한국 *CAD/CAM* 학회 논문집
제 *11* 권 제 *4* 호 *2006* 년 *8* 월 *pp. 246-255*

학술논문

베지어 곡선과 곡면의 립과 팬

이주행*, 박형준**

Ribs and Fans of Bézier Curves and Surfaces

Lee, J.-H.* and Park, H.J.**

ABSTRACT

Ribs and fans are interesting geometric entities that are derived from an ordinary Bézier curve or surface. A rib itself is a Bézier curve or surface with a lower degree than the given curve or surface. A fan is a vector field whose degree is also lower than its origin. First, we present methods to transform the control points of a Bezier curve or surface into the control points and vectors of its ribs and fans. Then, we show that a Bézier curve of degree n is decomposed into a rib of degree $(n-1)$, a fan of degree $(n-2)$, and a scalar function of degree 2. We also show that a Bézier surface of degree (m, n) is decomposed into a rib of degree $(m-1, n-1)$ and three fans of degrees $(m-1, n-2)$, $(m-2, n-1)$, and $(m-2, n-2)$, respectively. In addition, the lengths of the fans are further controlled by scalar functions of degree 2 and (2, 2). We present relevant notations and definitions, introduce theories, and present some of design examples.

Key words : Rib, Fan, Bézier curve and surface, Decomposition

1. 서 론

베지어 곡선과 곡면은 CAGD 이론 중 가장 전통있고 널리 알려진 이론중의 하나이다. 이 이론은 그리드 컴퓨팅 기반의 전문적인 CAD 툴에서 플래시[5] 뷰어가 내장된 모바일 단말기에 이르기 까지 수 많은 GUI 기반 응용과 다양한 디바이스 장치에 구현되어 있다(실로 베지어 이론의 구현은 유비쿼터스하다고 할 수 있다!). 이러한 인기는 NURBS와 같은 강력한 후계자들도 아직 따라오지 못하고 있다. 이는 아마도 베지어 곡선/곡면의 구조적인 단순함에 비해 상대적으로 풍부한 표현력에 있어 보인다. 또한, 베지어 곡선/곡면은 매력적인 기하학적 성질들이 많이 갖고 있다. 예를 들어, affine invariance, convex hull, variation diminishing property[1,2,4] 등을 들 수 있다.

본 논문에서는 베지어 곡선과 곡면의 새로운 성질, 즉 립(rib)과 팬(fan)을 소개하고, 주어진 베지어 곡선과 곡면을 팬과 립으로 분해하는 방법을 제시한다(특별히 이름을 립과 팬으로 한 것은, Fig. 3에서 처럼 주어진 곡선을 기준으로 늑골(rib)이나 부챗살(fan) 모양의 패턴이 생성되기 때문이다.).

립은 그 자체가 베지어 곡선 또는 곡면이며 주어진 곡선 또는 곡면 보다 차수(degree)가 낮다. 팬 역시 차수가 낮은 벡터 필드이다. 또한, 팬과 립의 제어점과 제어벡터는 주어진 베지어 곡선과 곡면의 원래 제어점을 변환하여 얻을 수 있음을 보인다. 차수 n의 베지어 곡선은 $(n-1)$차 립과 $(n-2)$차 팬으로 분해 가능하다. (m, n)차의 베지어 곡면은 $(m-1, n-1)$차의 립 한 개와 각각 $(m-1, n-2)$, $(m-2, n-1)$, $(m-2, n-2)$차의 세 개의 팬으로 분해 가능하다. 추가적으로, 각 팬에는 고유의 스칼라 함수가 곱해져 팬 벡터들의 길이를 조정한다. 최종적으로 립과 길이 조정된 팬들을 모두 더하면 주어진 베지어 곡선과 곡면을 얻을 수 있다. 본 논문에서는 필요한 기호와 정의를 설명하고 이론을 설명한 후에 실제 디자인 예제들을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2장에서는 이론 전개를 위해 필요한 베지어 곡선의 성질 몇 가지를 살펴본다. 또한, 새로운 개념 설명을 위해 기호와 정의를 제시한다. 마지막으로 베지어 곡선과 곡면의

*교신저자, 정회원, 한국전자통신연구원, 디지털콘텐츠 연구단
**종신회원, 조선대학교, 산업공학과
- 논문투고일: 2005. 02. 14
- 심사완료일: 2006. 01. 27

립과 팬 이론을 설명한다. 3장에서는 립과 팬의 기하학적인 특징을 잘 보여주는 몇 가지 디자인 예제들을 소개한다. 마지막으로 4장에서 본 논문을 맺는다.

2. 팬과 립

이 장에서는 베지어 곡선과 곡면의 립과 팬을 설명하기 위해 필요한 기하학적 성질을 살펴보고, 새로운 기호 및 정의를 제시하고, 마지막으로 립과 팬에 대해서 자세히 설명하기로 한다.

2.1 관련 성질

일반적으로 차수 n의 베지어 곡선 $\mathbf{C}^n(t)$는 주어진 제어점 $\mathbf{b}_i$와 번슈타인 다항식 $B_i^n(t)$ 에 대해서 $\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ 로 정의된다. 즉, 베지어 곡선은 제어점 $\mathbf{b}_i$ 들을 $B_i^n(t)$ 을 가중치로 하여 선형 조합한 것이다. 번슈타인 다항식은 다음과 같이 재귀적으로 정의된다.

$$B_i^{n+1}(t) = (1-t)B_i^n(t) + tB_{i-1}^n(t) \tag{1}$$

식 (1)은 차수가 하나 차이 나는 두 번슈타인 다항식들 사이의 재귀적인 관계를 나타내고 있다. 더 큰 차수 차이에 대한 재귀 관계를 알고 싶다면 식 (1)을 반복적으로 적용하여 구할 수 있다. 예를 들어, 차수가 둘 차이 나는 $B_*^{n+1}(t)$ 와 $B_*^{n-1}(t)$ 의 관계는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} B_i^{n+1}(t) &= (1-t)^2 B_i^{n-1}(t) + 2(1-t)tB_{i-1}^{n-1}(t) + t^2 B_{i-2}^{n-1}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{2} B_j^2(t) B_{i-j}^{n-1}(t) \end{aligned} \tag{2}$$

식 (1)-(2)에서는 두 개 이상의 낮은 차수의 다항식으로 높은 차수의 다항식을 정의했다. 아래 관계식은 한 개의 낮은 차수의 다항식으로 높은 차수의 다항식을 정의한다:

$$B_i^n(t) = \frac{n}{n-i}(1-t)B_i^{n-1}(t),\ \ 0 \le i < n \tag{3}$$

$$B_i^n(t) = \frac{n}{i}tB_{i-1}^{n-1}(t),\ \ 0 < i \le n \tag{4}$$

식 (1)-(4)의 관계식은 번슈타인 다항식의 잘 알려진 성질들이다[1,3].

2.2 곡선의 경우

이 절에서는 먼저 베지어 곡선의 립과 팬에 대해서 설명한다(2.3절에서 베지어 곡면의 경우에 대해서 설명한다.). 먼저, 몇 가지 표현기호를 설명하고, 주어진 제어점을 변환하여 립의 제어점과 팬의 제어벡터를 구하는 방법을 설명한다. 마지막으로, 주어진 베지어 곡선을 립과 팬으로 분해하는 방법을 설명한다.

