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문, 2003.
2. 김용운 · 김용국, 세계수학문화사, 서울: 전파과학사, 1981.
3. 김은산, 니일의 인간교육사상, 서울: 배영사, 1982.
4. 김정환, 페스탈로찌의 교육철학, 서울: 고려대학교 출판부, 1995.
5. 박배훈 외 6인, 수학II 교사용 지도서, 서울: 법문사, 2003.
6. 서병훈, 자유의 미학, 서울: (주)나남출판, 2000.
7. 송순재 · 고병헌 · 황덕명 엮음, 영혼의 성장과 자유를 위한 교사론, 인천: 내일을 여는 책, 2002.
8. 우정호, '인간교육'을 위한 주요교과로서의 학교수학, 대한수학교육학회 수학교육학 논총 26(2004), 1-20.
9. 이상언, 자유교양교육 이념의 변천과정 연구-18, 19세기 영국의 대학을 중심으로, 고려대학교 대학원 석사학위논문, 1992.
10. 이홍우, 인지학습의 이론, 서울: 교육출판사, 1973.
11. 정영옥, Freudenthal의 수학화 학습-지도론 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문, 1998.
12. 차미란, 자유교육과 도덕교육, 서울: 교육과학사, 2001.
13. 최선영, 자유교양교육의 철학적 고찰-서구의 네 사상가를 중심으로-, 고려대학교 대학원 박사학위논문, 1983.
14. Barrow, R., *Moral Philosophy for Education*, London: George Allen & Unwin Ltd, 1975.
15. Berenson, F. M., *Freedom*, In Lloyd, D. I. (Ed.), Philosophy and the teacher, London: Routledge & Kegan Paul, 1979.
16. Berlin, I., *Two Concepts of Liberty*, In Hardy, Henry(Ed.), Liberty: Incorporating Four Essays on Liberty (pp.166-217), London: Oxford University Press, 2002.
17. Bourbaki, N., "*The Architecture of Mathematics*", The American Mathematical Monthly, 15-7(1950), 221-232.
18. Boyer, C. B., 수학의 역사, 양영오, 조윤동 역, 서울: 경문사, 2000.
19. Broudy, H. S., 교육철학, 이인기, 서명원 역, 서울: 을유문화사, 1963.
20. Brown, S. I., *Towards Humanistic Mathematics*, In Bishop, A. J. et al. (Eds.), International Handbook of Mathematics Education (pp.511-564), London: Kluwer Academic Pubilshers, 1996.
21. Dewey, J., 경험과 교육, 오천석 역, 서울: 박영사, 1980.
22. Fromm, E., 자유에서의 도피, 이상두 역, 서울: 범우사, 1992.

23. Hilgard, E. R. & Bower, G. H., *Theories of Learning*, New York: Appleton-Century-Crofts, 1966.
24. Hirst, P. H., *Knowledge and the curriculum*: A collection of philosophical papers, London: Routledge & Kegan Paul, 1974.
25. Kant, I., 칸트의 교육학 강의, 조관성 역, 서울: 철학과 현실사, 2001.
26. Mill, J. S., 자유론, 김형철 역, 서울: 서광사, 1992.
27. Patterson, C. H., 인간주의 교육, 장상호 역, 서울: 박영사, 1980.
28. Peters, R. S., 윤리학과 교육, 이홍우 역, 서울: 교육과학사, 1980.
29. Piaget, J., Structualism (Maschler, C., trans.), NY: Harper colophon books, 1970.
30. Rousseau, J. J., 에밀, 정영하 역, 서울: 연암사, 2003.
31. Silberman, C. E., 교실의 위기, 배영사 편집실 편역, 서울: 배영사, 1982.
32. Spencer, J. M., 미래를 위한 교육철학, 성기산 역, 서울: 집문당, 1994.
33. Whitehead, A. N., 화이트헤드의 수학에세이, 오채환 역, 서울: 청음사, 2002.
34. Whitehead, A. N., 교육의 목적, 오영환 역, 파주: 궁리출판, 2004.
35. Wittmann, E., "*Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education*", Educational Studies in Mathematics, 15(1984), 25-36.
36. Wittmann, E., "*Mathematics Education as a 'Design Science'*", Educational Studies in Mathematics 29(1995), 355-374.

Freedom Achieved in Mathematics Education

Seokkwan Highschool **Joo Yeon Cha**
Dept. of Mathematics Education, Korea University **Woo Hyung Whang**

The topic in this thesis stems from the current education situation that represses learners' freedom by excessive instruction and compulsory institution, in spite of the education helping learners free from inner prejudice as one of its chief aims. In this thesis, to discuss with an educational aspect, I call the learners' freedom in the learning process 'freedom-in-process' and the learners' freedom as the result of learning 'freedom-as-result'.

Through this discussion, the conclusions are as follows; First, learners who enjoy freedom-in-process get to obtain freedom-as-result in mathematics eduacation. Second, freedom-in-process and freedom-as-result appear repeatedly in the process of looking for and gaining structures. Freedom-in-process and freedom-as-result are both faces of coin, like seed and fruit which are related mutually and fertilized each other. For this purpose, Mathematics teacher must have awareness of the value of freedom, cherish the freedom, and enjoy it with his students.

Key words: freedom, freedom-in-process, freedom-as-result, structures, rhythm of education, sprouting period, fruiting period

2000 Mathematics Subject Classification: 97D20

ZDM Classification: D20

논문 접수: 2006년 6월 심사 완료: 2006년 7월