

이분산성 및 두꺼운 꼬리분포를 가진 금융시계열의 위험추정 : VaR와 ES를 중심으로

문성주* · 양성국**

〈요 약〉

대부분의 국내 선행연구들은 이분산성은 GARCH모형으로, 꼬리위험은 EVT모형으로 따로 고려하였다. 이 경우 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 동시에 고려하지 못한 VaR값은 실제 위험량을 적절히 반영하지 못할 가능성이 있다. 따라서 본 연구에서는 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 고려할 수 있는 GARCH-EVT모형이 정규분포를 가정한 VaR와 이분산성을 가정한 VaR보다 높은 성과를 나타내는지 살펴보았다.

연구결과를 요약하면 다음과 같다. 첫째, 주식수익률은 정규분포보다는 꼬리부분이 두꺼운 형태를 보이고, 이분산성을 가진다. 이 경우 정규분포하에서 산출된 VaR는 실제 손실금액을 과소평가할 위험성이 있어 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 감안할 수 있는 모형의 도입이 필요함을 알 수 있다.

둘째, 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 고려한 GARCH-EVT모형하에서의 VaR는 정규분포를 가정한 VaR와 이분산성을 가정한 VaR보다 높은 성과를 보였다.

셋째, 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 고려한 GARCH-EVT모형하에서의 ES는 정규분포를 가정한 VaR와 이분산성을 가정한 VaR보다 높은 성과를 일관되게 보여주지 않았다.

결론적으로 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 동시에 반영한 GARCH-EVT모형하에서 VaR가 금융기관의 위험관리의 유용한 도구가 될 수 있는 가능성을 발견하였다. 비록 상대적으로 높은 성과를 보이지는 않지만 ES는 VaR함께 위험척도로 같이 사용할 때 보수적인 위험관리 차원에 부합될 것이다.

주제어 : GRACH모형, EVT모형, GARCH - EVT, VaR, ES

논문접수일 : 2006년 05월 03일 논문게재확정일 : 2006년 11월 21일

* 경상대학교 수산경영학과 조교수. Tel : 055) 640-3143, E-mail : dmunsulju@gnu.ac.kr

** 제주대학교 경영학과 부교수. Tel : 064) 754-3121, E-mail : sungkuk@cheju.ac.kr

*** 본 논문의 완성도를 높이는 데 있어 유익한 논평을 해주신 심사위원 두 분께 감사드립니다.

I. 서 론

금융시장 개방과 금융자유화의 확대 그리고 금융기관 간의 치열한 경쟁으로 인하여 금융기관이 보유하고 있는 금융자산의 위험관리가 매우 중요한 분야로 부각되고 있다. 특히 IMF외환위기를 겪으면서 외국자본의 유치가 증가함에 따라 금리, 환율, 주가 그리고 상품가격의 변동성이 증대되었으며 이에 따라 금융자산의 시장위험에 대한 노출 정도가 증가되었다. 이로 인해 시장위험에 대한 체계적이고 과학적인 위험관리의 필요성이 증가하였다.

VaR는 정상적인 시장여건에 대하여 주어진 신뢰수준에서 일정기간 동안 특정자산 또는 포트폴리오를 보유함으로써 최악의 경우 발생할 수 있는 최대손실금액을 의미한다. 이러한 VaR의 가장 큰 장점은 개념적으로 매우 간단하며 모든 위험에 대해 동일한 방법으로 측정할 수 있기 때문에 전사적 위험측정 및 관리가 가능하다는 것이다.

VaR에 대한 연구는 도입초기에 국제결제은행(BIS)에서 요구하고 있는 적정보유자본금의 결정과 자산운용의 한도설정에 주로 활용되어 왔다. 그러나 최근에는 시장위험관리와 금융시장의 효율성을 높이는 데 기여하고 있다. 즉, VaR는 금융기관의 자본배분이나 위험할당의 기준이 되며, 또한 규제당국의 최소자본요구량의 근거로서 널리 활용되고 있다.

이러한 VaR모형에 있어서의 핵심은 변동성(volatility)의 추정에 있고, 그 동안 변동성의 추정을 정확히 하기 위한 많은 노력을 해왔다. 그러나 변동성은 일정한 것이 아니라 시가변적(time-varying)이라는 사실이 알려져 있기 때문에, 변동성의 이분산성을 고려한 모형을 적용하여 변동성을 추정함으로써 VaR모형의 예측력을 높이려는 연구가 진행되었다.

그러나 아시아 외환위기, 러시아 국가부도위기, LTCM(Long-Term Capital Management) 파산위기 등과 같은 금융위기 상황이 자주 발생하자 연구의 주된 관심은 위험자산 수익률분포의 꼬리위험에 집중되었다. 특히 이러한 극단적 상황에서의 VaR시스템을 통한 정량적 위험회피를 위해 극단치이론(extreme value theory, EVT)¹⁾을 적용한 VaR모형에 관한 연구가 진행되고 있다.

물론 VaR측정에 있어 정규분포의 가정은 중심극한정리에 의해 타당성을 갖는다. 그

1) 최근 들어 전체 확률밀도함수를 모델화한 결과로서 꼬리를 얻는 것 대신에 오히려 분포의 꼬리를 모델화하는 방법이 시도되고 있는데, 이는 수자원분야나 보험분야 등에서 재앙적 사건을 연구하는데 사용되어 온 극단치이론에 근거하고 있다. 이 이론은 최근 재무분야에 많이 활용되고 있다.

러나 정규분포를 가정하는 경우 금융시계열 자료에 존재하는 이분산성 및 두꺼운 꼬리 분포를 설명하지 못하는 문제점을 갖게 된다.