2.2.1 립과 제어점

주어진 n차 베지어 곡선의 제어점으로부터 n차 립의 제어점을 다음과 같이 정의한다. $\mathbf{b}_i \equiv \mathbf{r}_i^n (0 \le i \le n)$. (즉, 주어진 곡선이 최상위 차의 립이다.)

k차 립의 제어점을 다음과 같이 재귀적으로 정의한다.

$$\mathbf{r}_i^k = \begin{cases} \dfrac{(k-i)}{k}\mathbf{r}_i^{k+1} + \dfrac{i}{k}\mathbf{r}_{i+1}^{k+1} & \text{for } 1 \le k < n \\ \mathbf{b}_i & \text{for } k = n \end{cases} \tag{5}$$

이러한 립 제어점을 베지어 곡선의 정의에 이용하여 k차의 베지어 곡선 $\mathbf{R}^k(t)$을 정의할 수 있다.

$$\mathbf{R}^k(t) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{r}_i^k B_i^k(t) \ \ \text{for } 1 \le k \le n \tag{6}$$

위 베지어 곡선은 일반적인 베지어 곡선이지만 한 가지 특징은 ($1 \le k < n$ 인 경우에) 명시적인 상위 차수 곡선 $\mathbf{R}^{k+1}(t)$ 이 존재한다는 것이다. 이렇게 정의된 낮은 차수의 베지어 곡선을 높은 차수 베지어 곡선의 립이라고 한다. 가장 낮은 차수의 립은 립 제어점 $\mathbf{r}_0^1$ 과 $\mathbf{r}_1^1$ 을 연결하는 직선이다. 가장 높은 차수의 립은 주어진 곡선자체라고 볼 수 있다. $\mathbf{R}^n(t) \equiv \mathbf{C}^n(t)$. $1 \le k < n$ 일 때, k차 립은 언제나 주어진 두 끝점 ($\mathbf{r}_0^n$ 과 $\mathbf{r}_n^n$)을 지나는 베지어 곡선이다.

2.2.2 팬과 제어벡터

차수 k의 팬 제어벡터 $\mathbf{f}_i^k$ 는 차수 $(k+2)$의 인접한 세 개의 립 제어점들(즉, $\mathbf{r}_i^{k+2}, \mathbf{r}_{i+1}^{k+2}, \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}$)로 다음과 같이 정의 된다.

$$\mathbf{f}_i^k = \mathbf{r}_{i+1}^{k+2} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+2} + \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}),\ \ (0 \le k \le n-2) \tag{7}$$

위의 팬 제어벡터를 베지어 곡선의 정의에 이용하여 다음과 같이 벡터 필드를 정의할 수 있다.

$$\mathbf{F}^k(t) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{f}_i^k B_i^k(t),\ \ (0 \le k \le n-2) \tag{8}$$

식 (8)의 벡터 필드를 주어진 베지어 곡선 또는 립 $\mathbf{R}^{k+2}(t)$ 의 팬이라고 정의한다. 가장 낮은 차수의 팬

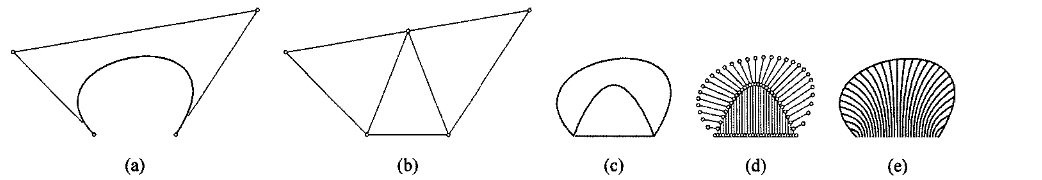


Fig. 1. 베지어 곡선의 럽과 팬을 생성하는 과정: (a) 주어진 곡선 $\mathbf{C}^3(t) \equiv \mathbf{R}^3(t)$과 제어점 $\{\mathbf{b}_i\}$; (b) 서로 다른 세 차수의 럽 제어점들 $\{\mathbf{r}_i^3 = \mathbf{b}_i\}, \{\mathbf{r}_i^2\}, \{\mathbf{r}_i^1\}$; (c) (b)의 럽 제어점으로 정의되는 일련의 럽들 $\mathbf{R}^3(t), \mathbf{R}^2(t), \mathbf{R}^1(t)$, (d) 팬 $\mathbf{F}^0(t)$ 과 $\mathbf{F}^1(t)$ 의 샘플 벡터들; (e) 팬 곡선들.

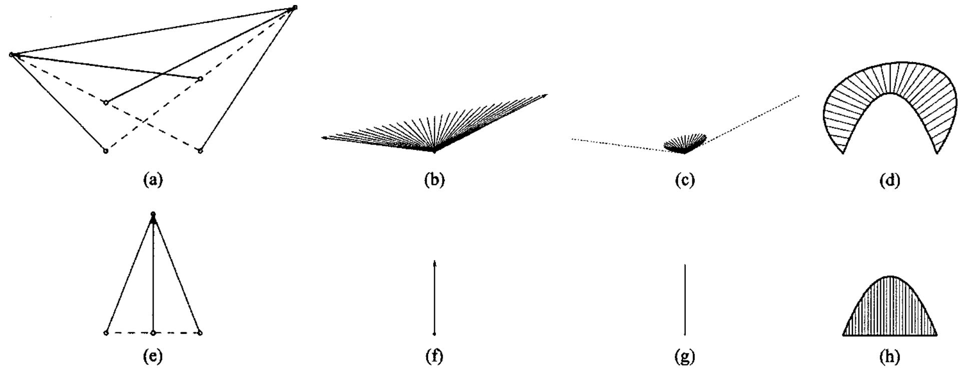


Fig. 2. 3차 베지어 곡선으로부터 팬을 구하는 절차: (a) $\mathbf{r}_i^3$ (청색)를 이용한 두 팬 제어벡터 $\mathbf{f}_0^1$ 와 $\mathbf{f}_1^1$ 에 대한 정의 (적색); (b) 팬 $\mathbf{F}^1(t)$ 의 샘플 벡터들; (c) (b)의 결과를 $2t(1-t)$ 만큼 크기 조절; (d) 두 개의 럽($\mathbf{R}^3(t)$ 과 $\mathbf{R}^2(t)$)과 그 사이에 그려진 팬 벡터 필드 $2t(1-t)\mathbf{F}^1(t)$ 의 샘플들; (e) $\mathbf{r}_i^2$ 를 이용한 팬 제어벡터 $\mathbf{f}_0^0$ 의 정의; (f) 팬 $\mathbf{F}^0(t)$ 의 샘플들은 항상 $\mathbf{f}_0^0$ 와 같음을 보여줌; (g) (f)의 결과를 $2t(1-t)$ 만큼 크기 조절; (h) 두 개의 럽($\mathbf{R}^2(t)$ 과 $\mathbf{R}^1(t)$)과 그 사이에 그려진 팬 벡터 필드 $2t(1-t)\mathbf{F}^1(t)$ 의 샘플들.

인 $\mathbf{F}^0(t)$ 는 세 개의 제어점으로 정의되는 고정된 벡터이다(Fig. 2(c) 참조).

Fig. 1은 2.2절에서 정의된 개념들을 요약하여 보여주고 있다. Fig. 1(b)는 위로부터 각각 3차, 2차, 1차 곡선의 제어 다각형들을 보여주고, Fig. 1(c)는 각 제어 다각형에 해당하는 베지어 곡선들을 보여주고 있나. Fig. 1(e)에서 부챗살 모양의 곡선은 모두 2차 베지어 곡선이다. 이 곡선의 제어점은 서로 다른 세 개의 럽에서 같은 매개변수 값에 해당하는 세 개의 점들(즉, $\mathbf{R}^3(t_j), \mathbf{R}^2(t_j), \mathbf{R}^1(t_j)$)이다. 이런 방식으로 럽들의 점을 제어점으로 정의되는 곡선을 팬 곡선이라고 한다. Fig. 2는 팬 벡터 필드를 정의하는 과정을 요약하여 보여주고 있다.

