한국수학사학회지 제19권 제3호(2006년 8월), 95-112

아르키메데스의 《구와 원기둥에 관하여》에 대한 고찰

영남대학교 수학교육과 조정수
chocs@yu.ac.kr

본 논문은 고대 수학자이며 발명가인 아르키메데스의 《구와 원기둥에 관하여》에 대해 고찰한다. 3차원의 공간기하학에 관한 《구와 원기둥에 관하여》에 제시되어 있는 명제들을 통하여 고대 수학자가 어떻게 입체도형을 수학적으로 정복하였으며 이런 고대 수학적 아이디어가 어떻게 현대의 적분개념으로 발달하게 되었는지를 알아보는 것은 현대 수학에 대한 이해를 깊이 있게 함과 동시에 새로운 수학적 아이디어의 개발에 좋은 소재가 될 것으로 기대한다.

주제어 : 아르키메데스, 구, 원기둥, π의 근사값, 소진법, 구결

0. 서론

현재 초등학생들조차도 쉽게 암기하여 사용하고 있는 π라는 상수는 언제, 어떤 과정을 거쳐 원과 관련된 도형이나 입체, 예를 들면 원의 원주와 넓이, 구의 겉넓이와 부피, 원기둥의 겉넓이와 부피, 원뿔의 겉넓이와 부피 등에 나타나게 된 것일까? 이것에 대한 의문을 아르키메데스의 《원의 측정 Measurement of a Circle》과 《구와 원기둥에 관하여 On the Sphere and Cylinder》라는 책의 내용에서 살펴보고자 한다.

《원의 측정》에서는 내접 정다각형과 외접 정다각형의 둘레길이를 구하는 과정을 통하여 π의 근사값을 구하는 방법을 알아보는데 그 이유는 《구와 원기둥에 관하여》의 모든 내용이 바로 이 상수 π로 이루어져 있기 때문이다. 3차원의 공간기하학에 관한 《구와 원기둥에 관하여》에 제시되어 있는 명제들을 통하여 고대 수학자가 어떻게 입체도형을 수학적으로 정복하였으며 이런 고대 수학적 아이디어가 어떻게 현대의 적분개념으로 발달하게 되었는지를 알아보는 것은 현대 수학에 대한 이해를 깊이 있게 함과 동시에 새로운 수학적 아이디어의 개발에 좋은 소재가 될 것으로 기대한다.

1. 아르키메데스의 삶과 그의 업적

아르키메데스(Archimedes)는 현재 이탈리아 남서부에 있는 지중해 최대의 섬 시칠리아섬(영어로는 시실리섬, Sicily)에 있었던 고대 그리스 시대의 도시 시라쿠사에서 기원전 287년경에 태어나서 212년에 죽었다. 그는 기원전 6세기 경의 탈레스(Thales)와 피타고라스(Pythagoras)로부터 서기 4세기 경의 파푸스(Pappus)에 이르기까지의 장구한 그리스 수학역사에 출현했던 위대한 수학자들 중에서 당연히 최고의 수학자였으며 또한 발명가였으며 뒤에서 논의하게 되는 소진법(the method of exhaustion)은 2000년 후에 미적분학의 기초가 될 정도였다([7]).

젊었을 때 아르키메데스는 이집트에서 얼마 동안 있었는데 이때 유명한 알렉산드리아 도서관에서 공부한 것으로 짐작되며 이곳은 유클리드의 영향력이 작용했던 지역이며 또한 유클리드의 제자들과 함께 연구하는 가운데 자연스럽게 유클리드식 전통에 따라 교육을 받았으며 이러한 흔적은 그의 수학 저술 여러 곳에서 쉽게 발견할 수 있다. 나일강 유역에 거주하고 있는 동안 아르키메데스는 낮은 지대의 물을 높은 지대로 끌어올리거나 배의 물을 퍼 올리는 일종의 펌프인 '아르키메데스의 스크류(Archimedes' screw)'를 만들었는데 이 장치는 지금까지도 세계 여러 곳에서 사용되고 있다. 아래 [그림 1]은 1983년 이탈리아에서 아르키메데스의 업적을 기리기 위하여 발행한 기념우표인데 여기에 이 펌프 그림을 실을 정도로 '아르키메데스의 스크류'는 그의 대표적인 발명품이었다([6]).

[그림 1] '아르키메데스의 스크류'가 그려진 1983년도 이탈리아 우표

역사가들에 따르면 로마장군 마르켈루스(Marcellus)가 시라쿠사를 공격했을 때 이 도시를 방어하기 위하여 아르키메데스는 투석기, 기중기, 볼록렌즈, 합성 도르래장치 등을 개발하여 사용했다고 한다. 로마병사에 의해 살해된 아르키메데스는 적이지만 자신을 존경했던 마르켈루스에 의해 매장되었는데 아르키메데스가 가장 자랑스러운 발견으로 여겼던 원기둥에 내접하는 구의 그림을 묘비에 새겨달라는 유언대로 마르켈

루스는 그의 소원을 들어주었다고 한다. 기원전 75년, 로마감찰관 키케로(Cicero)가 시칠리아 섬에 와서 오랜 기간동안 아르키메데스의 무덤을 찾으려고 했지만 실패하다가 겨우 묘비에 새겨진 원기둥에 내접하는 구의 그림을 확인하고서야 아르키메데스의 무덤을 확인할 수 있었다. 하지만 이 무덤은 다시 역사 속으로 사라졌다가 1965년 시라쿠사의 호텔 공사 중에 이 그림이 새겨진 묘비를 우연히 발견함으로써 세상에 다시 그의 무덤의 위치와 존재가 드러나게 되었다.