기존의 많은 선행연구에서 단변량 금융시계열은 이분산성과 꼬리분포가 두꺼운 특성을 가지고 있어 정규분포를 가정한 기존의 VaR모형보다 이분산성을 감안한 GARCH 모형이나 두꺼운 꼬리분포를 고려한 EVT모형이 실제 위험을 적절히 잘 반영하고 있음을 보여주고 있다(Danielsson과 de Vries(1997), Kellezi와 Gilli(2000), McNeil과 Frey(2000), Neftci(2000), Danielson과 Morimoto(2000), 한상범(2000), 문성주의(2003), 오세경(2005)). 이처럼 금융시계열의 이분산성과 꼬리분포가 두꺼운 특성을 고려하더라도 VaR는 근본적인 한계점을 안고 있다. 최근 들어 VaR의 한계점에 대한 인식과 이에 대한 대안적 모형들이 제시되고 있다. 예컨대, Artzner et al.(1997, 1999)은 VaR의 한계점으로 두 가지를 들고 있는데, 하나는 VaR는 분포의 백분위값만을 측정하고 VaR값을 초과하는 손실("꼬리위험")은 무시한다는 점이고, 또 하나는 VaR가 하부 가법적(sub-additive)이지 아니기 때문에 일관적(coherent)이지 못하다는 것이다.²⁾ 이러한 한계점들을 해결하기 위해 제안된 개념이 ES(Expected Shortfall)로서 이는 VaR값을 초과한 관측치들의 조건부 평균치를 의미한다. 이와 관련한 선행연구에 의하면 VaR는 ES에 비하여 실제 위험을 과소평가하고 있음을 보고하고 있다(Aceri와 Tasche(2002), Yamai와 Yoshida(2002)). 즉, VaR가 갖게 되는 모든 문제의 원천은 꼬리부분을 제대로 설명하지 못하는데서 발생한다. 이를 해결하기 위한 한 가지 방법은 하부가법성과 일관성을 만족하는 ES을 이용하는 것으로 꼬리 조건부기대분포(tail conditional expectation)에서 유도된다.

또한 단변량이 아닌 다변량 금융시계열하에서 꼬리 의존성을 고려하기 위해 EVT-Copula모형을 적용하여 실증 분석한 결과 전통적인 분산-공분산모형보다 이들 모형이 상대적으로 더 우수함이 밝혀졌다(김태혁 외(2005, 2006), 오세경 외(2006)).

지금까지 국내외 선행 연구에서도 언급하였듯이 대부분의 금융시계열은 정규분포보다 꼬리부분이 두꺼운 형태를 보이고 있으며 금융시계열의 변동성은 시가변적이라는 것이다. 만약 금융시계열이 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 동시에 가지고 있다면 전통적 방식의 위험관리기법은 한계점을 가질 수밖에 없다. 그러므로 금융시계열의 이분산성 및 두꺼운 꼬리를 동시에 감안한 VaR를 사용하여 위험량을 산출할 필요가 있고, VaR

2) Artzner et al.(1997, 1999)에 의하면 위험척도 ρ 가 모든 확률변수 R^a, R^b 에 대해 $\rho(R^a + R^b) \leq \rho(R^a) + \rho(R^b)$ 를 만족하면 하부가법성(sub-additivity)을 충족한다고 하고, 위험척도는 일관적(coherent)이기 위해서는 이 성질을 만족해야 한다고 하였다.

의 한계점을 보완하기 위해 ES를 보조적 위험량 지표로 사용하는 것을 고려할 필요가 있다. 국내 연구의 경우 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 동시에 반영한 VaR 및 ES에 대한 연구는 아직 없는 실정이다.

따라서 본 연구에서는 금융시계열의 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 잘 반영할 수 있는 GARCH-EVT모형을 활용하여 VaR, ES를 구하고, VaR 및 ES의 사후검증 결과에 기초하여 시사점을 제공하고자 한다.

II. VaR와 ES의 추정방법 및 성과비교 방법

연속수익률(r)의 분포함수 F 가 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다면 신뢰수준 q 하에서 위험척도인 VaR_q 는 표준정규분포의 $(1-q)$ 번째 켄타일(quantile)에 초기포지션금액(w_0)을 곱한 금액으로 식 (1)과 같이 표현된다.

$$VaR_q = -z_q \times w_0 \quad (1)$$

$$\text{여기서, } z_q = F^{-1}(1-q)$$

그리고 신뢰수준 q 인 경우 negative 연속수익률(r^*)³⁾하에서 실제 포지션금액($R_t^* = r^* \cdot w_0$)이 VaR_q 를 초과하는 기대값인 ES_q 는 식 (2)와 같이 표현할 수 있다.⁴⁾

$$ES_q = E[R_t^* | R_t^* > VaR_q] \quad (2)$$

이러한 VaR_q 와 ES_q 는 정규분포를 가정하는 경우와 가정하지 않는 경우로 구분하여 추정할 수 있다. 정규분포를 가정하지 않는 경우는 이분산성을 고려하는 GARCH모형 하의 VaR_q 와 ES_q , 이분산성과 두꺼운 꼬리분포를 고려하는 GARCH-EVT모형하의 VaR_q 와 ES_q 등으로 나누어 추정할 수 있다.

3) max mode하에서 VaR 및 ES모형의 모수를 추정하기 위해 실제 왼쪽 꼬리의 연속수익률에 -를 곱한 negative 연속수익률을 사용하였다.

4) 왼쪽 꼬리의 VaR와 ES는 식 (1)과 식 (2)를 통해 산출할 수 있고, 이와 마찬가지로 오른쪽 꼬리의 VaR와 ES를 산출하려면 아래의 식을 이용하면 산출할 수 있다.

$$VaR_q = z_q \times w_0, \quad ES_q = E[R_t | R_t > VaR_q]$$

$$\text{단, } z_q = F^{-1}(q), \quad R_t = r \cdot w_0$$

1. 정규분포 가정하에서의 VaR와 ES

t 시점의 금융자산의 가격을 P_t 라고 하고, 해당 금융자산의 연속수익률(r_t)이 정규분포를 따른다면 연속수익률은 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{3}$$

여기서, $r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$

만약, 금융자산의 연속수익률이 랜덤 워크(random walk)하다면 $t-1$ 시점의 평균과 분산이 t 시점의 평균 $\hat{\mu}_t$ 과 분산 $\hat{\sigma}_t^2$ 의 최적 추정치가 된다. 이 경우 신뢰수준 q 하에서 초기 포지션금액이 w_0 일 경우 $VaR_{q,t}$ 는 식 (4)과 같이 추정할 수 있다.

$$VaR_{q,t} = (\hat{\mu}_t + \hat{\sigma}_t z_q) \times w_0 \tag{4}$$

여기서 $VaR_{q,t}$: 신뢰수준 q 하에서의 t 시점의 VaR값

z_q : 신뢰수준 q 를 반영한 조정배수⁵⁾

그리고 신뢰수준이 q 인 경우 negative 연속수익률 (r^*)하에서 실제 포지션금액($R_t^* = r^* \cdot w_0$)이 $VaR_{q,t}$ 를 초과하는 기대값인 $ES_{q,t}$ 는 절단된(truncated) 정규분포함수에서 inverse Mill's ratio⁶⁾을 활용하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

5) z_q 는 표준정규분포에서 q 번째 quantile이다.