2.2.3 베지어 곡선의 럽과 팬

이 절에서는 식 (5)-(8)의 정의를 이용하여 n차의 베지어 곡선을 $(n-1)$차의 럽과 다항식 $2t(1-t)$로 길이가 조절되는 $(n-2)$차의 팬으로 분해하는 방법을 제시하고 이를 증명한다.

Theorem 1. (베지어 곡선의 럽과 팬) 차수 $n \geq 2$의 베지어 곡선 $\mathbf{R}^n(t)$은 $(n-1)$차 럽 $\mathbf{R}^{n-1}(t)$과 $2t(1-t)$로 길이가 조절되는 $(n-2)$차 팬 $\mathbf{F}^{n-2}(t)$로 분해된다.

$$\mathbf{R}^n(t) = \mathbf{R}^{n-1}(t) + 2t(1-t)\mathbf{F}^{n-2}(t) \tag{9}$$

증명: 수학적 귀납법을 이용하여 식 (9)를 증명하기로 한다. 먼저 첫 단계로, $n=2$일 때, $\mathbf{R}^2(t)$ 의 제어점 $\{\mathbf{b}_i = \mathbf{r}_i^2\}$ $(0 \leq i \leq 2)$ 이 주어져 있다고 하자. 식 (5)에 의해, $\mathbf{R}^1(t)$ 의 제어점 $\{\mathbf{r}_i^1\}$ 은 다음과 같다: $\mathbf{r}_0^1 = \mathbf{r}_0^2$, $\mathbf{r}_1^1 = \mathbf{r}_2^2$. 따라서, 럽 $\mathbf{R}^1(t)$ 은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{R}^1(t) = \sum_{i=0}^{1} \mathbf{r}_i^1 B_i^1(t) = (1-t)\mathbf{r}_0^2 + t\mathbf{r}_2^2 \tag{10}$$

식 (7)에 의해, 0차의 팬 제어벡터는 다음과 같다: $\mathbf{f}_0^0 = \mathbf{r}_1^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_0^2 + \mathbf{r}_2^2)$. 따라서, 0차의 팬은 고정벡터이며 제어벡터와 일치한다:

$$\mathbf{F}^0(t) = \mathbf{f}_0^0 = \mathbf{r}_1^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_0^2 + \mathbf{r}_2^2) \tag{11}$$

식 (10)-(11)을 식 (9)에 대입하여, 귀납법의 첫 단계가 다음과 같이 성립함을 알 수 있다:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{R}^1(t)+2t(1-t)\mathbf{F}^0(t)\\
&=(1-t)\mathbf{r}_0^2+t\mathbf{r}_2^2+2t(1-t)\left(\mathbf{r}_1^2-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_0^2+\mathbf{r}_2^2)\right)\\
&=(1-t)^2\mathbf{r}_0^2+2t(1-t)\mathbf{r}_1^2+t^2\mathbf{r}_2^2\\
&=\sum_{i=0}^{2}\mathbf{r}_i^2B_i^2(t)=\mathbf{R}^2(t)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

다음 단계로, $n = k$일 때 다음과 같은 귀납적 가정이 성립한다고 하자:

$$\mathbf{R}^k(t)=\mathbf{R}^{k-1}(t)+2t(1-t)\mathbf{F}^{k-2}(t) \tag{13}$$

다음으로 식 (13)의 귀납적 가정이 $n = k+1$ 에 대해서도 다음과 같이 성립함을 보이기로 한다:

$$\mathbf{R}^{k+1}(t)=\mathbf{R}^k(t)+2t(1-t)\mathbf{F}^{k-1}(t) \tag{14}$$

식 (2)을 이용하면 $(k+1)$ 차의 베지어 곡선을 $(k-1)$ 차의 번슈타인 곡선을 이용하여 표현할 수 있다. 따라서 식 (14)의 $\mathbf{R}^{k+1}(t)$ 은 다음과 같이 표현 가능하다:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}^{k+1}(t)&=\sum_{i=0}^{k+1}\mathbf{r}_i^{k+1}B_i^{k+1}(t)\\
&=\sum_{i=0}^{k+1}\mathbf{r}_i^{k+1}\left(\sum_{j=0}^{2}B_j^2(t)B_{i-j}^{k-1}(t)\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

식 (5)과 식 (3)-(4)을 이용하여 식 (14)의 $\mathbf{R}^k(t)$ 을 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}^k(t)&=\sum_{i=0}^{k}\mathbf{r}_i^kB_i^k(t)=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}((k-i)\mathbf{r}_i^{k+1}+i\mathbf{r}_{i+1}^{k+1})B_i^k(t)\\
&=\frac{1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k}(k-i)\mathbf{r}_i^{k+1}B_i^k(t)\right)+\frac{1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k}i\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}B_i^k(t)\right)\\
&=\frac{1}{k}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)\mathbf{r}_i^{k+1}\frac{k}{k-i}(1-t)B_i^{k-1}(t)\right)\\
&\quad+\frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k}i\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}\frac{k}{i}tB_{i-1}^{k-1}(t)\right)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{r}_i^{k+1}(1-t)B_i^{k-1}(t)+\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{r}_{i+2}^{k+1}tB_i^{k-1}(t)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}((1-t)\mathbf{r}_i^{k+1}+t\mathbf{r}_{i+2}^{k+1})B_i^{k-1}(t)
\end{aligned}
\tag{16}
$$

식 (7)-(8)에 의해, 식 (14)의 $\mathbf{F}^{k-1}(t)$ 을 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}^{k-1}(t)&=\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{f}_i^{k-1}B_i^{k-1}(t)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+1}+\mathbf{r}_{i+2}^{k+1})\right)B_i^{k-1}(t)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

식 (16)-(17)은 차수 k의 립과 차수 $(k-1)$ 의 펜을 $(k-1)$ 차의 번슈타인 다항식과 $(k+1)$ 차의 립 제어점으로 표현할 수 있음을 보여준다. 식 (16)-(17)을 식 (14)에 대입하여 다음과 같이 전개할 수 있다:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R}^{k+1}(t)&=\mathbf{R}^k(t)+2t(1-t)\mathbf{F}^{k-1}(t)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}((1-t)\mathbf{r}_i^{k+1}+t\mathbf{r}_{i+2}^{k+1})B_i^{k-1}(t)\\
&\quad+2t(1-t)\sum_{i=0}^{k-1}\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+1}+\mathbf{r}_{i+2}^{k+1})\right)B_i^{k-1}(t)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}((1-t)^2\mathbf{r}_i^{k+1}+2t(1-t)\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}+t^2\mathbf{r}_{i+2}^{k+1}t)B_i^{k-1}(t)\\
&=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{2}\mathbf{r}_{i+j}^{k+1}B_j^2(t)\right)B_i^{k-1}(t)
\end{aligned}
\tag{18}
$$

$$\mathbf{R}^{k+1}(t)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\sum_{j=0}^{2}\mathbf{r}_{i+j}^{k+1}B_j^2(t)\right)B_i^{k-1}(t)$$

$$
=\left[\begin{array}{l}
\mathbf{r}_0^{k+1}B_0^2(t)B_0^{k-1}(t)+\mathbf{r}_1^{k+1}B_1^2(t)B_0^{k-1}(t)+\mathbf{r}_2^{k+1}B_2^2(t)B_0^{k-1}(t)\\
\qquad\qquad+\mathbf{r}_1^{k+1}B_0^2(t)B_1^{k-1}(t)+\mathbf{r}_2^{k+1}B_1^2(t)B_1^{k-1}(t)+\ \ldots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad+\mathbf{r}_2^{k+1}B_0^2(t)B_2^{k-1}(t)+\ \cdots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\mathbf{r}_{k-1}^{k+1}B_2^2(t)B_{k-3}^{k-1}(t)\qquad\ddots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\ +\mathbf{r}_{k-1}^{k+1}B_1^2(t)B_{k-2}^{k-1}(t)+\mathbf{r}_k^{k+1}B_2^2(t)B_{k-2}^{k-1}(t)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\ +\mathbf{r}_{k-1}^{k+1}B_0^2(t)B_{k-1}^{k-1}(t)+\mathbf{r}_k^{k+1}B_1^2(t)B_{k-1}^{k-1}(t)+\mathbf{r}_{k+1}^{k+1}B_2^2(t)B_{k-1}^{k-1}(t)
\end{array}\right]
\tag{19}
$$