아르키메데스의 수학적 업적은 그가 남긴 책에서 알 수 있는데 현재까지 전해지는 책은 다음의 9권이다. 실제로 아르키메데스가 이들 9권의 책을 어떤 순서로 저술했는지는 분명하지 않지만 이들의 연대순서는 Heath의 제안을 따라 나열한 것이다([12]).

- 평면평형(平衡)에 관하여(On plane equilibriums, 2권)
- 포물선의 구적법(Quadrature of the parabola)
- 구와 원기둥에 관하여(On the sphere and cylinder, 2권)
- 나선(螺旋)에 관하여(On spirals)
- 의원추(擬圓錐)와 회전타원체에 관하여(On conoids and spheroids)
- 부체(浮體)에 관하여(On floating bodies, 2권)
- 원의 측정(Measurement of a circle)
- 모레계산가(The sandreckoner)
- 방법(The method)

이 책들을 수학분야별로 다시 정리해 보면 《원의 측정》, 《포물선의 구적법》, 그리고 《나선에 관하여》는 평면기하에 관한 것이고, 3차원 공간기하학에 관한 것으로는 《구와 원기둥에 관하여》와 《의원추와 회전타원체에 관하여》이며, 응용수학을 다룬 책으로는 《평면평형에 관하여》와 《부체에 관하여》이다([7]). 그리고 《모레계산가》는 산술에 관한 것으로 이 책에서 현대적 기호로 표현하면 8×10^{63}에 해당하는 수를 표현할 수 있는 수체계를 제안하고 있다. 이 수는 우주를 가득 채울 수 있을 정도의 모래 알갱이 수라고 한다. 또한 《방법》이란 책은 코펜하겐 대학교의 고대철학 교수였던 하이베르그(J. L. Heiberg)가 1906년 여름 10세기에 작성된 것으로 보이는 고문서를 발견하였는데 여기에 이 책도 포함되어 있었다. 이 《방법》이란 책의 중요성은 아르키메데스가 자신의 많은 정리를 발견하는데 사용했던 '방법'에 관한 정보를 주기 때문이다. 이 '방법'은 오늘날의 적분법에 의해 정확하게 표현되는 것으로 아르키메데스는 어떤 결과를 발견하기위하여 이 '방법'을 사용하였고 일단 결과가 발견된 다음에는 소진법을 사용하여 엄밀하게 증명했다. 이 '방법'은 적분법의 시초가 되었다.

2. 소진법을 활용한 아르키메데스의 π의 근사값 구하기

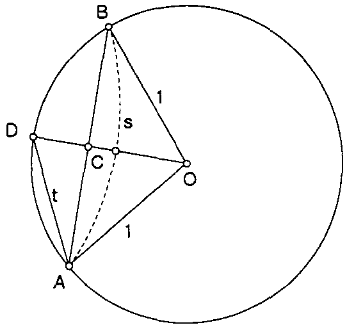
기원전 4세기, 철학자인 제논의 패러독스(Zeno's Paradox)를 해결하지 못했던 그리스인들은 무한의 개념을 두려운 존재로만 생각하고 있었는데 아르키메데스의 소진법(the method of exhaustion)이라는 방법에 의해 현실적으로 접근할 수 있게 되었다. 이 소진법은 원래 유덕서스(또는 에우독소스, Eudoxus, 370 B.C.)에 의해서 그 기원을 가지는데 아르키메데스는 이 방법을 완전하게 발전시켜 π의 근사값을 계산하는데 사용했다([8]). 즉, 아르키메데스는 원에 외접하는 정 6, 12, 24, 48, 96각형의 둘레를 구하고 또 원에 내접하는 정 6, 12, 24, 48, 96각형의 둘레를 구해서 그 차이를 구했다. 원은 원을 감싸고 있는 외접다각형과 내접다각형 사이에 '끼여 있기' 때문에 π의 실제값은 이 두 값 사이에 있어야만 한다. 아르키메데스는 무한 개념을 명시적으로 밝히지는 않았지만 소진법을 활용하여 변의 수를 무한히 증가시켜나가면 정다각형의 둘레가 원주에 근사한다는 생각으로부터 π를 계산하였고, 또한 《포물선의 구적법》에서는 포물선과 선분으로 둘러싸인 면적을 구하는데도 이 소진법을 사용하여 무한과 극한의 개념의 시작을 알렸으며 이것은 그로부터 2000년 후에 미적분학의 발생에 주춧돌 역할을 하게 되었다.