6) 금융자산의 연속수익률(r_t)이 정규분포($r_t \sim N(\mu, \sigma^2)$)을 따른다면 z_q 이하로 절단된 분포(truncated distribution)의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(r_t | r_t > z_q) = \frac{f(r_t)}{\text{Prob}(r_t > z_q)} = \frac{f(r_t)}{1 - \Phi\left(\frac{z_q - \mu}{\sigma}\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r_t - \mu)^2}{2\sigma^2}}}{1 - \Phi\left(\frac{z_q - \mu}{\sigma}\right)} = \frac{\frac{1}{\sigma} \phi\left(\frac{r_t - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z_q - \mu}{\sigma}\right)}$$

그러므로 $z = \frac{z_q - \mu}{\sigma}$ 라 가정할 경우 금융자산의 연속수익률(r_t)이 z_q 보다 클 기대값은 아래와 같이 표현될 수 있다.

$$E(r_t | r_t > z_q) = \int_{z_q}^{\infty} r_t f(r_t | r_t > z_q) dr_t = \mu + \sigma \frac{\phi\left(\frac{z_q - \mu}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{z_q - \mu}{\sigma}\right)} = \mu + \sigma \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)}$$

$$ES_q = (\hat{u}_t + \hat{\sigma}_t \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)}) \times w_0 \tag{5}$$

여기서 inverse Mill's ratio = $\frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)}$

$$z = \frac{z_q - \hat{u}_t}{\hat{\sigma}_t}, \phi(z) : \text{정규분포함수}, \Phi(z) : \text{누적정규분포함수}$$

2. 이분산성을 고려한 VaR와 ES

이분산성을 감안한 모형은 과거수익률의 오차항과 변동성의 자기상관성을 이용하여 미래의 변동성을 예측하는 기법이다. 즉 GARCH모형은 이분산성과 분산의 자기회귀를 모형에 포함시키므로 과거에 실현된 변동성을 잘 설명할 수 있다. GARCH모형은 수익률분산이 예측 가능한 패턴을 따른다고 가정하므로 조건부분산은 가장 최근의 변화와 과거의 조건부분산에 의해 결정된다. 이 경우 ARMA(p_1, q_1)-GARCH(p_2, q_2)모형의 평균방정식과 분산방정식은 식 (6) 및 식 (7)과 같다.

$$r_t = \mu + \sum_{i=1}^{p_1} \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^{q_1} \theta_j a_{t-j} + a_t \tag{6}$$

$$a_t = \sigma_t \xi_t, \xi_t \sim N(0, 1) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{7}$$

조건부 이분산성을 고려한 모형의 평균방정식과 분산방정식을 이용하여 t-1시점에서 t시점의 조건부 평균(\hat{r}_t) 및 조건부분산($\hat{\sigma}_t^2$)을 추정한 후 신뢰수준 q하에서 초기포지션 금액이 w_0 일 경우 $VaR_{q,t}$ 는 아래와 같다.

$$VaR_{q,t} = (\hat{r}_t - z_q \cdot \hat{\sigma}_t) \times w_0 \tag{8}$$

여기서 $VaR_{q,t}$: 신뢰수준 q에서 t시점의 VaR값

z_q : 신뢰수준 q를 반영한 조정배수

\hat{r}_t : t시점의 조건부 평균, $\hat{\sigma}_t$: t시점의 조건부 표준편차

그리고 신뢰수준 q인 경우 negative 연속수익률 (r^*)하에서 실제 포지션금액($R_t^* = r^* \cdot w_0$)이 $VaR_{q,t}$ 를 초과하는 기대값인 $ES_{q,t}$ 는 절단된(truncated) 정규분포함수에서

inverse Mill's ratio을 활용하여 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$ES_q = (\hat{r}_t + \hat{\sigma}_t \frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)}) \times w_0 \tag{9}$$

여기서 inverse Mill's ratio = $\frac{\phi(z)}{1 - \Phi(z)}$

$$z = \frac{z_q - \hat{r}_t}{\hat{\sigma}_t}, \quad \phi(z) : \text{정규분포함수}, \quad \Phi(z) : \text{누적정규분포함수}$$

3. 이분산성 및 두꺼운 꼬리분포를 고려한 VaR와 ES

두꺼운 꼬리분포를 고려하기에 적합한 이론이 극단치이론이다. 극단치이론은 극단치(extreme value)를 어떻게 정의하느냐에 따라 두 가지로 나누어진다. 첫째는 전체구간을 몇 개의 세부구간으로 나누고 각 구간에서 발생하는 최대값(maxima)을 극단치로 정의하였을 때 구한 극단치들이 GEV(Generalized Extreme Value distribution)에 수렴한다는 이론이고, 둘째는 임계값(threshold)을 정하고 이를 초과하는 값을 극단치로 정의하였을 때 구한 극단치들이 GPD(Generalized Pareto Distribution)에 수렴한다는 이론이다.

본 연구에서는 두꺼운 꼬리분포를 고려하기 위해 GEV모형보다 GPD모형을 이용하여 VaR와 ES를 추정하고자 한다. 그 이유는 대부분의 금융시계열의 경우 GEV모형에서 정의하듯 극단적 사건이 일정한 주기를 가지고 발생하지 않기 때문이다. 한편 국내 선행연구(오세경(2005), 문성주 외(2003))에 의하면 GEV모형보다 GPD모형이 실제 금융시계열분포에 더 적합함을 보여주고 있다. GPD모형은 임계치 초과극값(peak over threshold : POT)방법이라고 하는데 임계치를 초과하는 GPD분포는 아래와 같다.