식 (18)을 식 (19)과 같이 전개할 수 있다. 식 (19)의 우항의 행렬에서, 세 번째와 네 번째 열을 관찰하여 얻은 패턴을 이용하여 다음과 같이 식을 표현할 수 있다:

$$\mathbf{R}^{k+1}(t)=\mathbf{r}_0^{k+1}\left(\sum_{j=0}^{2}B_j^2(t)B_{0-j}^{k-1}(t)\right)+\mathbf{r}_1^{k+1}\left(\sum_{j=0}^{2}B_j^2(t)B_{1-j}^{k-1}(t)\right)$$
$$+\ldots+\mathbf{r}_i^{k+1}\left(\sum_{j=0}^{2}B_j^2(t)B_{i-j}^{k-1}(t)\right)+\ldots$$
$$+\mathbf{r}_k^{k+1}\left(\sum_{j=0}^{2}B_j^2(t)B_{k-j}^{k-1}(t)\right)+\mathbf{r}_{k+1}^{k+1}\left(\sum_{j=0}^{2}B_j^2(t)B_{k+1\ j}^{k-1}(t)\right)$$
$$=\sum_{i=0}^{k+1}\mathbf{r}_i^{k+1}\left(\sum_{j=0}^{2}B_j^2(t)B_{i-j}^{k-1}(t)\right) \tag{20}$$

위와 같은 표현을 위해서는 번슈타인 다항식의 인덱스의 성질을 이용하는 것이 중요하다(예를 들어, $i\notin[0,k]$ 에 대해서 $B_i^k(t)=0$ 가 성립하는 것.). 마지막으로 식 (2)을 식 (20)에 적용하여 식 (15)의 귀납적 단계를 얻을 수 있다. 즉, 식 (13)의 귀납적 가정이 $n=k+1$ 에 대해서도 성립하는 것이다. 따라서, 정리가 성립한다고 할 수 있다. **Q.E.D.**

Corollary 1. 차수 $n\geq 2$의 베지어 곡선 $\mathbf{R}^n(t)$ 은 l 차의 하나의 립과 차수 $(n-2)$ 에서 $(l-1)$까지의 일련의 $(n-l)$ 개의 팬으로 다음과 같이 분해될 수 있다:

$$\mathbf{R}^n(t)=\mathbf{R}^l(t)+2t(1-t)\sum_{k=l-1}^{n-2}\mathbf{F}^k(t)$$
$$=\sum_{i=0}^{l}\mathbf{r}_i^lB_i^l(t)+2t(1-t)\sum_{k=l-1}^{n-2}\sum_{i=0}^{k}\mathbf{f}_i^kB_i^k(t)\quad 1\leq l\leq n-1 \tag{21}$$

정리 1을 하위 립들에 연속적으로 적용하여 위와 같은 따름정리를 얻을 수 있다. 따름정리 1에 따르면, 예를 들어, 주어진 베지어 곡선 $\mathbf{R}^n(t)$ 은 선택한 하위 립의 차수에 따라 다음과 같이 다른 방법으로 분해될 수 있다:

$$\mathbf{R}^n(t)=\mathbf{R}^{n-1}(t)+2t(1-t)\mathbf{F}^{n-2}(t)$$
$$=\mathbf{R}^{n-2}(t)+2t(1-t)(\mathbf{F}^{n-2}(t)+\mathbf{F}^{n-3}(t))$$
$$=\mathbf{R}^{n-3}(t)+2t(1-t)(\mathbf{F}^{n-2}(t)+\mathbf{F}^{n-3}(t)+\mathbf{F}^{n-4}(t)) \tag{22}$$

또한, 따름정리 1에 의해 베지어 곡선 $\mathbf{R}^n(t)$ 은 하나의 선분, 즉 $\mathbf{R}^1(t)$ 과 $(n-1)$ 개의 팬으로 분해될 수 있다(Fig. 1(d), 3(e), 4(d) 참조).

2.3 곡면의 경우

베지어 곡면은 텐서곱 곡면이다. 따라서, 베지어 곡선에 대한 립과 팬 이론을 베지어 곡면으로 확장할 수 있다. 이 절에서는 베지어 곡면의 u와 v 방향으로 각각 베지어 곡선에 대한 립과 팬 분해를 적용하여 곡면의 립과 팬을 얻는 방법을 설명한다.

2.3.1 표기법

일반적으로 차수 (m,n) 의 베지어 곡면은 다음과 같은 텐서곱으로 표현된다: $\mathbf{x}^{m,n}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{b}_{i,j}B_i^m(u)B_j^n(v)$. u와 v는 실수 구간에 정의되는 두 개의 독립변수이다. 본 논문에서는 기존의 표기와 더불어 립과 팬 개념의 설명이 용이하도록 텐서곱 곡면에 대해서 약간 다른 표기법을 사용하기로 한다. 특히, 이 표기법은 u와 v 방향으로의 독립적인 분해의 중간과정을 잘 보여 줄 수 있다는 장점이 있다. 먼저 베지어 곡면의 제어점들이 크기 $(m+1)\times(n+1)$ 의 메쉬(또는 제어망)에 놓여 있고 각 제어점을 $\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\equiv\mathbf{b}_{i,j}$ 와 같이 표기한다(단, $0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n$) 이제 차수 (m,n) 의 베지어 곡면을 다음과 같이 표기한다:

$$\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v)\equiv\mathbf{x}^{m,n}(u,v)$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\cdot B_i^m(u)\cdot B_j^n(v) \tag{23}$$

두 정수 m과 n은 텐서곱 곡면의 u와 v 방향으로의 차수를 각각 나타낸다. 이 표기법을 이용하여 주어진 베지어 곡면에 놓인 베지어 곡선을 립과 팬으로 분해하여 보기로 한다.

주어진 제어망의 j번째 행의 제어점 $\{\mathbf{r}_0^m\mathbf{s}_j^n,\ldots\mathbf{r}_m^m\mathbf{s}_j^n\}$ 으로 정의되는 베지어 곡선을 다음과 같이 표현한다: $\mathbf{R}^m\mathbf{S}_j^n(u)\equiv\sum_{i=0}^{m}\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\cdot B_i^m(u)$. 유사하게, i번째 열의 제어점 $\{\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_0^n,\ldots,\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_n^n\}$로 정의되는 베지어 곡선을 다음과 같이 표현한다: $\mathbf{R}_i^m\mathbf{S}^n(v)\equiv\sum_{j=0}^{m}\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\cdot B_j^n(v)$.