린드 파피루스에 따르면 π값을 $(\frac{4}{3})^3$, 약 3.16069라고 했고, 바빌론 시대 때에는 3이라 했다고 한다. 이러한 고대의 π값 계산 방법은 원주와 지름을 실제로 측정하는 식이었다. 그리스인들은 π의 값을 '원주와 지름의 비'로 고안한 최초의 사람들이었다고 한다. 그리고 π값을 측정이 아닌 수학적 과정을 통해서 계산하는 방법을 처음으로 발견했다고 한다. 소진법을 이용한 아르키메데스의 방법을 보면 한 원에 대해서 점점 많은 수의 변을 가지는 외접 정다각형을 계속 만들어 간다. 변의 개수가 늘어날수록 이 외접 다각형은 보다 빈틈없이 원을 감싸게 되어 변의 둘레는 원주의 길이에 근사하게 된다. 마찬가지로 내접 정다각형을 가지고 이런 식으로 계속해 나가면 변의 수가 많아질수록 원의 면적은 소진되어 변의 둘레는 원주의 길이에 근사하게 된다. 그래서 π의 값은 이 두 근사치의 사이에 존재하게 된다는 것이다. 아르키메데스는 정 6, 12, 24, 48, 96각형을 가지고 이 방법에 따라 π의 근사값을 계산했는데, 외접하는 정 96각형의 둘레를 계산해서 얻어진 π의 근사값은 3.14271이었고 내접하는 정 96각형의 둘레를 계산해서 얻어진 값은 3.14103이었다. 여기서는 내접 정다각형을 사용해서 π의 근사값을 구하는 방법을 살펴보고자 한다([11], [13]).

먼저 다음 [그림 2]와 같이 내접 정 n각형의 한 변의 길이 s와 내접 정 $2n$각형의 한 변의 길이 t 사이의 관계를 증명하려고 한다. 이들 정다각형들은 같은 단위원에 내접하는 것으로 가정한다. 삼각형 OAB는 이등변삼각형이고 $\overline{OD}$는 정 n각형의 한

변의 길이 $\overline{AB}$를 수직이등분한다. 그래서

$$\overline{AC}=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}s$$



[그림 2] 내접 정 n각형과 정 $2n$각형의 한 변의 길이 관계

$$\angle ACO=90^\circ \text{ 이므로}$$

$$\overline{OC}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{AC}^2}=\sqrt{1-(\frac{s}{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{4-s^2}}{2}$$

그런데 $\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=1-\frac{\sqrt{4-s^2}}{2}$ 이다. 따라서, 삼각형 ACD는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해서

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC^2}+\overline{CD^2}}$$

$$t=\sqrt{(\frac{s}{2})^2+(1-\frac{\sqrt{4-s^2}}{2})^2}=\sqrt{\frac{s^2}{4}+1-\sqrt{4-s^2}+\frac{4-s^2}{4}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{4-s^2}}$$

따라서,

내접 정$2n$각형 한 변의 길이 $t=\sqrt{2-\sqrt{4-s^2}}$ (s는 내접 정 n각형 한 변의 길이) 이다.

내접하는 정6각형의 원주의 길이는 6이므로, $s=1$이 된다. 그러면 내접하는 정12각형 한 변의 길이는

$$\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

이 된다. 이 값을 다시 s로 하면 내접하는 정24각형 한 변의 길이는

$$\sqrt{2-\sqrt{4-(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2}}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

이 된다. 이런 식으로 계속 계산을 해 나가면, 내접하는 정96각형 한 변의 길이는

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

이 된다. 따라서, 원주의 길이와 내접하는 정 96각형의 둘레의 길이가 근사한다고 하면

$$2\pi \approx 96 \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$\therefore\ \pi \approx \frac{96 \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}=3.14103$$

이다.

《원의 측정》에서 아르키메데스는 정 96각형까지 구했지만 이 과정을 계속해서 내접하는 정 768각형의 둘레의 길이를 구해보면 마찬가지로 원주의 길이에 근사하게 되므로 π의 값은 다음과 같다.

$$2\pi \approx 768 \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}$$

$$\therefore\ \pi \approx \frac{768 \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}}{2}=3.14158377016\cdots$$

이런 과정을 거쳐 내접 정다각형과 외접 정다각형의 둘레의 길이를 구해보면 다음 표와 같다.

변의 수	내접 정 각형 둘레길이	외접 정 각형 둘레길이
3	2.59808	3.19615
6	3.00000	3.46410
12	3.10583	3.21539
24	3.13262	3.15966
48	3.13935	3.14609
96	3.14103	3.14271
192	3.14145	3.14187

이런 식으로 동일한 단위원 내에서 내접 정다각형과 외접 정다각형의 둘레의 길이를 계속해서 구해나가면, 결국 두 다각형 사이에 존재했던 원의 면적은 소진하게 된다. 아르키메데스는 이처럼 소진법을 완벽하게 사용하여 내접 정다각형과 외접 정다각형의 둘레길이를 구했는데 이렇게 해서 구한 π값을 《원의 측정》의 명제 3에서 "원의 원주와 지름의 비는 $3\frac{10}{71}$보다 크고 $3\frac{1}{7}$보다는 작다"라고 제시하였다. 이것을 현대적 용어로 표현하면 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$이고, 이것을 소수로 다시 나타내면 $3.140845\cdots < \pi < 3.142857\cdots$이 되어 현재 사용하고 있는 π값과 비교할 때 소수 둘째자리까지 정확함을 알 수 있다([10]).

따라서 현재 사용하고 있는 π값과 아르키메데스가 소진법을 사용해서 구한 π의 값은 정 768각형의 경우 소수 넷째자리 정확하게 일치하고 있음을 알 수 있다. 그런데 소진법을 이용한 π에 대한 이러한 근사값의 계산은 아르키메데스로 하여금 평면도형인 원의 넓이와 원주의 길이 그리고 구, 원기둥, 원뿔 등의 입체도형의 겉넓이와 부피 등을 나타내는 공식에 π를 상수로 사용할 수 있는 근거를 마련해 주었다는 점에서 그 중요성과 가치가 높다고 본다.