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{y}{\beta})^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{y}{\beta}) & \text{if } \xi = 0 \end{cases} \tag{10}$$

단, $\sigma > 0$ 이고, $\xi \geq 0$ 일 때 $y \geq 0$ 이고,

$\xi < 0$ 일때, $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ 이다.

여기서 ξ : 형태모수, u : 임계치, σ : 척도모수

y : 임계치의 초과치($x - u$)

즉, ξ 는 분포의 형태를 결정짓는 형태모수로 만약 $\xi > 0$ 이면 Type I 파레토분포, $\xi < 0$ 이면 Type II인 파레토분포, $\xi = 0$ 이면 지수분포 형태를 띈다.

확률변수 X 의 분포함수를 F 라고 하고, 임계치(u)를 초과하는 극단치(x)의 분포함수를 F_u 라 하자. Pickands(1975), Balkema와 Hann(1974)의 이론에 의해 u 가 무한히 증가하면, $F_u(y)$ 는 $G_{\xi\beta}(y)$ 에 근사한다. GPD분포하에서 모수를 추정하기 위해서는 임계치를 먼저 결정한 후 최우추정법⁷⁾에 의해 GPD분포에 포함된 모수들을 추정한다. 이렇게 추정된 모수를 바탕으로 신뢰수준 q 하에서 q 번째 quantile함수는 아래와 같이 계산된다.

$$z_q = F^{-1}(q) = \hat{u} + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1-q) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (11)$$

여기서 $\hat{\xi}$: 형태모수, \hat{u} : 임계치, $\hat{\sigma}$: 척도모수

N_u : 임계치를 초과하는 개수, n : 관찰치 개수

그러므로 신뢰수준 q 하에서 초기포지션금액이 w_0 일 경우 $VaR_{q,t}$ 는 식 (12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$VaR_{q,t} = z_q \times w_0 \quad (12)$$

여기서 $VaR_{q,t}$: 신뢰수준 q 하에서 t 시점의 VaR

$z_q = F^{-1}(q)$: F분포의 q 번째 quantile함수

만약 $VaR_{q,t}$ 를 초과한 초과분포인 $F_{VaR_{q,t}}(y)$ 를 GPD분포로 변환하면 형태모수가 ξ 이고, 척도모수가 $\sigma + \xi(z_q - u)$ 인 GPD분포에 근사하게 된다. 이 경우 신뢰수준 q 인 경우 negative 연속수익률(r^*)하에서 실제 포지션금액($R_t^* = r^* \cdot w_0$)이 $VaR_{q,t}$ 를 초과하는 기대값인 $ES_{q,t}$ 는 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$ES_{q,t} = E[R_t^* \mid R_t^* > VaR_{q,t}] = \frac{VaR_{q,t}}{1-\xi} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi}u}{(1-\xi)} \quad (13)$$

7) GPD분포를 따르는 시계열자료의 로그 우도함수($L(\xi, \sigma \mid y)$)는 다음과 같다.

$$L(\xi, \beta \mid y) = \begin{cases} -n \log \beta + \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right) \sum_{i=1}^n \log \left(1 - \frac{\xi}{\beta} y_i \right) & \text{if } \xi \neq 0 \\ -n \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n y_i & \text{if } \xi = 0 \end{cases}$$

여기서, $L(\xi, \beta \mid y)$: GPD분포를 따르는 시계열자료에 대한 우도함수, y_i : 임계치의 초과치 중 i 번째 표본

여기서, $ES_{q,t}^8$) : 신뢰수준 q 에서 t 시점의 ES

McNeil과 Frey(2000)는 이분산성 및 두꺼운 꼬리분포를 동시에 고려하기 위해 다음과 같은 2단계(two-stage)방식을 사용하였다. 1단계로 식 (6)과 식 (7)을 이용하여 조건부 평균(\hat{r}_t)과 조건부 분산($\hat{\sigma}_t$)을 추정한 후 아래 식 (14)의 방식으로 이분산성을 제거한 새로운 시계열을 생성한다. 그러나 새로운 시계열에도 여전히 꼬리의 두꺼움은 남아있다.

$$(Z_{t-n+1}, \dots, Z_t) = \left(\frac{r_{t-n+1} - \hat{r}_{t-n+1}}{\hat{\sigma}_{t-n+1}}, \dots, \frac{r_t - \hat{r}_t}{\hat{\sigma}_t} \right) \quad (14)$$

이 꼬리의 두꺼움을 반영한 위험척도를 만들기 위해 2단계로 이분산성을 제거한 잔차 시계열에 새로운 임계값(u_z)을 적용한 초과분포함수($F_{u_z}(y)$)는 식 (15)과 같다.

$$F_{u_z}(y) = \Pr[Z - u_z \leq y \mid Z > u_z] = \frac{F(y + u_z) - F(u_z)}{1 - F(u_z)}, \quad y > 0 \quad (15)$$

이 경우 u_z 가 무한히 증가하면 초과분포함수는 $G_{\xi, \sigma_z}(y)$ 에 근사하므로 꼬리의 두꺼움을 반영하는 $\hat{Z}_{q,t}$ 를 식 (8)의 $\hat{Z}_{q,t}$ 에 대입하면 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 감안한 $VaR_{q,t}$ 가 산출된다.

8) $ES_{q,t} = E[R_t^* \mid R_t^* > VaR_{q,t}]$
 $= (E[r_t^* \cdot w_0 \mid r_t^* \cdot w_0 > z_{q,t} \cdot w_0])$, 만약 $w_0 = 1$ 이라고 하면
 $= E[r_t^* \mid r_t^* > z_{q,t}]$
 $= z_{q,t} + E[r_t^* - z_{q,t} \mid r_t^* > z_{q,t}]$
 $= z_{q,t} + \frac{\beta + \xi(z_{q,t} - u)}{1 - \xi}$, 양변을 $z_{q,t}$ 로 나누면
 $\frac{ES_{q,t}}{z_{q,t}} = 1 + \frac{\beta + \xi(z_{q,t} - u)}{(1 - \xi) z_{q,t}} = 1 + \frac{\beta - \xi u}{(1 - \xi) z_{q,t}} + \frac{\xi \times z_{q,t}}{(1 - \xi) z_{q,t}}$
 $= \frac{1}{(1 - \xi)} + \frac{\beta - \xi u}{(1 - \xi) z_{q,t}}$, 양변에 $z_{q,t}$ 를 곱하면
 $ES_{q,t} = \frac{z_{q,t}}{(1 - \xi)} + \frac{\beta - \xi u}{(1 - \xi)}$ 와 같이 표현되고, 초기포지션 금액이 w_0 일 경우
 $ES_{q,t} = \frac{VaR_{q,t}}{(1 - \xi)} + \frac{\beta - \xi u}{(1 - \xi)}$ 가 된다.