따라서, 식 (23)을 다음과 같이 전개할 수 있다:

$$\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v)\equiv\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\cdot B_i^m(u)\cdot B_j^n(v)$$
$$=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{R}^m\mathbf{S}_j^n(u)\cdot B_j^n(v)=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{R}_i^m\mathbf{S}^n(v)\cdot B_i^m(u) \tag{24}$$

곡선 $\mathbf{R}^m\mathbf{S}_j^n(u)$의 립과 팬을 각각 $\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}_j^n(u)$과 $\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}_j^n(t)$으로 표기할 때, 정리 1에 따르면 곡선 $\mathbf{R}^m\mathbf{S}_j^n(u)$을 다음과 같이 분해할 수 있다:

$$\mathbf{R}^m\mathbf{S}_j^n(u) = \mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}_j^n(u) + 2u(1-u)\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}_j^n(u) \tag{25}$$

식 (5)에 따라, 립 $\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}_j^n(u)$의 제어점은 립 $\mathbf{R}^m\mathbf{S}_j^n(u)$의 제어점으로 다음과 같이 표현된다. 단, $0 \le i \le m-1$.

$$\mathbf{r}_i^{m-1}\mathbf{s}_j^n = \frac{1}{(m-1)}((m-1-i)\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n + i\mathbf{r}_{i+1}^m\mathbf{s}_j^n)$$
$$(0 \le i \le m-1) \tag{26}$$

식 (7)에 의해 팬 $\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}_j^n(u)$의 제어벡터는 다음과 같이 표현된다:

$$\mathbf{f}_i^{m-2}\mathbf{s}_j^n = \mathbf{r}_{i+1}^m\mathbf{s}_j^n - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n + \mathbf{r}_{i+2}^m\mathbf{s}_j^n)$$
$$(0 \le i \le m-2) \tag{27}$$

위와 같은 새로운 표기법의 특징은 분해와 제어점 변환 과정에서 독립적인 부분이 변화 없이 유지된다는 점이다. 예를 들어, 식 (25)에서 $\mathbf{S}_j^n$는 u 방향으로의 분해에 대해 불변이다. 식 (26)-(27)에서 $\mathbf{s}_j^n$ 역시 u 방향으로의 제어점 변환에서 불변이다.

곡선 $\mathbf{R}_i^m\mathbf{S}^n(v)$의 립과 팬을 각각 $\mathbf{R}_i^m\mathbf{S}^{n-1}(v)$과 $\mathbf{R}_i^m\mathbf{G}^{n-2}(v)$으로 표기할 때, 식 (25)와 유사하게 다음과 같은 분해가 가능하다:

$$\mathbf{R}_i^m\mathbf{S}^n(v) = \mathbf{R}_i^m\mathbf{S}^{n-1}(v) + 2v(1-v)\mathbf{R}_i^m\mathbf{G}^{n-2}(v) \tag{28}$$

립의 제어점과 팬의 제어벡터는 식 (26)-(27)와 유사하게 다음과 같이 정의된다:

$$\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^{n-1} = \frac{1}{(n-1)}((n-1-j)\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n + j\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_{j+1}^n)$$
$$(0 \le j \le n-1) \tag{29}$$

$$\mathbf{r}_i^m\mathbf{g}_j^{n-2} = \mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_{j+1}^n - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n + \mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_{j+2}^n)$$
$$(0 \le j \le n-2) \tag{30}$$

2.3.2 제어점의 이중변환

2.3.1절에서는 특정 매개변수 방향(예를 들어 u 또는 v)으로의 제어점의 單一 변환에 대해서 살펴보았다. 하지만, 제어점 변환은 한번 변환이 된 결과에 대해서도 매개변수 방향에 상관없이 연속적으로 적용될 수 있다. 특히, 우리는 텐서곱 곡면에 대해서 립과 팬을 유도하기 위해 아래와 같은 네 가지 타입의 二重변환을 살펴보아야 한다:

$$\{\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[u]{\text{rib}} \{\mathbf{r}_i^{m-1}\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[v]{\text{rib}} \{\mathbf{r}_i^{m-1}\mathbf{s}_j^{n-1}\} \tag{31}$$

$$\{\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[u]{\text{rib}} \{\mathbf{r}_i^{m-1}\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[v]{\text{fan}} \{\mathbf{r}_i^{m-1}\mathbf{g}_j^{n-2}\} \tag{32}$$

$$\{\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[u]{\text{fan}} \{\mathbf{f}_i^{m-2}\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[v]{\text{rib}} \{\mathbf{f}_i^{m-2}\mathbf{s}_j^{n-1}\} \tag{33}$$

$$\{\mathbf{r}_i^m\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[u]{\text{fan}} \{\mathbf{f}_i^{m-2}\mathbf{s}_j^n\} \xrightarrow[v]{\text{fan}} \{\mathbf{f}_i^{m-2}\mathbf{s}_j^{n-2}\} \tag{34}$$

위의 변환에서 각 화살표는 하위 차수로의 제어점 변환을 의미한다. 각 변환의 타입과 방향은 각각 화살표 위와 아래에 명기되어 있다(예를 들어, 식 (31)은 주어진 제어점을 처음에 u 방향으로 립 변환을 하고 다음에 v 방향으로 팬 변환을 하는 과정을 나타낸다.). 위의 변환에서 순서는 결과에 영향을 미치지 않는다. 위의 식 (31)-(34)에서 첫 번째 변환의 결과는 곡면의 립의 제어점이고, 나머지는 서로 다른 세 개의 팬의 제어벡터를 의미하고 있다. 식 (31)과 같은 변환의 예는 식 (29)를 식 (26)에 적용하는 것이다. 식 (27)와 (29), 식 (26)와 (30), 식 (27)와 (30)을 결합하여 각각 식 (32), 식 (33), 식 (34)의 결과를 얻을 수 있다. 위의 네 가지 이중변환에 대한 명시적인 표현을 다음 절에서 설명하기로 한다.

2.3.3 립과 제어점

주어진 베지어 곡면 $\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v)$에 대해서, 하위 차수 (k, l)의 립 제어점 $\{\mathbf{r}_i^k\mathbf{s}_j^l\}$을 다음과 같이 정의한다:

$$\mathbf{r}_i^k\mathbf{s}_j^l = \frac{(l-j)}{kl}((k-i)\mathbf{r}_i^{k+1}\mathbf{s}_j^{l+1} + i\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}\mathbf{s}_j^{l+1})$$
$$+ \frac{j}{kl}((k-i)\mathbf{r}_i^{k+1}\mathbf{s}_{j+1}^{l+1} + i\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}\mathbf{s}_{j+1}^{l+1}) \tag{35}$$

위 식은 $1 \le k < n, 1 \le l < m$일 때 성립하며, $k = n$, $l = m$인 경우는 $\mathbf{r}_i^k\mathbf{s}_j^l = \mathbf{b}_{i,j}$이다. 위 식에서 곡면의 립 제어점은 상위 차수의 인접한 네 개의 제어점으로 정의됨을 알 수 있다. (식 (35)는 이중변환 식 (31)을 이용하여 유도할 수 있다.).

