

파워흐름해석을 위한 분포가진 및 연결부 가진의 입력파워추정 연구

김동진*, 홍석윤†*

서울대학교 조선해양공학과*

Estimation of Distributed and Joint-excited Input Power for Power Flow Analysis

Dong-Jin Kim* and Suk-Yoon Hong†*

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering, Seoul National University*

Abstract

The estimations of distributed and joint-excited input power for Power Flow Analysis are accomplished in this paper. Using Fourier transform, the displacements of infinite structures are derived, and the input power of distributed excitation can be estimated. The obtained results compare the real input power with the estimation of input power. When the exciting force acts on the joint of coupled structures, it is estimating the power that is transferred to each structure. Applying this input power, the results of energy density and intensity of Power Flow Analysis can be compared with the classical solutions.

※Keywords: Power flow analysis(파워흐름해석법), Fourier transform(푸리에변환), Power transmission analysis(파동전달해석), Input power(입력파워), Impedance(임피던스)

1. 서론

일반적으로 구조물의 진동문제를 해석하는 방법으로는 저주파영역에서 유한요소법(FEM)과 경계요소법(BEM)이 사용되고 고주파영역에서는 통계적에너지해석법(SEA)이 사용된다. 그러나 유한요소법과 경계요소법은 중고주파영역에서의 해석에 많은 시간과 비용이 필요한 단점을 가지고 있으며, 통계적에너지해석법은 복합구조물의 하부구조물당

하나의 평균적인 에너지값만을 제시하기 때문에 하부구조물내에서 에너지의 공간적 변화를 예측할 수 없고 이로 인해 부분적인 감쇠처리나 파워입력과 같은 국부적인 효과를 고려하기 어렵다. 복합구조물의 진동 현상은 소음발생의 주요 원인이 되기 때문에 이에 대한 해석이 매우 중요하다. 그러나 위와 같은 문제로 모든 주파수 영역에서의 문제를 하나의 해석기법으로 다루기에는 근본적인 어려움이 있다. 이러한 기존의 유한요소법과 경계요소법 및 통계적에너지해석법이 중고주파영역에서 가지는 한계를 보완하기 위해 파워흐름해석법

접수일: 2006년 5월 31일, 승인일: 2006년 8월 22일

†교신저자: syh@snu.ac.kr, 02-880-8757

(Power Flow Analysis, PFA)이 제안되었다.

파워흐름해석법은 정상상태에서 열전도방정식과 유사한 2 차편미분방정식 형태의 에너지지배방정식을 기반으로 하고, 주파수영역의 제한이 없는 장점을 가지고 있다. Park et al.(2003)은 직교이방성 평판의 파워흐름해석 요소를 개발하였고, Seo et al.(2003)은 보강판의 요소를 개발하였다. 또한 Hong et al.(2004)은 파워흐름해석법을 기반으로 유한요소기법을 적용하여 진동해석 프로그램인 PFADS 를 개발하였다.

파워흐름해석법은 기본적으로 파워의 형태로 입력을 받는다. 따라서 가진력의 형태로 주어진 일반적인 진동문제에 파워흐름해석법을 적용하기 위해서는 구조물의 시스템해석을 통해 구조물의 입력되는 파워를 구해야 한다. 그러나 복합구조물의 정확한 시스템해석이 어렵기 때문에 무한구조물의 시스템해석을 통해 입력파워를 계산한다. 기존에 파워흐름해석법은 점가진에 의한 입력파워를 사용하여 진동문제를 해석하였다. 따라서 다양한 하중 조건에서 파워흐름해석법을 사용하기 위해 본 연구가 필요하게 되었다.

따라서 본 논문에서는 분포가진력이 작용하는 문제에 대한 입력파워를 무한구조물로 치환하여 추정하고 그 결과를 단순구조물의 실제 입력파워와 비교하였다. 또한 연성된 구조물의 연결부 가진에 대하여 입력파워를 계산하여 파워흐름해석법에 적용하였다.

2. 파워흐름해석법

보구조물의 횡방향 진동에 대한 굽힘파(Flexural Wave)의 에너지지배방정식은 Wohlever and Bernhard(1992)에 의해 유도 되었다. 보구조물에 파워가 입력되는 경우의 에너지 지배 방정식은

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \frac{d^2 e}{dx^2} + \eta\omega e = \pi_{in}(x) \quad (2.1)$$

이다. 여기서 e 는 시간평균한 에너지밀도의 원거리영역성분이고, c_g 는 굽힘파의 군속도, η 는 강

쇠계수, $\pi_{in}(x)$ 는 단위길이당 입력되는 파워이다. 파장이 평면파의 중첩으로 추정되는 평판구조물의 횡방향 진동에 대한 에너지지배방정식은

$$-\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 e + \eta\omega e = \pi_{in}(x, y) \quad (2.2)$$

이다. 여기서 $\nabla^2 = \partial/\partial x^2 + \partial/\partial y^2$ 이고, $\pi_{in}(x, y)$ 는 단위면적당 입력되는 파워이다.