3. 아르키메데스의 《구와 원기둥에 관하여》

아르키메데스의 방대하고 놀라운 업적 중에서도 《구와 원기둥에 관하여》는 그의 최고의 걸작품으로 간주되는 것으로 두꺼운 두 권으로 구성된 책이다. 아르키메데스는 이 책에서 구를 비롯하여 구와 관련된 입체에 대한 부피와 겉넓이를 구했다. 그의 또 다른 저서인 《원의 측정》에서 이차원 도형인 원의 넓이, 원주의 길이, 원의 지름의 길이를 구하고 또 이들 사이의 관계를 이끌어내는데 성공했으며 이 책에서는 삼차원 입체에 대해서도 성공하고 있음을 볼 수 있다. 아르키메데스는 《구와 원기둥에 관하여》에서 구의 부피와 넓이에 관한 그의 연구결과를 그 당시 이미 잘 알려져 있던 원기둥 및 원뿔과 비교하여 제시하고 있는데 여기서는 그에 대한 몇 가지 명제들에 대하여 살펴보고자 한다([10]).

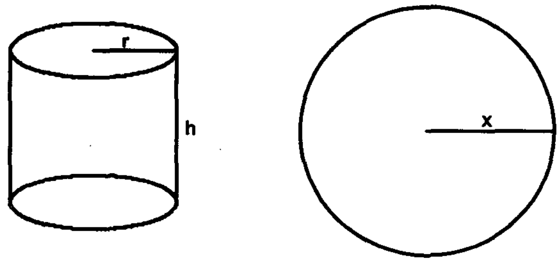
명제 13 (원기둥의 옆면의 겉넓이)
밑면을 제외한 직각원기둥의 겉넓이는 이 원기둥의 옆면과 밑면의 지름 사이의 비례중항을 반지름으로 하는 원의 넓이와 같다.

이 명제를 현대적 용어로 표현하면 다음과 같다.

원기둥의 옆면의 겉넓이(반지름 r, 높이 h인) = 원의 넓이(반지름 x인)

여기서 이 비례중항을 식으로 표현하면 $h : x = x : 2r$이므로 $x^2 = 2rh$가 되어 잘 알려진 다음 공식을 얻을 수 있다.

원기둥의 옆면의 겉넓이 = 원의 넓이 = $\pi x^2 = 2\pi rh$



[그림 3] 명제 13의 그림

명제 33 (구의 겉넓이)
구의 겉넓이는 이 구의 대원의 넓이의 4배와 같다.

이 명제를 현대적 용어로 표현하면 (구의 겉넓이) = $4\pi r^2$이 된다. 이를 쉽게 표현하면 어떤 구를 페인트로 칠하고자 할 때 필요한 페인트의 양은 대원을 칠하는데 필요한 페인트 양의 4배와 같다는 것이다. 이 사실을 증명하기 위하여 아르키메데스는 《원의 측정》에서 π와 관련된 원의 넓이를 구하는 과정에서 사용했던 이중귀류법(double reduction to absurdity)을 다시 사용했다. 즉, 구의 겉넓이가 대원 넓이의 4배보다 클 수가 없음을 증명했고 동시에 구의 겉넓이가 대원 넓이의 4배보다 작을 수도 없음을 증명함으로써 구의 겉넓이는 대원 넓이의 4배와 같을 수밖에 없다는 사실을 증명한 것이다.

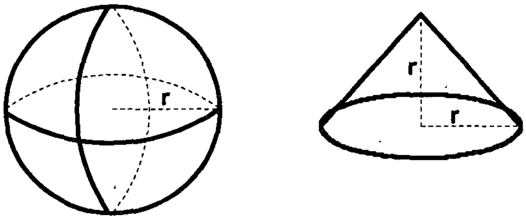
명제 34 (구의 부피)
구의 부피는 이 구의 대원을 밑면으로 하고 이 구의 반지름을 높이로 하는 원뿔 부피의 4배와 같다.

구의 반지름을 r이라 할 때 원뿔의 부피는 다음과 같다.

$$\text{원뿔의 부피} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 r = \frac{1}{3}\pi r^3$$

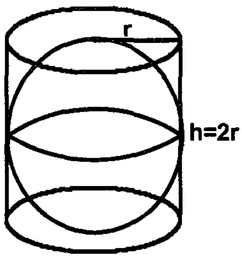
따라서 명제 34를 현대적 용어를 사용하여 표현하면 다음의 유명한 공식이 된다.

$$구의\ 부피 = 4\times 원뿔의\ 부피 = \frac{4}{3}\pi r^3$$



[그림 4] 명제 34의 그림

명제 33과 34의 증명을 바탕으로 아르키메데스는 [그림 5]와 같이 구를 외접하는 원기둥에 대해 이 원기둥의 겉넓이와 부피는 구의 겉넓이와 부피의 한 배 반이라고 했다. 이를 다시 정리하면, "구의 대원을 밑면으로 하고 이 구의 지름을 높이로 하는 원기둥의 겉넓이(부피)는 구의 겉넓이(부피)의 한 배 반이다"는 것이다.