$$VaR_{q,t} = (\hat{r}_t + \hat{\sigma}_t \cdot \hat{Z}_{q,t}) \times w_0 \quad (16)$$

여기서 $VaR_{q,t}$: 신뢰수준 q 에서 t 시점의 VaR

$$\hat{Z}_{q,t} = F^{-1}(q) = \hat{u}_z + \frac{\hat{\beta}_z}{\hat{\xi}_z} \left(\left(\frac{n_z}{N_{u,z}} (1-q) \right)^{-\hat{\xi}_z} - 1 \right)$$

\hat{r}_t : t 시점의 조건부 평균

$\hat{\sigma}_t$: t 시점의 조건부 표준편차

그리고 신뢰수준 q 하에서 새로운 시계열(Z_t)가 $\hat{Z}_{q,t}$ 를 초과하는 기대값인 $E[Z_t | Z_t > \hat{Z}_{q,t}]$ 을 반영하여 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 반영한 $ES_{q,t}$ 는 주식 (5)와 같은 원리를 이용하여 산출한 $E[Z_t | Z_t > \hat{Z}_{q,t}]$ 를 식 (17)과 같은 방식을 적용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$ES_{q,t} = (\hat{u}_t + \hat{\sigma}_t \cdot E[Z_t | Z_t > \hat{Z}_{q,t}]) \times w_0 \quad (17)$$

여기서, $ES_{q,t}$: 신뢰수준 q 에서 t 시점의 ES

\hat{u}_t : t 시점의 조건부 평균

$\hat{\sigma}_t$: t 시점의 조건부 표준편차

$$E[Z_t | Z_t > \hat{Z}_{q,t}] = \hat{Z}_{q,t} \cdot \left(\frac{1}{1-\hat{\xi}_z} + \frac{\hat{\sigma}_z - \hat{\xi}_z u_z}{(1-\hat{\xi}_z) \hat{Z}_{q,t}} \right)$$

u_z : 새로운 시계열(Z_t)하에서 GPD모형의 임계치

ξ_z : 새로운 시계열(Z_t)하에서 GPD모형의 형태모수

β_z : 새로운 시계열(Z_t)하에서 GPD모형의 척도모수

4. VaR와 ES의 성과비교

본 연구에서는 시장포트폴리오를 보유할 또는 보유한 금융기관들이 시장의 극단적 사건에 대비하여 요구되는 자본량을 합리적으로 산출하고자 할 경우 GARCH - EVT모형에 의한 VaR와 ES 위험산출량이 GARCH모형에 의한 VaR와 ES나 Normal 모형에 의한 VaR와 ES 등에 비하여 얼마나 실제손실금액을 적절히 예측할 수 있는지를 사후 검증을 통해 살펴보고자 한다. 이를 위해 1994년 4월 8일부터 1997년 8월 30일까지의 1,000개의 동일한 표본기간(sample window)을 유지하면서 하루씩 전진하는 추정방식

(one-step ahead forecast method)으로 Normal모형, GARCH모형, GARCH-EVT모형의 모수를 637번 추정하고, 이렇게 추정한 모수를 바탕으로 IMF 구제금융신청 이후 기간인 1997년 9월 1일부터 1999년 12월 28일까지의 VaR 및 ES 등을 산출하고자 한다.⁹⁾

VaR 성과비교는 Berkowitz와 O'Brien(2002)의 방법을 이용하였다. 이 방법은 초과횟수(number of violations), 초과정도(degree of violation) 등을 통해 상호 비교하는데, 초과횟수는 왼쪽 꼬리인 경우 실제 포지션금액이 VaR추정치보다 낮은 경우에 대한 빈도로 아래와 같이 정의하였다.

$$V^{freq} = \begin{cases} 1 & \text{if } R_t < -\widehat{VaR}_{q,t} \\ 0 & \text{if } R_t \geq -\widehat{VaR}_{q,t} \end{cases} \quad (18)$$

여기서, V^{freq} : 초과횟수

R_t : t 시점의 실제 포지션금액($r \cdot w_0$)

$\widehat{VaR}_{q,t}$: t 시점의 VaR 추정치

그리고 초과정도는 실제 포지션금액과 VaR추정치 차이(절대값)을 초과횟수로 나눈 값으로 정의하였다.

$$V^{diff} = \begin{cases} abs(R_t - (-\widehat{VaR}_{q,t})) & \text{if } R_t < -\widehat{VaR}_{q,t} \\ 0 & \text{if } R_t \geq -\widehat{VaR}_{q,t} \end{cases} \quad (19)$$

$$V^{size} = \frac{\sum V^{diff}}{V^{freq}}$$

여기서, V^{diff} : 실제 포지션금액과 VaR추정치 차이

V^{size} : 초과정도

R_t : t 시점의 실제 포지션금액($r \cdot w_0$)

$\widehat{VaR}_{q,t}$: t 시점의 VaR 추정치

만약, VaR가 실제 손실위험을 잘 반영한다면 초과횟수는 목표 실패율에 근사하게 발생 할 것이고, 초과정도는 상대적으로 적을 것이다. 또한, 신뢰수준 q 하에서 ES의 추정치 ($\widehat{ES}_{q,t}$)에 대한 사후검정을 위해 Embrechts et al.(2004)에 의해 제안된 척도를 사용하였다.