기존의 파워흐름해석은 점가진에 의한 무한구조물의 임피던스를 사용하여 입력파워를 계산하였다. 평판구조물의 입력파워는

$$\pi_{in}(x, y) = \frac{1}{2} |F|^2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{Z} \right\} \quad (2.3)$$

이다. 여기서 Z 는 가진력이 작용하는 위치에서의 평판의 굽힘파에 대한 임피던스이고, 무한평판의 임피던스는

$$\operatorname{Re}\{Z\} = 8\sqrt{D\rho h} \quad (2.4)$$

이다. D , ρ , h 는 평판의 굽힘강성과 밀도 그리고 두께를 각각 의미한다. 구조물의 실제 임피던스가 아닌 동일한 재료의 무한구조물의 임피던스를 사용하여 입력파워를 추정할 수 있는 근거는 주파수가 증가할수록 실제 임피던스가 무한구조물의 임피던스에 수렴하기 때문이다.

3. 분포가진에 대한 입력파워추정

3.1 보구조물의 분포가진

보구조물의 횡방향 진동에 대한 굽힘파의 운동방정식은

$$E_c I \frac{d^4 w}{dx^4} + \rho S \frac{d^2 w}{dt^2} = F(x) e^{j\omega t} \quad (3.1)$$

이다. 여기서 E_c , I , S 는 각각 보구조물의 복소탄성계수와 단면모멘트, 단면적이고, $F(x)$ 는 보

구조물에 작용하는 단위길이당 가진력이다. 무한 구조물로 치환하기 위해 보구조물의 구간을 $(-\infty < x < \infty)$ 로 확장하여 푸리에변환(Fourier Transform)을 수행하면 보구조물의 굽힘파에 대한 파수(wave number)의 함수인

$$W(k_f) = \frac{1}{E_c I k_f^4 - \omega^2 \rho S} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-jk_f x} dx \quad (3.2)$$

이다. 여기서 파수(k_f)의 범위는 무한구조물에서 발생하는 모든 모드형상을 중첩해야 하므로 구간은 $(-\infty < k_f < \infty)$ 이다. (3.2)식으로부터 무한 보구조물의 횡방향 변위의 일반해를 얻기 위해 푸리에역변환(Inverse Fourier Transform)을 수행한다. 따라서 무한 보구조물의 횡방향 변위의 일반해와 임의의 분포가진력에 의해 구조물에 입력되는 파워는 각각

$$w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk_f x} W(k_f) dk_f \quad (3.3)$$

$$\pi_{in}(x) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ F(x) \cdot [j\omega w(x)]^* \right\} \quad (3.4)$$

이다. 여기서 $[\]^*$ 는 공액복소수이다.

3.2 평판구조물의 분포가진

평판구조물의 횡방향 진동에 대한 굽힘파의 운동방정식은

$$D_c \nabla^4 w + \rho h \frac{d^2 w}{dt^2} = F(x, y) e^{j\omega t} \quad (3.5)$$

이다. 여기서 D_c 는 평판의 복소굽힘강성이고, $F(x, y)$ 는 평판구조물에 작용하는 단위면적당의 가진력이다. 보구조물에서와 마찬가지로 평판구조물의 구간을 $(-\infty < x < \infty)$ 와 $(-\infty < y < \infty)$ 로 확장하여 무한구조물로 치환된 평판구조물에 대하여 푸리에변환을 수행하여 각 방향 굽힘파의 파수에 관한 함수로 표현하면

$$W(k_{fx}, k_{fy}) = \frac{1}{D_c (k_{fx}^2 + k_{fy}^2)^2 - \omega^2 \rho h} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) e^{-jk_{fx} x} e^{-jk_{fy} y} dx dy \quad (3.6)$$

이다. 마찬가지로 (3.6)식을 푸리에역변환하여 무한 평판구조물의 횡방향 변위의 일반해를 구할 수 있고 임의의 분포가진력에 의해 입력되는 파워를 구할 수 있다. 변위의 일반해와 입력파워는 각각

$$w(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk_{fx} x} e^{jk_{fy} y} W(k_{fx}, k_{fy}) dk_{fx} dk_{fy} \quad (3.7)$$

$$\pi_{in}(x, y) = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ F(x, y) \cdot [j\omega w(x, y)]^* \right\} \quad (3.8)$$

이다. 위와 같이 무한구조물의 변위해를 해석적으로 구하고 입력파워의 정의를 이용하면 무한구조물의 입력파워가 수학적으로 유도된다. 이렇게 무한구조물로 치환하여 추정된 해석적인 입력파워를 이용하여 분포가진에 대한 파워흐름해석을 수행할 수 있다.