[그림 5] 원기둥의 겉넓이(부피)와 구의 겉넓이(부피)의 관계

[그림 5]의 관계를 현대적 용어로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 원기둥의\ 겉넓이 &= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 \\ &= 2\pi r(2r) + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 = \frac{3}{2}(4\pi r^2) \\ &= \frac{3}{2}\times(구의\ 겉넓이) \end{aligned}$$

일반적인 원기둥의 경우 그 부피는 $V=\pi r^2 h$인데 [그림 5]의 원기둥의 부피는 $V=\pi r^2(2r) = 2\pi r^3$이 된다. 따라서, 다음과 같이 말할 수 있다.

$$원기둥의\ 부피 = 2\pi r^3 = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{3}{2}\times(구의\ 부피)$$

《원의 측정》에서 보면 아르키메데스는 원에 외접하고 내접하는 정다각형의 작도를 통해서 원의 넓이를 계산했고 이 과정에서 π의 값을 상당히 근사적으로 구했다. 이렇게 볼 때 아르키메데스는 현대적 용어로 표현할 때 π를 다루는데 아주 능숙했으며 지금까지 살펴본 구와 원기둥에 관련된 공식에서도 상수 π를 자유자재로 사용하였다. 이런 상수 π의 사용은 유클리드가 미처 파악하지 못했던 원의 넓이와 구의 부피에 관한 상수를 아주 쉽게 표현할 수 있도록 해 주었다. 아르키메데스 이전의 그리스 기하학자들은 원의 종류에는 상관없이 원주(C)와 지름(D) 사이의 비는 항상 일정하다는 사실을 알고 있었다. 이를 현대적 용어로 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{C_1}{D_1} = \frac{C_2}{D_2}$$

즉, 원의 원주와 이 원의 지름의 비는 항상 일정한 상수 π라는 뜻으로, 물론 그 당시에는 이 π라는 기호를 사용하지 않았다.

$$\frac{C}{D} = \pi \text{ 또는 } C = \pi D$$

원의 원주와 지름 사이의 이런 관계에 대한 지식과 더불어 아르키메데스 이전의 그리스 기하학자들은 원의 넓이에 대해서는 유클리드의 《원론》 XII권 명제 2에 제시되어 있는 "두 원의 넓이는 각 지름을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이와 관계하며, 따라서 원의 넓이와 이 지름의 제곱 사이의 비는 일정하다"는 사실을 알고 있었다([14]). 이를 현대적 기호를 사용하여 표현하면 다음 식과 같으며 유클리드는 어떤 상수 k_2를 사용하여 이를 증명하였다.

$$\frac{A}{D^2} = k_2 \text{ 또는 } A = k_2 D^2$$

상수 k_2가 원의 넓이와 지름과 관련이 있다는 것은 유클리드의 뛰어난 발견이었지만 일차원 상수 π와 이차원 상수 k_2 사이의 관계에 대해서는 아무런 발견을 하지 못했다. 또한 《원론》 XII권 명제 18에서는 "두 구의 부피는 각 지름을 한 변으로 하는 정육면체의 부피와 관계하며, 따라서 구의 부피와 이 지름의 세제곱 사이의 비는 일정하다"는 사실을 제시하고 있다([14]). 이를 현대적 기호를 사용하여 표현하면 다음 식과 같으며 유클리드는 어떤 상수 k_3를 사용하여 이를 증명하였다.

$$\frac{V}{D^3} = k_3 \text{ 또는 } V = k_3 D^3$$

그런데 그때까지 알고 있었던 원주와 그 원의 지름 사이의 관계를 나타내는 일차원적 상수인 π와 원의 넓이와 관련된 이차원적 상수인 k_2, 그리고 구의 부피와 관련된 삼차원적 상수인 k_3 사이에 존재할 수 있는 어떤 관계에 대해 유클리드조차도 아무런 언급을 하지 못했다. 하지만 아르키메데스는 《원의 측정》과 《구와 원기둥에 관하여》에서 π를 사용하여 상수 k_2와 k_3를 간단하게 나타낼 수 있음을 놀라운 수학적 직관력을 발휘하였으며 이를 증명하였다. 다시 말해서, 유클리드는 원의 넓이를 $A = k_2 D^2$로, 아르키메데스는 원의 넓이를 $A = \pi r^2$으로 정의했으므로 다음 식이 성립하게 된다.

$$k_2 = \frac{A}{D^2} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

따라서 원의 넓이와 관련된 이차원적 상수 k_2는 $k_2 = \frac{\pi}{4}$가 된다. 또한 유클리드는 구의 부피를 $V = k_3 D^3$로, 아르키메데스는 구의 부피를 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$으로 정의했으므로 다음 식이 성립하게 된다.

$$k_3 = \frac{V}{D^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \frac{1}{8r^3} = \frac{\pi}{6}$$

따라서 구의 부피와 관련된 삼차원적 상수 k_3는 $k_3 = \frac{\pi}{6}$가 된다. 이렇게 함으로써 마침내 이들 상수들과 π와의 관련성이 분명하게 표현될 수 있게 되었다.