9) 위와 같이 추정기간 및 예측기간을 설정한 이유는 추정기간내에서는 극단적 사건이 발생이 거의 없다가 예측기간내에 IMF 외환위기와 같은 극단적 사건이 연이어 발생하여 어떤 VaR와 ES모형이 극단적 사건에 의한 꼬리위험을 예측하는데 적합한지를 확인하는데 적절한 시계열이기 때문이다.

$$D^q = \frac{(|D_1^q| + |D_2^q|)}{2} \quad (20)$$

$$D_1^q = \frac{1}{x^q} \sum_{t \in \kappa^q} (R_t - \widehat{ES}_{q,t}), \quad D_2^q = \frac{1}{y^q} \sum_{t \in \tau^q} (R_t - \widehat{ES}_{q,t}).$$

여기서 κ^q 는 실제 포지션금액이 $\widehat{VaR}_{q,t}$ 보다 작은(큰) 경우에 해당하는 시점들의 집합을 의미하고, κ^q 는 초과하는 경우의 총수를 말한다. τ^q 는 $R_t - (\widehat{ES}_{q,t})$ 가 실증적 q 분위수를 초과하는 경우에 해당하는 시점들의 집합을 의미하고, y^q 는 이때 초과하는 경우의 총수를 말한다.

D_1^q 는 ES 예측값에 대한 표준적인 사후검정 척도이지만 D_1^q 값이 VaR 추정치에 따라 달라지기 때문에 예측값의 정확도를 잘 반영한다고 할 수 없다. 이러한 단점을 보완하기 위해 VaR 추정치에 의존하지 않는 값인 D_2^q 와 결합한 D^q 를 사용한다. ES의 좋은 추정은 D^q 의 낮은 값으로 나타날 것이며 가장 좋은 추정은 D^q 값이 0으로 나타날 것이다.

IV. 연구결과

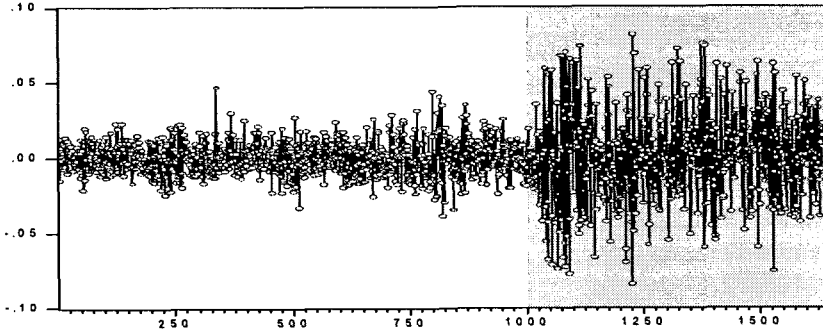
1. 기초통계량

1994년~1999년까지 주식수익률의 변화를 살펴보면 1994년 4월 8일부터 1997년 8월 30일까지는 증시의 큰 변동을 가져올 만한 극단적 사건이 적어 시계열이 안정적으로 보이지만 1997년 9월 1일 이후 IMF 외환위기와 같은 극단적 사건의 발생으로 인해 증시의 변동성은 크게 증가하였음을 [그림 1]을 통해 알 수 있다.

특히, [그림 1] 기간 중에서 증시의 변동성을 살펴보면 외환위기 이전의 표준편차는 0.011인데 외환위기 이후에는 약 3배인 0.028로 상승하였다. 그리고 주식수익률은 전체 기간에 걸쳐 비대칭적이고 두꺼운 꼬리분포를 가지고 있음을 알 수 있다. 또한 이분산성이 존재하는지를 살펴보기 위해 기간별로 GARCH모형을 추정한 결과 GARCH(1, 1)모형이 1% 유의수준에서 유의적으로 채택되어 이분산성이 존재함을 알 수 있다.¹⁰⁾

10) ARMA(p_1, q_1)-GARCH(p_2, q_2)모형에서 최적의 모형식별은 AIC(Akaike information criteria)기준 및 BIC(Schwarz-Bayesian information criteria)을 이용하여 선택하였다. 본 연구의 경우 AIC기준 및 BIC기준을 동시에 적용한 결과 AR(1)-GARCH(1, 1)모형이 가장 최적의 모형으로 식별되었다.

[그림 1] 주식수익률의 추이(1994년~1999년)



주) 음영으로 표시되지 않은 구간이 추정구간이고, 음영으로 표시된 구간이 예측구간임.

이처럼 주식수익률이 이분산성과 두꺼운 꼬리분포를 갖는 특성을 보일 경우 정규분포를 가정한 VaR모형은 실제 위험을 적절히 평가하지 못할 가능성이 높아 이를 해결할 수 있는 대체적 모형개발이 필요함을 알 수 있다.

<표 1> 일별 주식수익률의 기초통계량

기초통계량	전 체 기 간	IMF 외환위기 이전	IMF 외환위기 이후
	1994/4/8 ~ 1999/12/28	1994/4/8 ~ 1997/8/30	1997/9/1 ~ 1999/12/28
평 균	0.011%	-0.022%	0.061%
표준편차	0.019	0.011	0.028
왜 도	0.111	0.243	0.026
첨 도	5.879	3.989	3.279
Jarque-Berra	568.824 (0.000)*	50.706 (0.000)*	2.153 (0.340)
GARCH항	0.922 (0.000)*	0.807 (0.000)*	0.904 (0.000)*

* 1% 유의수준에서 유의함.

2. VaR의 추정 및 사후검증 결과

Normal모형 및 GARCH모형에 의해 산출한 VaR의 성과 및 GARCH-EVT모형을 적용하여 산출한 VaR의 성과를 Berkowitz와 O'Brien(2002)의 방법에 의해 비교 분석한 결과는 <표 2>와 같다.

<표 2>에 의하면 먼저 신뢰수준 95%에서 왼쪽 꼬리의 경우 GARCH-EVT모형의

실패율은 7.1%이고, 오른쪽 꼬리의 경우 GARCH-EVT모형의 실패율은 6.3%로 정규분포를 가정한 Normal모형에 의한 VaR 또는 이분산성만을 고려한 GARCH모형의 VaR보다 목표실패율 5%에 근접하고 있음을 볼 수 있다. 특히 신뢰수준 99%에서 GARCH-EVT모형의 실패율은 왼쪽 꼬리의 경우 1.7%, 오른쪽 꼬리의 경우 0.6%로 목표실패율

<표 2> VaR의 추정 및 사후검증 결과

VaR 성과비교는 Berkowitz와 O'Brien(2002)의 방법을 이용하였고, 초과횟수(number of violations) 및 초과정도(degree of violation)는 아래와 같이 측정하였다.