립 $\mathbf{R}^k\mathbf{S}^l(u,v)$은 식 (35)의 제어점으로 정의되는 특별한 베지어 곡면이다. 어떠한 하위 차수의 립에서도, 립의 네 모서리는 주어진 베지어 곡면의 네 모서

리와 일치한다. 즉 다음의 관계가 성립한다: $\{\mathbf{r}_0^k\mathbf{s}_0^l = \mathbf{b}_{0,0}, \mathbf{r}_k^k\mathbf{s}_0^l = \mathbf{b}_{m,0}, \mathbf{r}_0^k\mathbf{s}_l^l = \mathbf{b}_{0,n}, \mathbf{r}_k^k\mathbf{s}_l^l = \mathbf{b}_{m,n}\}$. 따라서 가장 하위 차수의 립 $\mathbf{R}^1\mathbf{S}^1(u,v)$ 은 이중 선직면(doubly ruled surface) 또는 쌍곡포물면(hyperbolic paraboloid)임을 알 수 있다.

2.3.4 팬과 제어벡터

이중변환 식 (32), (33), (34)을 이용한 텐서곱 곡면의 팬 제어벡터를 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\mathbf{f}_i^k\mathbf{s}_j^l = \frac{(l-j)}{l}\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+2}\mathbf{s}_j^{l+1} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+2}\mathbf{s}_j^{l+1} + \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}\mathbf{s}_j^{l+1})\right) + \frac{j}{l}\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+2}\mathbf{s}_{j+1}^{l+1} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+2}\mathbf{s}_{j+1}^{l+1} + \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}\mathbf{s}_{j+1}^{l+1})\right) \quad (36)$$

$$\mathbf{r}_i^k\mathbf{g}_j^l = \frac{(k-i)}{k}\left(\mathbf{r}_i^{k+1}\mathbf{s}_{j+1}^{l+2} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+1}\mathbf{s}_j^{l+2} + \mathbf{r}_i^{k+1}\mathbf{s}_{j+2}^{l+2})\right) + \frac{i}{k}\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}\mathbf{s}_{j+1}^{l+2} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{i+1}^{k+1}\mathbf{s}_j^{l+2} + \mathbf{r}_{i+1}^{k+1}\mathbf{s}_{j+2}^{l+2})\right) \quad (37)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_i^k\mathbf{g}_j^l = &\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+2}\mathbf{s}_{j+1}^{l+2} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+2}\mathbf{s}_{j+1}^{l+2} + \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}\mathbf{s}_{j+1}^{l+2})\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+2}\mathbf{s}_j^{l+2} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+2}\mathbf{s}_j^{l+2} + \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}\mathbf{s}_j^{l+2})\right) \\ &-\frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_{i+1}^{k+2}\mathbf{s}_{j+2}^{l+2} - \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i^{k+2}\mathbf{s}_{j+2}^{l+2} + \mathbf{r}_{i+2}^{k+2}\mathbf{s}_{j+2}^{l+2})\right) \quad (38)\end{aligned}$$

단, 위의 식 (36)-(38)은 다음의 인덱스에 대해서 성립한다. $0 \le k \le n-2, 1 \le l \le m-1, 1 \le k \le n-1, 0 \le l \le m-2, 0 \le k \le m-2, 0 \le l \le n-2$, 식 (36)-(37)에서 각 제어벡터는 상위 차수의 인접한 여섯 개의 립 제어점으로 정의된다. (인접한 제어점은 크기 3×2 또는 2×3 격자에 놓여 있다.) 식 (38)에서 각 제어벡터는 상위 차수의 인접한 아홉 개의 립 제어점으로 정의된다. (인접한 제어점은 크기 3×3 격자에 놓여 있다.) 식 (36)-(38)의 각 타입의 팬 제어벡터들은 서로 다른 팬 벡터필드 $\mathbf{F}^k\mathbf{S}^l(u,v), \mathbf{R}^k\mathbf{G}^l(u,v), \mathbf{F}^k\mathbf{G}^l(u,v)$ 를 텐서곱 형식으로 정의한다. 다음 절에서의 표기상의 편의를 위해 위의 세 가지 팬 벡터를 크기 조절하여 조합한 복합 팬(composite fan)을 다음과 같이 표기한다:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}^k\mathbf{\Gamma}^l(u,v) \equiv\ & 2u(1-u)\mathbf{F}^k\mathbf{S}^{l+1}(u,v) \\ &+ 2v(1-v)\mathbf{R}^{k+1}\mathbf{G}^l(u,v) \\ &+ 4uv(1-u)(1-v)\mathbf{F}^k\mathbf{G}^l(u,v) \quad (39)\end{aligned}$$

2.3.5 베지어 곡면의 립과 팬

이 절에서는 베지어 곡면을 립과 팬으로 분해하는 방법을 설명한다. 특히, 2.3.3절과 2.3.4절에서 소개된 식 (35)-(39)을 이용하여 립과 팬이 표현됨을 보인다.

Theorem 2. (베지어 곡면의 립과 팬) $m, n \ge 2$ 일 때, 차수 (m,n) 의 베지어 곡면 $\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v)$ 은 립 $\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}^{n-1}(u,v)$ 과 세 개의 팬, $\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{G}^{n-2}(u,v)$, $\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}^{n+1}(u,v), \mathbf{F}^{m-2}\mathbf{G}^{n-2}(u,v)$ 으로 다음과 같이 분해된다:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v) &= \mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}^{n-1}(u,v) \\ &\quad + 2u(1-u)\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}^{n-1}(u,v) \\ &\quad + 2v(1-v)\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{G}^{n-2}(u,v) \\ &= \mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}^{n-1}(u,v) + \mathbf{\Phi}^{m-2}\mathbf{\Gamma}^{n-2}(u,v) \quad (40)\end{aligned}$$

증명: 식 (40)의 성립은 정리 1의 베지어 곡선에 대한 립과 팬 분해를 u와 v 방향으로 순차적으로 적용함으로써 보일 수 있다. 먼저 u를 어떤 값 u_0로 고정시키고 얻은 베지어 곡선 $\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u_0,v)$ 을 식 (24)-(25)를 이용하여 다음과 같이 분해할 수 있다:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u_0,v) &= \sum_{j=0}^{n}\mathbf{R}^m\mathbf{S}_j^n(u_0)\cdot B_j^n(v) \\ &= \sum_{j=0}^{n}(\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}_j^n(u_0) + 2u_0(1-u_0)\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}_j^n(u_0))\cdot B_j^n(v) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n}\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}_j^n(u_0)\cdot B_j^n(v)\right) \\ &\quad + \left(2u_0(1-u_0)\sum_{j=0}^{n}\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}_j^n(u_0)\cdot B_j^n(v)\right) \\ &= \mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}^n(u_0,v) + 2u_0(1-u_0)\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}^n(u_0,v) \quad (41)\end{aligned}$$

식 (41)은 u의 값에 상관없이 성립하므로 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v) = \mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}^n(u,v) + 2u(1-u)\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}^n(u,v) \quad (42)$$

이번에는 v의 값을 v_0로 고정하고 식 (42)를 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v_0) &= \mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}^n(u,v_0) + 2u(1-u)\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}^n(u,v_0) \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m-1}\mathbf{R}_i^{m-1}\mathbf{S}^n(v_0)\cdot B_i^{m-1}(u)\right) \\ &\quad + 2u(1-u)\left(\sum_{i=0}^{m-2}\mathbf{F}_i^{m-2}\mathbf{S}^n(v_0)\cdot B_i^{m-2}(u)\right) \quad (43)\end{aligned}$$

식 (43)의 $\mathbf{F}_i^{m-2}\mathbf{S}^n(v_0)$ 는 제어망 $\{\mathbf{f}_i^{m-2}\mathbf{s}_j^n\}$ 의 i번