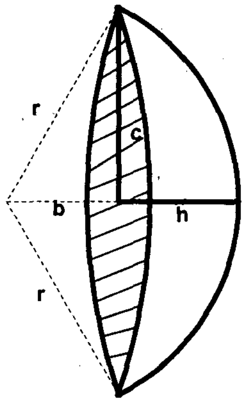
4. 아르키메데스의 구결(球缺, spherical segment)에 의한 구의 부피 구하는 방법

구를 한 평면으로 잘랐을 때 잘린 구의 구면 부분을 구관(球冠, spherical segment of one base)이라고 하며 구관과 잘린 면(밑면)으로 이루어진 입체를 구결이라고 한다. 따라서 밑면이 가장 클 때인 대원(大圓)인 구관은 반구면(半球面)이고 이때의 구결은 반구(半球)가 된다. 또한 이때 밑면의 반지름과 높이는 같게 된다. 아래 [그림 6]을 구결이라고 하며 빗금 친 구면 부분이 구관이다. 아르키메데스는 《구와 원기둥에 관하여》의 Ⅰ권의 명제 42에서 구결의 넓이를 구했지만 완벽하게 제시하고 있지 않았다. 그렇지만 Ⅱ권의 명제 2에서는 이 구결의 부피를 구하는 방법을 마무리하여 제

시하였는데 다음의 과정을 거쳐 아르키메데스는 이 구결의 부피를 구했고 이로부터 구의 부피 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 을 구할 수 있었다([12], [13]).

[단계 1]

반지름이 r인 구가 있을 때 이 구의 중심으로부터 b 만큼 되는 길이에서 한 평면으로 이 구를 자른다. 이때 이 구결의 높이를 $h=r-b$, 이 구결의 밑면인 구관의 높이를 c라 하자. 이때 아르키메데스는 "... 이 구결의 부피는 이 구관을 밑면으로 하고 아래 비례식을 만족하는 x를 높이로 하는 원뿔의 부피와 같다..."라고 했다.



[그림 6] 구결과 구관

$$\frac{x}{r-b}=\frac{2r+b}{r+b}$$

위의 비례식을 x에 대해 푼다.

$$x=\frac{2r+b}{r+b}\times(r-b)=\frac{2r^2-rb-b^2}{r+b}=\frac{(2r+b)(r-b)}{r+b}$$

아르키메데스의 주장에 의하면 구결의 부피는 이 구결의 구관을 밑면으로 하고 x를 높이로 하는 원뿔의 부피와 같다고 했으므로 다음 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}\text{원뿔의 부피} &= \frac{1}{3}\pi c^2 x=\frac{1}{3}\pi(r^2-b^2)x\ (\because [\text{그림 4}]\text{에서 } c^2=r^2-b^2)\\ &=\frac{1}{3}\pi(r^2-b^2)\frac{(2r+b)(r-b)}{r+b}\\ &=\frac{1}{3}\pi(r-b)^2(2r+b)=\frac{1}{3}\pi(2r^3-3r^2b+b^3)\end{aligned}$$

따라서 이 원뿔의 부피와 구결의 부피는 같으므로 결국 [그림 6]의 구결의 부피는 다음과 같다.

$$\text{구결의 부피} = \frac{1}{3}\pi(r-b)^2(2r+b)=\frac{1}{3}\pi(2r^3-3r^2b+b^3)\ \text{------}\ (*)$$

[단계 2]

위에서 구한 이 구결의 부피를 지금의 미적분학을 사용해서 구해보면 다음과 같이 정확하게 일치함을 알 수 있다. 즉, 이 구결을 원점에 두고 반지름을 r이라 하면 이 구결을 포함하는 그래프의 식은 $x^2+y^2=r^2$이 된다. x 점을 지나도록 얇은 조각으로 자르면 반지름 $\sqrt{r^2-x^2}$인 원판이 되고 그 절단면의 넓이는

$$A(x)=\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2=\pi(r^2-x^2)$$

이고 근사주면체(두께가 Δx인 원판)의 부피는

$$V=A(x)\Delta x=\pi(r^2-x^2)\Delta x$$

이다. 따라서 $x=b$에서 $x=r$ 사이의 구결의 부피는

$$V=\int_b^r A(x)dx=\pi\int_b^r(r^2-x^2)dx=\frac{1}{3}\pi(r-b)^2(2r+b)$$

가 되어 아르키메데스의 결과와 정확하게 일치함을 볼 수 있으며 이로부터 현대 수학의 적분개념의 아이디어를 짐작할 수 있다.

[단계 3]

[단계 1]의 식 (*)이 가지는 문제는 구결로 잘라지기 전인 원래 구와 관련된 매개변수인 r과 b로 이 구결의 부피가 표현되어 있다는 점이다. 그런데 일단 구를 평면으로 자르게 되면 구결을 제외한 구의 나머지 부분은 버리게 되기 때문에 알 수 있는 것은 이 구결의 높이 h와 이 구결의 구관의 길이 c 뿐이다. 따라서 식 (*)를 h와 c로 다시 표현해야 하는데, [그림 6]에서 보면

$$r^2=b^2+c^2 \quad ---- \quad ①$$

이고 $h=r-b$이므로 $r=h+b$ ---- ②가 되고 이것을 ①에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$(h+b)^2=b^2+c^2 \text{ 이고 이를 정리하면 } h^2+2bh+b^2=b^2+c^2 \text{ 이므로}$$

$$b=\frac{1}{2h}(c^2-h^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{h}-h\right) \quad ---- \quad ③$$