$$\text{초과회수} : V^{freq} = \begin{cases} 1 & \text{if } R_t < -\widehat{VaR}_{q,t} \\ 0 & \text{if } R_t \geq -\widehat{VaR}_{q,t} \end{cases}$$

$$\text{초과정도} : V^{diff} = \begin{cases} \text{abs}(R_t - (-\widehat{VaR}_{q,t})) & \text{if } R_t < -\widehat{VaR}_{q,t} \\ 0 & \text{if } R_t \geq -\widehat{VaR}_{q,t} \end{cases}$$

$$V^{size} = \frac{\sum V^{diff}}{V^{freq}}$$

또한, 실패율은 사후검증의 robustness평가하기 위한 방법으로 아래와 같이 Kupiec-test(1995) 방법을 이용하였다.

$$LR_{pof} = -2\ln\left(\frac{\hat{p}^x(1-\hat{p})^{n-x}}{\hat{p}^x(1-\hat{p})^{n-x}}\right) \sim \chi_1^2$$

VaR모형	왼쪽 꼬리				오른쪽 꼬리			
	평균 VaR	초과 회수 (V^{freq})	초과 정도 (V^{size})	실패율 (p 값)	평균 VaR	초과 회수 (V^{freq})	초과 정도 (V^{size})	실패율 (p 값)

$q = 0.95$

Normal모형	0.030	93	0.017	14.6% (0.000)*	0.030	86	0.018	13.5% (0.000)*
GARCH모형	0.042	57	0.011	8.9% (0.000)*	0.042	48	0.013	7.5% (0.000)*
GARCH-EVT모형	0.048	45	0.011	7.1% (0.000)*	0.048	40	0.011	6.3% (0.044)**

$q = 0.99$

Normal모형	0.043	51	0.016	8% (0.000)*	0.043	47	0.017	7.4% (0.000)*
GARCH모형	0.060	16	0.008	2.5% (0.000)*	0.060	17	0.008	2.6% (0.000)*
GARCH-EVT모형	0.069	11	0.007	1.7% (0.096)	0.075	4	0.011	0.6% (0.197)

* 1% 유의수준하에서 유의함, ** 5% 유의수준하에서 유의함.

에 거의 근사하고 있음을 알 수 있다.

이처럼 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 동시에 반영한 GARCH-EVT모형의 성과가 우수한 이유는 증권시장의 시가변적인 변동성에 맞추어 위험수준을 신속하게 반영할 뿐만 아니라 꼬리 위험까지 적절히 잘 반영할 수 있기 때문이다.

그러므로 VaR의 성과측면에서 볼 때 정규분포를 가정한 Normal모형은 실제 위험을 과소평가할 가능성이 있으며 금융시계열 자산이 이분산성과 두꺼운 꼬리분포의 특성을 가질 경우 이를 동시에 고려할 수 있는 GARCH-EVT모형이 위험척도로 적합할 것으로 판단된다.

3. ES의 추정 및 사후검증 결과

<표 2>의 VaR는 하부 가법성(sub-additivity)특성을 충족시키지 못하기 때문에 위험척도로서 일관적이지 못하고 꼬리위험을 과소평가하는 경향이 있다. 이러한 문제점을 극복하기 위해 VaR의 대안인 ES의 추정 결과를 Embrechts(2004) 방법을 활용하여 살펴본 결과는 <표 3>과 같다.

<표 3> ES의 추정 및 사후검증 결과

신뢰수준 q 하에서 ES의 추정치($\widehat{ES}_{q,t}$)에 대한 사후검정을 위해 Embrechts et al.(2004)에 의해 제안된 척도를 사용하였다.

$$D^q = \frac{(|D_1^q| + |D_2^q|)}{2}$$

$$\text{여기서, } D_1^q = \frac{1}{x^q} \sum_{t \in \kappa^q} (R_t - \widehat{ES}_{q,t}), \quad D_2^q = \frac{1}{y^q} \sum_{t \in \rho} (R_t - \widehat{ES}_{q,t})$$

포트폴리오 VaR모형	왼쪽 꼬리			오른쪽 꼬리			
	ES 평균	D_1^q	D_2^q	D^q	ES 평균	D_1^q	D_2^q

$q = 0.95$

Normal모형	0.0380	-0.0097	-0.0111	0.0104	0.0380	0.0109	0.0104	0.0107
GARCH모형	0.0532	-0.0016	0.0079	0.0048	0.0532	0.0032	-0.0263	0.0148
GARCH-EVT모형	0.068	-0.0008	0.0224	0.0116	0.062	0.004	-0.0463	0.0234

$q = 0.99$

Normal모형	0.0495	-0.0114	-0.0189	0.0152	0.0495	0.0112	0.0229	0.0171
GARCH모형	0.0688	-0.0008	0.0224	0.0116	0.0688	0.0004	-0.0463	0.0233
GARCH-EVT모형	0.0835	0.0013	0.0268	0.0141	0.0863	0.0027	-0.0683	0.0355

먼저 <표 2>와 <표 3>에서 ES와 VaR값의 차이를 살펴보면 신뢰수준 95%인 왼쪽 꼬리의 경우 Normal모형은 0.008, GARCH모형은 0.011, ARCH-EVT모형은 0.02정도로 VaR의 평균값이 ES의 평균값보다 전반적으로 낮게 측정되고 있음을 알 수 있다. 그렇다면 GARCH-EVT모형이 VaR 뿐만 아니라 ES에서도 우수한지를 <표 3>을 통해 살펴해보았다.

<표 3>을 보면 신뢰수준 95%인 왼쪽 꼬리의 경우 GARCH-EVT모형의 D^q 값이 Normal모형과 GARCH모형보다 낮아 상대적으로 우수함을 알 수 있다. 그러나 VaR추정치에 영향을 받지 않는 성과지표인 D^q 를 추가적으로 반영한 D^q 를 살펴보면 GARCH-EVT모형은 다른 모형보다 약간 높은 D^q 를 보여 ES성도가 다른 모형보다 우수하다고 단정하기 어렵다. 비록 ES의 성과가 robustness하지는 않지만 전반적으로 VaR는 ES보다 실제 위험을 과소평가할 가능성이 높음을 알 수 있다.