째 열로 정의되는 벡터이다. 식 (43)의 우항의 첫 번째 괄호 안의 식은 식 (28)을 이용하여 다음과 같이 분해할 수 있다:

$$\sum_{i=0}^{m-1}\mathbf{R}_i^{m-1}\mathbf{S}^n(v_0)\cdot B_i^{m-1}(u)$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1}(\mathbf{R}_i^{m-1}\mathbf{S}^{n-1}(v_0)+2v_0(1-v_0)\mathbf{R}_i^{m-1}\mathbf{G}^{n-2}(v_0))B_i^{m-1}(u)$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{m-1}\mathbf{R}_i^{m-1}\mathbf{S}^{n-1}(v_0)\cdot B_i^{m-1}(u)\right)$$
$$+2v_0(1-v_0)\left(\sum_{i=0}^{m-1}\mathbf{R}_i^{m-1}\mathbf{G}^{n-2}(v_0)\cdot B_i^{m-1}(u)\right)$$
$$=\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{S}^{n-1}(u,v_0)+2v_0(1-v_0)\mathbf{R}^{m-1}\mathbf{G}^{n-2}(u,v_0) \quad (44)$$

식 (43)의 우항의 두 번째 괄호 안의 식을 다음과 같이 분해할 수 있다:

$$\sum_{i=0}^{m-2}\mathbf{F}_i^{m-2}\mathbf{S}^n(v_0)\cdot B_i^{m-2}(u)$$
$$=\sum_{i=0}^{m-2}(\mathbf{F}_i^{m-2}\mathbf{S}^{n-1}(v_0)+2v_0(1-v_0)\mathbf{F}_i^{m-2}\mathbf{G}^{n-2}(v_0))B_i^{m-1}(u)$$
$$=\left(\sum_{i=0}^{m-2}\mathbf{F}_i^{m-2}\mathbf{S}^{n-1}(v_0)\cdot B_i^{m-1}(u)\right)$$
$$+2v_0(1-v_0)\left(\sum_{i=0}^{m-2}\mathbf{F}_i^{m-2}\mathbf{G}^{n-2}(v_0)\cdot B_i^{m-1}(u)\right)$$
$$=\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{S}^{n-1}(u,v_0)+2v_0(1-v_0)\mathbf{F}^{m-2}\mathbf{G}^{n-2}(u,v_0) \quad (45)$$

식 (44)-(45)을 식 (43)에 대입하고 를 로 대체하여 식 (40)을 얻을 수 있다. **Q.E.D.**

정리 2로부터 다음의 따름정리를 쉽게 유도할 수 있다(자세한 과정은 생략하기로 한다.).

Corollary 2. 차수 $m,n\geq 2$ 의 베지어 곡면 $\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v)$ 을 차수 $(m-k,\ n-k)$의 랩 한 개와 일련의 k 개의 복합 팬으로 다음과 같이 분해할 수 있다:

$$\mathbf{R}^m\mathbf{S}^n(u,v)=\mathbf{R}^{m-k}\mathbf{S}^{n-k}(u,v)+\sum_{i=1}^{k}\Phi^{m-1-k}\Gamma^{n-1-k}(u,v) \quad (46)$$

단, $1\leq k\leq \mathrm{MIN}(m,n)-1$

3. 디자인 예제

이 절에서는 본 논문에서 제시된 랩과 팬 이론을 바탕으로 디자인된 몇 가지 예제들을 보여준다(자세한 설명은 각 그림 하단에 설명되어 있다.). Fig. 3과

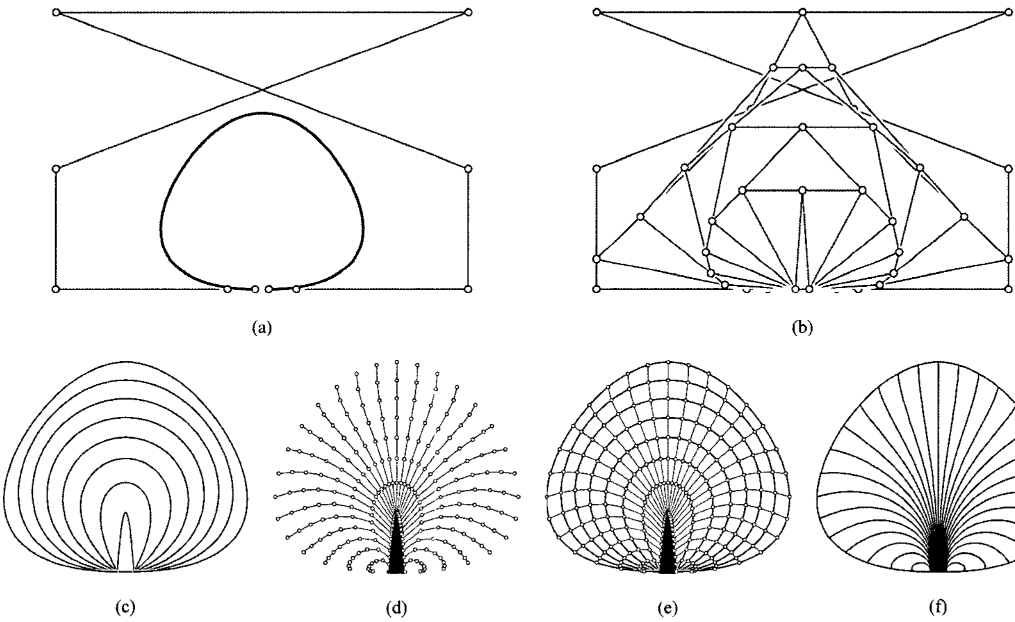


Fig. 3. 부채모양의 9차 베지어 곡선: (a) 주어진 곡선 $\mathbf{C}^9(t)\equiv\mathbf{R}^9(t)$과 직선으로 연결된 제어점들; (b) 일련의 랩들의 제어점. (차수가 낮을수록 붉은 색); (c) (b)의 랩 제어점으로 정의되는 랩들; (d) 일련의 팬들에서 샘플링된 팬 선분들; (e) 그림 (c)와 (d)를 겹쳐놓은 모습; (f) (d)의 팬 라인을 제어점으로 하는 팬 곡선들.

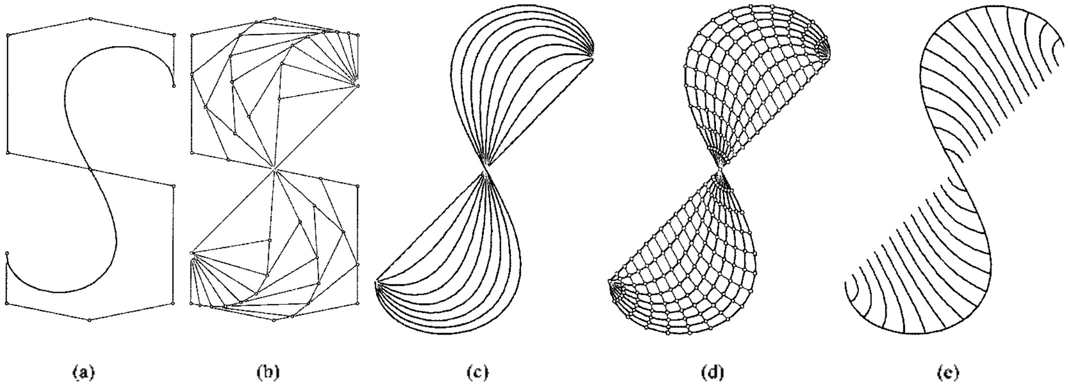


Fig. 4. S자 모양의 베지어 곡선. $\mathbf{C}^{10}(t) = \mathbf{R}^{10}(t)$: (a) 주어진 곡선과 제어점; (b) 립 제어점들; (c) 립들 (두개의 최하위 립은 곡선의 대칭성으로 인해 겹쳐 보인다. 따라서 (c)에서 10개가 아닌 9개의 립이 보인다.); (d) 립과 팬라인들 (e) 팬곡선들