이다. 이 b를 ②에 대입하여 간단히 하면 다음과 같이 r과 $2r+b$를 구할 수 있다.

$$r = h + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{h} - h\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{h} + h\right) \quad ---- \quad ④$$

$$2r + b = 2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{h} + h\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{h} - h\right)$$
$$= \frac{c^2}{h} + h + \frac{c^2}{2h} - \frac{h}{2}$$
$$= \frac{2c^2}{2h} + \frac{c^2}{2h} + \frac{h}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3c^2}{h} + h\right)$$

따라서 $r - b = h$이고 ③, ④로부터 $2r + b = \frac{1}{2}\left(\frac{3c^2}{h} + h\right)$ 이므로 구결의 부피는 다음과 같다.

$$\text{구결의 부피} = \frac{1}{3}\pi(r-b)^2(2r+b)$$
$$= \frac{1}{3}\pi h^2 \times \frac{1}{2}\left(\frac{3c^2}{h} + h\right)$$
$$= \frac{1}{6}\pi h(3c^2 + h^2) \quad ---- \quad ⑤$$

[단계 4]

[단계 3]에서 구한 구결의 부피 공식에서 $h = r$인 경우, 즉, 구결의 높이 h가 구의 반지름 r이 되는 경우를 생각해 보자. 사실 이런 경우 이 구결은 반구임을 알 수 있다. 그러면 [단계 3]의 ②에서 $h = r - b$ 이므로 $b = 0$가 되고 또한 동시에 구관의 높이 c는 $c = r$이 된다. 이 사실을 위의 ⑤ 식에 대입하면 구결의 부피는 다음과 같이 된다.

$$\text{구결의 부피} = \frac{1}{6}\pi h(3c^2 + h^2)$$
$$= \frac{1}{6}\pi r(3r^2 + r^2) = \frac{1}{6}\pi r(4r^2) = \frac{4}{6}\pi r^3$$
$$= \frac{2}{3}\pi r^3$$

위에서 $h = r$인 구결의 부피는 다시 말해서 반구의 부피를 뜻하는 것이므로 이제 최종적으로 구의 부피를 구하는 공식을 유도해 낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\text{구의 부피} &= 2\times \text{구결의 부피}(h=r\text{인}) \\
&= 2\times \frac{2}{3}\pi r^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}
$$

따라서 반지름이 r인 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 임을 증명하게 된 것이다.

5. 결 론

본 연구는 수학자와 발명가로서 뛰어난 업적을 남긴 아르키메데스에 대해 고찰해 보았다. 아르키메데스의 삶과 그의 업적을 통하여 그의 발명과 그가 남긴 9권의 책에 대하여 살펴보았다. 특히 《원의 측정》의 내용으로부터는 유덕서스(또는 에우독소스)의 소진법을 활용하여 내접하는 정다각형의 작도를 통하여 π의 근사값을 구하는 과정을 자세하게 살펴보았다. 이런 과정 속에서 아르키메데스가 그 당시 벌써 무한 개념과 극한 개념을 사용하고 있음을 확인할 수 있었다. 《구와 원기둥에 관하여》는 두 부분으로 나누어서 고찰하였는데 첫 번째 부분은 《구와 원기둥에 관하여》에 실려 있는 원기둥의 옆면의 겉넓이, 구의 겉넓이, 그리고 구의 부피를 명제를 중심으로 살펴보았다. 그리고 유클리드가 표현하지 못했던 원의 넓이와 구의 부피를 상수 π를 사용하여 나타내는 과정을 알아보았다. 또한 가장 중요한 내용으로 《구와 원기둥에 관하여》에 제시되어 있는 구결로부터 구의 부피 구하는 방법을 자세하게 살펴보았다. 아르키메데스에 대한 이 고찰로부터 얻게 된 결론은 다음과 같다([9], [15]).

첫째, 수학적 지식은 다른 학문과는 달리 누적된 선행연구 결과를 바탕으로 새로운 지식을 축적해간다는 사실이었다. 유클리드가 원의 넓이와 지름의 관계 및 구의 부피와 지름의 관계를 π로 나타낼 수 없었던 것은 그의 수학적 재능과 직관력의 부족이라기보다는 상수 π에 대한 그 이전의 연구가 없었기 때문으로 보인다. 이와는 달리 아르키메데스가 상수 π를 사용해서 이 관계를 나타낼 수 있었던 것은 그만큼의 연구 성과가 이미 축적되어 있었던 배경이라고 보아진다.

둘째, 유클리드 《원론》 II권에서 시작된 '기하학적 대수학(geometric algebra)'을 아르키메데스의 저술에서도 분명히 볼 수 있었다. 아르키메데스는 오늘날의 대수식으로 아주 쉽게 표현할 수 있는 관계들을 기하학적 용어를 사용하여 긴 문장으로 진술해 놓았다. 이를 통해서 볼 때 수학적 사고나 수학적 창의성의 시작이 반드시 대수적 기호의 사용에 의존해서만 이루어지는 것은 아님을 알 수 있다.