4. 연결부 가진에 대한 입력파워추정

연성구조물의 연결부 가진에 대한 입력파워추정 연구의 기본개념은 가진력에 의해 연결부에 입력되는 전체파워가 연성된 각각의 구조물로 전달된다는 것이다. 따라서 연성구조물을 반무한구조물의 연성으로 치환하여 해석적인 연구를 통해 각각의 구조물로 전달되는 파워를 계산하게 된다. 또한 각각의 구조물로 전달된 파워를 이용하여 각 구조물에 대하여 독립적으로 파워흐름해석을 수행한다.

4.1 보구조물의 연결부 가진

동일한 축선상에서 연성된 두 개의 보구조물의 연결부에 가진력이 작용하는 경우에 입력파워를 추정하기 위해 동일한 재질을 갖는 두 개의 반무한보의 연성으로 치환하면 각각의 보에 대한 굽힘

파 변위의 일반해는

$$w_1 = A_1 e^{-jk_1 x_1} + B_1 e^{-k_1 x_1} \quad (4.1)$$

$$w_2 = A_2 e^{-jk_2 x_2} + B_2 e^{-k_2 x_2} \quad (4.2)$$

이다. 일반해의 미지수를 구하기 위해 연결부에서의 경계조건 즉, 변위와 기울기의 연속성과 힘과 모멘트의 평형조건을 사용하여 변위해를 구한다. 입력파워를 구하기 위해 각각의 보구조물에 작용하는 외력을 구해야 하는데 힘의 평형조건으로부터 각 보구조물 연결부에서의 내력의 합이 외력과 같으므로 각 보구조물로 전달되는 파워는

$$\pi_{in} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ V \cdot (j\omega w_0)^* \} \quad (4.3)$$

이다. 여기서 $V = -EI d^3 w / dx^3$ 이고, w_0 는 연결부에서의 횡방향 변위값이다. (4.3)식으로부터 얻어진 입력파워의 값을 사용하여 보구조물의 연결부가진에 대한 파워흐름해석을 수행할 수 있다.

4.2 n 개의 연성된 보구조물의 연결부 가진

n 개의 보가 연성된 경우의 연결부 가진 문제를 해결하기 위해 보가 연성된 연결부를 전역좌표계(Global Coordinate)의 원점으로 하여 임의의 좌표계를 설정하고 Fig. 1 과 같이 각 보구조물에 대한 지역좌표계(Local Coordinate)를 설정하여 지역좌표계에서 전역좌표계로의 변환행렬(Transform Matrix)을 구한다. i 번째 보구조물에 대한 변위의

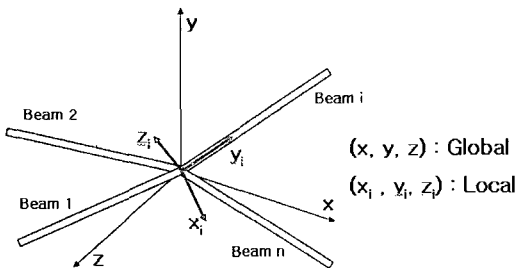


Fig. 1 Coupled n beams of global coordinate

일반해는

$$w_{xi} = A_{xi} e^{-jk_{fi} y_i} + B_{xi} e^{-k_{fi} y_i} \quad (4.4)$$

$$w_{zi} = A_{zi} e^{-jk_{fi} y_i} + B_{zi} e^{-k_{fi} y_i} \quad (4.5)$$

$$u_i = P_{li} e^{-jk_{li} y_i} \quad (4.6)$$

$$\theta_i = P_{ti} e^{-jk_{li} y_i} \quad (4.7)$$

이다. 힘의 평형조건에서 i 번째 보구조물에서의 내력을 전역좌표계로 변환하면

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = [T]_i \begin{Bmatrix} -EI_z d^3 w_{xi} / dy^3 \\ ESdu_i / dy \\ -EI_x d^3 w_{zi} / dy^3 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