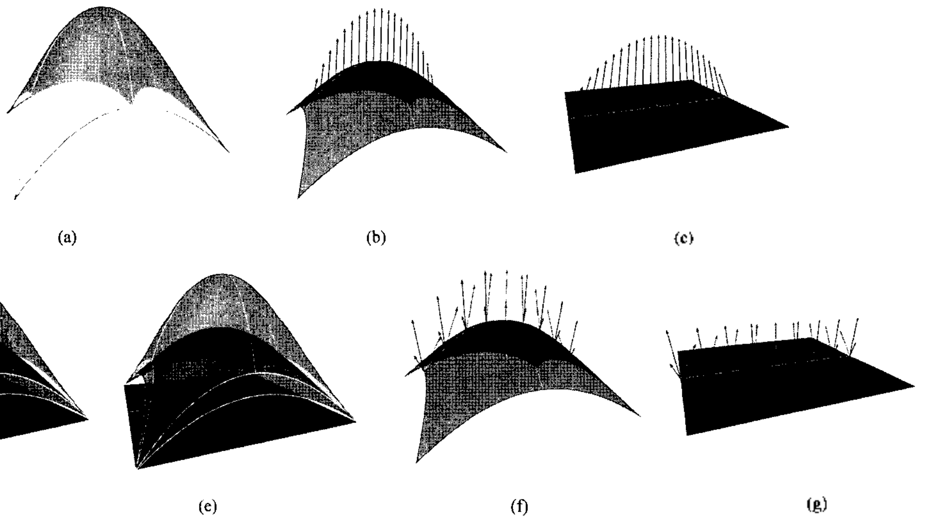


Fig. 5. 베지어 곡선 $\mathbf{x}^{3,3}(u, v) = \mathbf{R}^3\mathbf{S}^3(u, v)$: (a) 주어진 곡면. 흰색 곡선은 $u = 0.5$와 $v = 0.5$에서의 ; (b) 립 $\mathbf{R}^2\mathbf{S}^2(u, v)$과 복합 팬 $\mathbf{\Phi}^1\mathbf{\Gamma}^1(u, 0.5)$의 샘플 벡터들; (c) 립 $\mathbf{R}^1\mathbf{S}^1(u, v)$과 복합팬 $\mathbf{\Phi}^0\mathbf{\Gamma}^0(u, 0.5)$의 샘플 벡터들; (d) 립과 팬을 포함한 그림 (a), (b), (c)의 겹침; (e) 립과 팬을 포함하지 않은 그림 (a), (b), (c)의 겹침; (f) 립 $\mathbf{R}^2\mathbf{S}^2(u, v)$과 세 가지 팬들 $\mathbf{F}^1\mathbf{S}^2(u, 0.5)$, $\mathbf{R}^2\mathbf{G}^1(u, 0.5)$, $\mathbf{F}^1\mathbf{G}^1(u, 0.5)$. (각 적색, 녹색, 청색); (g) 립 $\mathbf{R}^1\mathbf{S}^1(u, 0.5)$과 세가지 팬들 $\mathbf{F}^1\mathbf{S}^1(u, 0.5)$, $\mathbf{R}^1\mathbf{G}^0(u, 0.5)$, $\mathbf{F}^0\mathbf{G}^0(u, 0.5)$.

4는 각각 9차와 10차 베지어 곡선에 대해서 전형적인 립과 팬의 패턴을 보여준다. Fig. 5는 차수 (3,3)의 간단한 베지어 곡면에 대한 립과 팬의 예를 보여준다. (더 많은 디자인 예제들을 온라인상에서 볼 수 있다.[6]).

4. 결 어

본 논문에서는 베지어 곡선과 곡면의 립과 팬에 대한 기하학적인 개념을 제시하였다. 즉, 차수 n의 베지어 곡선을 차수 $(n-1)$의 립과 차수 $(n-2)$의 팬으로 분해할 수 있고, 차수 (m, n)의 베지어 곡면을 차수 $(m-1, n-1)$의 립과 차수 $(m-1, n-2)$, $(m-2, n-1)$, $(m-2, n-2)$의 세 개의 팬으로 분해할 수 있음을 보였다. 또한, 주어진 베지어 곡선과 곡면의 제어점을 립과 팬의 제어점과 제어벡터로 변환하는 방법을 설명하였다. 제시된 디자인 예에 따르면 생성된 립과 팬은 주어진 곡선과 곡면과 유사한 패턴을 보임을 알 수 있다. 따라서, 제시된 디자인 예제와 유사한 효과가 필요한 기하 디자인 응용에서 립과 팬 분해를 이용할 수 있다.

립과 팬은 주어진 베지어 곡선이나 곡면의 전체(global) 제어점을 이용하여 정의되기 때문에, NURBS

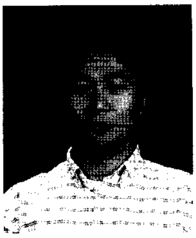
와 같은 조각적(piecewise) 곡선이나 곡면에 직접 적용하는 데는 한계가 있다. 예를 들어, 한 조각의 곡선이나 곡면 단위로 본 논문에서 제시한 립과 팬 분해를 적용한다면 불연속적인 립과 팬이 생성되는데, 이런 결과는 바람직하지 않은 결과일 수 있다. 따라서, B-spline이나 NURBS 등으로 립과 팬 이론을 확장하는 것이 추후 연구 주제가 될 것이다.

감사의 글

본 연구는 정보통신부가 지원하는 2004년 "URC시범 사업을 위한 인프라 시스템 개발" 및 2004년 "협업적 제품거래 기술개발" 과제를 통해 일부 지원되었습니다.

참고문헌

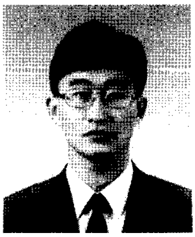
1. Farin, G., Curves and Surfaces for CAGD–A Practical Guide, 5th Ed., Morgan Kaufmann, San Francisco, CA, 2002.
2. Farin, G. and Hansford, D., The Essentials of CAGD, A K Peters, Natick, MA, 2000.
3. Farouki, R. and Rajan, V., "Algorithms for Polynomials in Bernstein Form", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, No. 1, pp. 1-26, 1988.
4. Hoschek, J. and Lasser, D., Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, A K Peters, Natick, MA, 1993.
5. Macromedia Flash MX, http://www.macromedia.com/devnet/devices/, Macromedia, Inc.
6. Design Examples of Ribs and Fans, http://joohaeng.etri.re.kr/GeoLix/BezierRibFan.



이 주 행

1994년 포항공과대학교 전자계산학과 학사
1996년 포항공과대학교 전자계산학과 석사
1999년 포항공과대학교 전자계산학과 박사
1999년~현재 한국전자통신연구원 디지털콘텐츠연구단 선임연구원

관심분야: Geometric modeling and processing algorithms for computer graphics, CAD, and robotics; Biology-inspired computing for aesthetic, scientific and engineering applications



박 형 준

1991년 포항공과대학교 산업공학과 학사
1993년 포항공과대학교 산업공학과 석사
1996년 포항공과대학교 산업공학과 박사
1996년~2001년 삼성전자 중앙연구소 책임연구원
2001년~현재 조선대학교 산업공학과 조교수

관심분야: Geometric Modeling and Processing, Virtual Prototyping of Engineered Products, 3D Shape Construction and Understanding, Reverse Engineering, CAD/CAM/CG Applications