V. 요약 및 결론

국내의 선행연구에 의하면 대부분의 금융시계열은 정규분포보다 꼬리부분이 두꺼운 형태를 보이고, 이분산성을 띤다. 이 경우 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 고려하지 못한 기존의 VaR모형은 위험척도로서 적절하지 못할 가능성이 있다. 그래서 본 연구는 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 고려할 수 있는 GARCH-EVT모형이 다른 모형보다 높은 성과를 나타내는지 사후검증을 통해 살펴보았다. 주요한 연구결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 주식수익률은 정규분포보다는 꼬리부분이 두꺼운 형태를 보이고, 이분산성을 가진다. 이 경우 정규분포하에서 산출된 VaR는 실제 손실금액을 과소평가할 위험성이 있어 이분산성 및 꼬리부분의 두꺼움을 고려할 수 있는 모형의 도입이 필요함을 알 수 있다.

둘째, VaR의 성과를 살펴보면 신뢰수준 95%에서 왼쪽 꼬리의 경우 GARCH-EVT모형의 실패율은 7.1%로 정규분포를 가정한 Normal모형에 의한 VaR 또는 이분산성만을 고려한 GARCH모형의 VaR보다 목표실패율 5%에 근접하고 있음을 볼 수 있다. 특히 신뢰수준 99%에서 GARCH-EVT모형의 실패율은 왼쪽 꼬리의 경우 1.7%, 오른쪽 꼬리의 경우 0.6%로 목표실패율에 거의 근사하고 있음을 알 수 있다. 이처럼 이분산성 및 꼬리의 두꺼움을 동시에 반영한 GARCH-EVT모형의 성과가 우수한 이유는 증권시

장의 시가변적인 변동성에 맞추어 위험수준을 신속하게 반영할 뿐만 아니라 꼬리위험까지 적절히 잘 반영할 수 있기 때문이다.

셋째, ES의 성과를 살펴보면 신뢰수준 95%인 왼쪽 꼬리의 경우 GARCH-EVT모형의 D^q 값이 Normal모형과 GARCH모형보다 낮아 상대적으로 우수함을 알 수 있다. 그러나 VaR추정치에 영향을 받지 않는 성과지표인 D^q 를 반영한 D^q 를 살펴본 결과 GARCH-EVT모형은 다른 모형보다 약간 높은 D^q 를 보여 ES성과가 다른 모형보다 우수하다고 단정하기 어려웠다.

결론적으로 이분산성과 꼬리의 두꺼움을 동시에 반영한 GARCH-EVT모형하에서의 VaR가 금융기관 위험관리의 유용한 도구가 될 수 있는 가능성을 발견하였다. 비록 상대적으로 높은 성과를 보이지는 않지만 ES는 VaR와 함께 위험척도로 같이 사용할 때 보수적인 위험관리 차원에 부합될 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

- 김태혁, 조희정, “POT모형과 Copula를 이용한 주식시장 간 극단적 의존성의 측정”, 제18권 제2호, *재무연구*, 2005, 101-138.
- 김태혁, 조희정, “EVT-Copula 모형을 이용한 아시아 외환시장 간 극단적 의존성에 관한 연구”, 제23권 제1호, *재무관리연구*, 2006, 193-225.
- 문성주, 이덕창, 김대호, 오세경, “극단치이론을 이용한 VaR의 추정 및 성과”, *증권학회지*, 제32집 제3호, 한국증권학회, 2003, 223-266.
- 오세경, “극단치 이론과 Value at Risk : GPD모형을 중심으로”, *금융연구*, 제19권 제1호, 한국금융연구원, 2005, 70-111.
- 오세경, 문성주, “금융위기하에서 포트폴리오 위험척도의 비교”, *증권학회지* 제35권 제3호, 2006, 175-205.
- 한상범, “조건부 이분산성이 있는 경우 극치이론을 이용한 VaR의 추정”, 한국증권학회 발표논문집, 2000, 543-561.
- Acerbi, C., and D. Tasche, “On the coherence of expected shortfall,” *Journal of Banking and Finance*, 26, (2002), 1491-1507.
- Artzner, P., F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath, “Coherent Measures of Risk,” *Mathematical Finance* 9(3), (1999), 203-228.
- _____, “Thinking Coherently,” *Risk*, 10(11), (1997), 68-71.
- Danielsson, J. and C. de Vrie, “Tail Index and Quantile Estimation with Very High Frequency Data,” *Journal of Empirical Finance*, 4, (1997), 241-257.
- Danielsson, J. and Y. Morimoto, “Forecasting Extreme Financial Risk : A Critical Analysis of Practical Method for the Japans Market,” working paper. (2000).
- Kellezi, E. and M. Gilli, “Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measurement,” working paper, presented at the Computational Finance 2000 conference, (May 31 ~ June 2 2000).
- Neftci, S. N., “Value at Risk Calculation, Extreme Event, and Tail Estimation,” *The Journal of Derivatives*, 7(3), (2000), 23-37.
- McNeil, A. J. and R. Frey, “Estimation of Tail-related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series : an Extreme Value Theory Approach,” preprint, Department of Mathematik, Federal Institute of Technology, Zurich, (2000).

Yamai, Y. and T. Yoshida, "Comparative analysis of expected shortfall and Value at Risk : Their estimation error, decomposition and optimization," *Monetary and economic studies*, (January 2002), 87-112.

VaR and ES as Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Series

Seong-Ju Moon* · Sung-Kuk Yang**

〈abstract〉

In this paper we are concerned with estimation of tail related risk measures for heteroscedastic financial time series and VaR limits that VaR tells us nothing about the potential size of the loss given.

So we use GARCH-EVT model describing the tail of the conditional distribution for heteroscedastic financial series and adopt Expected Shortfall to overcome VaR limits. The main results can be summarized as follows.

First, the distribution of stock return series is not normal but fat tail and heteroscedastic. When we calculate VaR under normal distribution we can ignore the heavy tails of the innovations or the stochastic nature of the volatility.

Second, GARCH-EVT model is vindicated by the very satisfying overall performance in various backtesting experiments.

Third, we founded the expected shortfall as an alternative risk measures.

Keywords : GRACH Model, EVT Model, GARCH-EVT, VaR, ES

* Professor, Dept. of Fisheries Business Administration, Gyeongsang National University.

** Professor, Dept. of Business Administration, Cheju National University.