이다. 여기서 $[T]_i$ 는 변환행렬이다. 따라서 연결부에서의 힘의 평형조건은

$$\begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n [T]_i \begin{Bmatrix} -EI_z d^3 w_{xi} / dy^3 \\ ESdu_i / dy \\ -EI_x d^3 w_{zi} / dy^3 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

이고, 가진력에 의한 입력파워를 계산하면

$$\pi_{in} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \{F_{ex}\}^T \{j\omega U\}^* \} \quad (4.10)$$

이다. 여기서

$$\{F_{ex}\}^T \{U\} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} -EI_z d^3 w_{xi} / dy^3 \\ ESdu_i / dy \\ -EI_x d^3 w_{zi} / dy^3 \end{Bmatrix}^T [T]^T [T] \begin{Bmatrix} w_{xi} \\ u_i \\ w_{zi} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

이므로 연결부에서 각 보구조물에 내력에 상응하

는 입력파워가 전달되는 것을 확인할 수 있다.

4.3 연성된 평판의 연결부 가진

연성된 평판의 연결부에 가진력이 작용하는 경우에 대하여 각 평판으로 전달되는 입력파워를 구하기 위해 각 평판을 반무한 평판의 연성으로 치환한다. EWALD EICHLER(1964)의 반무한 평판 이론에 의하면 반무한 평판의 변위해는

$$w_i(x_i, y) = \int_{-\infty}^{\infty} W_i(x_i, k_y) \exp(-jk_y y) dk_y \tag{4.12}$$

이다. (4.12)식에서 반무한 평판의 파동은 한방향으로 진행되는 성분만 발생하기 때문에

$$W_i(x_i, k_y) = A_i \exp(-a_i x_i) + B_i \exp(-b_i x_i) \tag{4.13}$$

이다. 여기서 $a_i^2 = k_y^2 + k_{\beta i}^2$, $b_i^2 = k_y^2 - k_{\beta i}^2$ 이고, $k_{\beta i}$ 는 각 평판의 굽힘파에 대한 파수이다. (4.13) 식을 (4.12)식에 대입하여 연결부에서의 변위와 기울기, 그리고 힘과 모멘트의 경계조건을 적용하면.

$$\begin{aligned} w_1(0,0) &= w_2(0,0) \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(0,0) &= \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(0,0) \\ -D_1 \left[\frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1^3}(0,0) + (2-\nu_1) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x_1 \partial y^2}(0,0) \right] + F_{ex} \\ &= -D_2 \left[\frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2^3}(0,0) + (2-\nu_2) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x_2 \partial y^2}(0,0) \right] \\ -D_1 \left[\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2}(0,0) + \nu_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}(0,0) \right] \\ &= -D_2 \left[\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2}(0,0) + \nu_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}(0,0) \right] \end{aligned} \tag{4.14}$$

이므로 (4.13)식의 미지수를 구할 수 있다. 따라서 연결부에서 각 평판으로 전달되는 입력파워는

$$\pi_{in} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[V_i \cdot \{ j \omega w_i \}^* \right] \tag{4.15}$$

이고, 여기서 V_i 는 영역 i 에서의 kirchchov 전단력을 의미한다.

4.4 연결부 가진의 파워흐름해석

연성된 구조물의 연결부에 가진력이 작용하는 경우에는 각 영역으로 전달되는 입력파워를 계산한다. 이렇게 계산된 입력파워는 구조물의 연성효과를 포함하게 된다. 따라서 파워흐름해석을 수행할 경우 각 영역으로 전달되는 입력파워를 이용하여 각 영역에 대하여 독립적으로 해석한다.

5. 수치적용

길이가 1m 이고 단면적이 0.01X0.01m²인 알루미늄(E=7.1X10¹⁰, ρ =2700) 보구조물의 (0.3~0.7) 구간에 등분포가진력(1N/m)이 작용하는 경우에 대해 단순지지를 가정하여 해석적으로 구한 입력파워와 무한구조물로 치환하여 추정한 입력파워를 주파수에 따라 Fig. 2 에 도시하였다. 여기서 실선은 단순지지를 가정하여 해석적으로 구한 유한 입력파워이고, 점선은 추정된 무한 입력파워이다. 또한 Fig. 3 과 Fig. 4 는 동일한 재질의 두께가 0.01m 이고 1X1m²의 크기를 갖는 평판의 각 방