셋째, 현행 제 7차 수학과 교육과정에 따른 교과서에서는 [7-나]에서 원뿔, 원기둥, 구의 겉넓이와 부피를 다루고 있으며([2], [3], [4]), [9-나]에서는 주어진 구를 평면으로 잘랐을 때 생기는 원의 넓이나 반지름의 길이, 즉 구관의 넓이나 반지름을 피타고라스의 정리를 이용하여 구하도록 하고 있다([1]). 그리고 [수학II]에서는 구의 방정식과 구결의 높이를 구하는 문제를 다루고 있다([5]). 하지만 이들 교과서에 제시되어 있는 문제들의 공통점은 이미 완전한 구의 형태가 주어진 상태에서 몇 가지 공식을 적용하여 해결하도록 하고 있다는 점이다. 따라서 학생들은 원의 일부가 주어졌을 때 원래 상태의 원의 넓이와 지름을 구하는 것과 마찬가지로 구의 일부가 주어진 경우 원래 상태의 구를 추정하여 그 겉넓이와 부피를 구하는 활동을 경험하지 못하고 있다. 본 연구의 결과는 수학교실에서 수학사를 이용하여 이에 대한 활동을 할 수 있는 가능성을 제시하고 있다고 본다.

넷째, 현행 제 7차 수학과 교육과정에서는 구의 겉넓이와 부피를 직관적으로 구하도록 제시하고 있다([1], [2], [3]). 즉, 원의 넓이를 작은 부채꼴을 등분하여 구하도록 하고 있으며, 구의 겉넓이는 반구의 겉면에 가는 끈을 감고 이 끈을 다시 평면 위에서 원을 만들어 구하고 있다. 또한 구의 부피는 원기둥 모양의 그릇에 물을 붓고 그 안에 공을 집어넣어 꺼낸 다음 남은 물의 양을 구하도록 하여 원기둥의 부피로부터 구의 부피를 구하도록 하고 있다. 문제는 그 이후 과정에서 이런 직관적 이해에 대한 수학적 타당성에 대한 활동이나 논의가 전혀 제시되어 있지 않다는 점이다. 따라서 본 논문의 내용은 중학교 이후의 수학교실에서 이에 대한 수학적 형식화의 경험을 학생들에게 제공할 수 있는 수업자료로 활용할 수 있을 것이라고 본다.

다섯째, 현대 수학의 복잡함과 다변화 및 세분화로 인하여 특정한 수학적 개념과 방법에 대한 아이디어의 기원을 찾기가 점차 어려워지고 있으며 그로 인하여 수학교실에서의 교수-학습이 지나치게 추상적인 접근을 취하고 있다고 보아진다. 따라서 고전 수학과 현대 수학의 관련성을 찾고 이것을 수학과 교육과정에 적극 반영하는 노력을 통하여 학생들의 수학사에 대한 인식을 증대시키고 수학에 대한 흥미와 긍정적인 태도를 육성할 수 있을 것으로 기대한다.

참고 문헌

1. 강옥기, 정순영, 이환철, 중학교 수학 9-나 교사용 지도서, 서울: (주) 두산, 2002.
2. 고성은, 박복현, 김준희, 최수일, 강운중, 소순영, 중학교 수학 7-나, 서울: (주) 블랙박스, 2000.

3. 배종수, 박종률, 윤행원, 유종광, 김문환, 민기열 외, 중학교 수학 7-나 교사용 지도서, 서울: 한성교육연구소, 2000.
4. 이영하, 허민, 박영훈, 여태경, 중학교 수학 7-나 교사용 지도서, 서울: (주) 교문사, 2000.
5. 최상기, 이용수, 이만근, 이재실, 백한미, 조택상, 고등학교 수학II, 서울: (주) 고려출판, 2002.
6. W. Dunham/조정수 역, 수학의 천재들, 서울: 경문사, 2004.
7. H. Eves/이우영, 신항균 역, 수학사, 서울: 경문사, 1998.
8. E. Mao/전대호 역, 무한, 그리고 그 너머: 무한의 문화사, 서울: 사이언스북스, 1997.
9. Campbell, D. M., *The whole craft of number*, Boston, MA: Prindle, Weber & Schmidt, 1977.
10. Dunham, W., *Journey through genius*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1990.
11. Dunham, W., *The Mathematical universe*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
12. Heath, T. L.(Ed.), *The works of Archimedes*, New York: Dover, 2002.
13. Heath, T. L.(Ed.), *The works of Archimedes*, New York: Elibron Classics, 2001.
14. Heath, T. L., *The thirteen books of Euclid's elements*: Translated from the text of Heiberg with introduction and commentary Volume III, New York: Dover, 1953.
15. Mankiewicz, R., *The story of mathematics*, New Jersey, Princeton University Press, 2000.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 19 No. 3 (Aug. 2006), 95-112

Investigation of Archimedes' 〈On the Sphere and Cylinder〉

Dept. of Mathematics Education, Yeungnam University. **Cheong Soo Cho**

The purpose of this paper is to investigate a classic mathematician and inventor Archimedes' work 〈On the Sphere and Cylinder〉. The propositions of this book which deals with three dimensional geometry are reviewed. Through the review this study tries to find out how Archimedes mastered spherical figures and how classical mathematics ideas are related to the modern concept of integration. The results of this study seems to help people understand deeply modern mathematics and to be good resources to develop new mathematical ideas.

Key Words: Archimedes, sphere, cylinder, approximation of π, the method of exhaustion, spherical segment

2000 Mathematics Subject Classification: 97-03

ZDM Subject Classification: A30

논문 접수: 2006년 4월 심사 완료: 2006년 6월