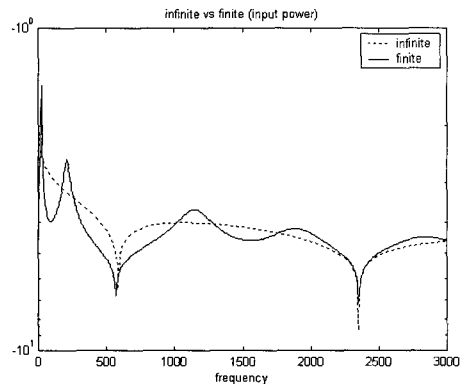


Fig. 2 Distributed Input power of beam at x=0.5

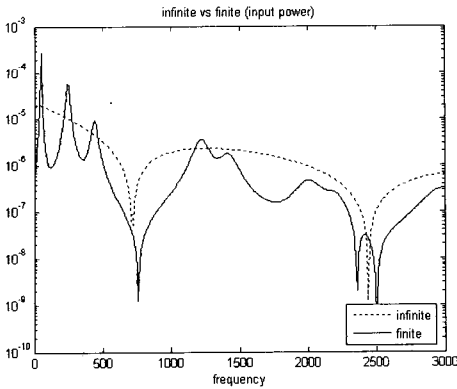


Fig. 3 Distributed Input power of plate at $x=0.5$ and $y=0.5$

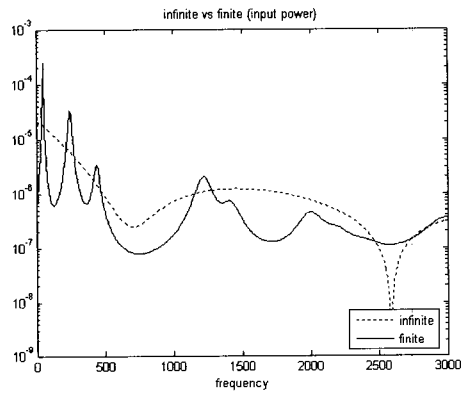


Fig. 4 Distributed Input power of plate at $x=0.4$ and $y=0.4$

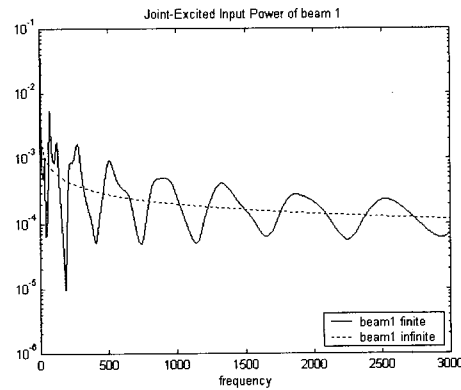


Fig. 5 Joint-excited input power of coupled beam (Beam 1)

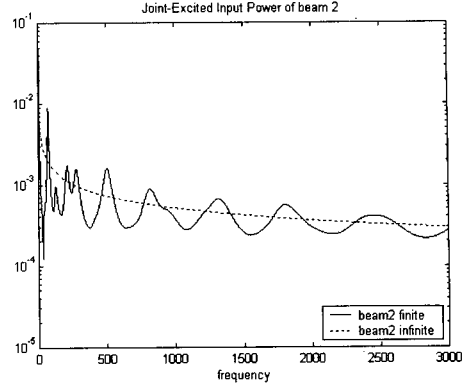


Fig. 6 Joint-excited input power of coupled beam (Beam 2)

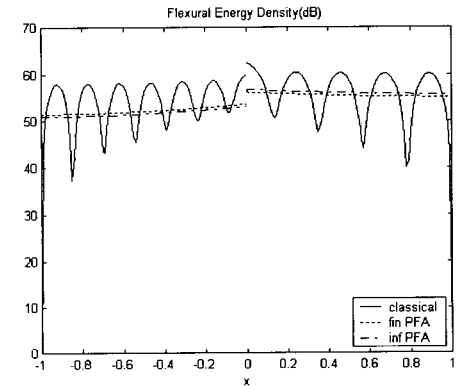


Fig. 7 PFA and Classical result of joint-excited beam (Energy Density)

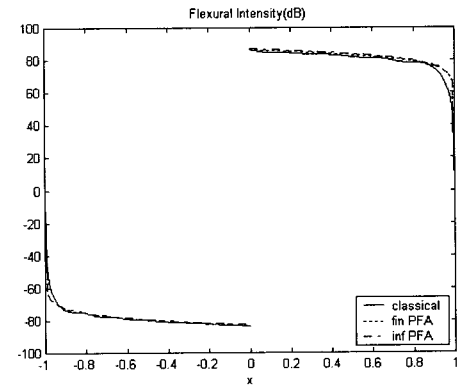


Fig. 8 PFA and Classical result of joint-excited beam (Intensity)

항 (0.3~0.7)구간에 등분포가진(1N/m²)이 작용하는 경우에 대하여 (0.5,0.5)지점과 (0.4,0.4)지점에서 유·무한 입력파워를 비교한 것이다. 해석결

과를 보면 주파수가 증가할수록 유·무한 입력파워의 값이 잘 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 길이가 1m 이고 단면적이 0.01X0.01m² 인 알루미늄

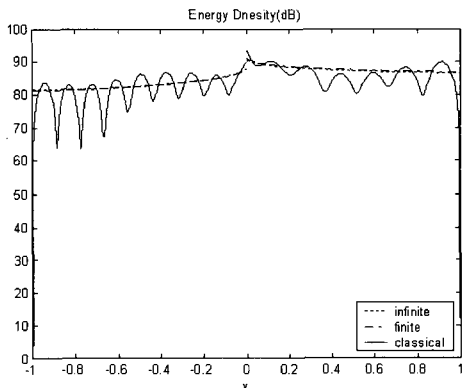


Fig. 9 PFA and Classical result of joint-excited plate (Energy Density)

미늄 보와 단면적이 0.02X0.02m² 인 알루미늄 보가 동일축선상에서 연성되어 있고 연결부에 횡방향 가진력이 작용하는 경우의 각 부구조물에 전달되는 유·무한 입력파위를 비교한 결과를 Fig. 5와 Fig. 6에 나타내었다. Fig. 7과 Fig. 8은 유·무한 입력파위를 이용하여 파워흐름해석을 수행하여 에너지밀도와 인텐시티를 고전해와 비교한 결과이다. Fig. 5와 Fig. 6의 결과를 보면 주파수가 증가할수록 유·무한 입력파위가 수렴하는 것을 알 수 있고 단면적이 넓은 두번째 보에 더 큰 파워가 입력되는 것을 확인할 수 있다. 또한 Fig. 7의 결과에서 보면 유·무한 입력파위를 이용한 에너지밀도의 결과가 파워흐름해석의 특징인 고전해의 공간적인 평균값을 잘 반영하고 있음을 확인할 수 있다.

마지막으로 Fig. 9의 결과는 두께가 각각 0.005m와 0.01m인 두 개의 알루미늄 평판이 연성되어 연결부에 가진력이 작용하는 경우에 대하여 각 평판으로 전달되는 입력파위를 추정하여 1000Hz에서 수행한 파워흐름해석 에너지밀도의 결과이다.

6. 결론

기존의 파워흐름해석법은 점가진에 의한 무한 임피던스로 입력파위를 추정하여 파워흐름해석을 수행하였다. 본 연구를 통해 파워흐름해석을 좀더 다양한 가진조건 영역까지 확장할 수 있었다. 특

히 분포가진에 의한 입력파위를 추정함으로써 실제의 가진조건에 근접할 수 있는 계기를 마련하였다. 또한 기존의 연결부 가진의 문제는 각 구조물로 입력되는 파워를 임의로 지정하였으나 본 연구를 통해 좀더 정확한 입력파위의 값을 구할 수 있었고 연결부 가진에 대한 파워흐름해석의 기법을 개발하였다.

참 고 문 헌

- EWALD EICHLER, 1964, "Plate-Edge Admitances," JASA, Vol. 36, No. 2, pp. 344-348.
- Hong, S.Y., Seo, S.H., Park, Y.H. and Lee, H.W., 2004, "Development of Ship Vibration Analysis Software PFADS-R3 and Its Applications," SOTECH, Vol. 8, No. 4, pp. 26-33.
- Park, D.H., Hong, S.Y. and Kil, H.G., 2003, "Power Flow Model of Flexural Waves in Finite Orthotropic Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 264, pp. 203-224.
- Seo, S.H., Hong, S.Y. and Kil, H.G., 2003, "Power Flow Analysis of Reinforced Beam-Plate Coupled Structure," Journal of Sound and Vibration, Vol. 259(5), pp. 1109-1129.
- WOHLEVER, J.C. and BERNHARD, R.J., 1992, "Mech-Anical Energy Flow Models of Rods and Beams", Journal of Sound and Vibration Vol. 153(1), pp. 1-19.



< 김 동 진 >



< 홍 석 윤 >