

# 포물선 지배 방정식과 비국소적 경계조건의 근사 차수 불일치에 의한 해석적 오차

## Analytic Error Caused by the Inconsistency of the Approximation Order between the Non Local Boundary Condition and the Parabolic Governing Equation

이 근 화\*, 성 우 제\*  
(Keunhwa Lee\*, Woojae Seong\*)

\*서울대학교 공과대학 조선해양공학과  
(접수일자: 2006년 5월 19일; 채택일자: 2006년 6월 15일)

본 논문에서는 수치 영역의 포물선 지배 방정식의 근사 차수와 수치 영역 경계의 비국소적 경계 조건의 근사 차수가 서로 다를 때 음파 해에 미치는 영향을 해석적으로 보였다. 우선 평면파 분석법을 이용해 비국소적 경계 조건을 반 무한 매질 영역으로 변환했다. 그리고 실제 수치 영역과 반 무한 매질 영역의 경계에서 해석적 반사 오차를 유도했다. 지배 방정식과 비국소적 경계 조건의 해석적 오차가 간단한 대수 식으로 표현 가능한 경우에 대해서는 대수적인 오차 식을 유도하고 그 경향을 고찰했다. 지배 방정식이 일반적인 고차 포물선 방정식일 때는 대수적인 오차 식은 보다 복잡하게 표현되며 수치적 방법을 이용해 그 특성을 고찰했다. 최종적으로 지배 방정식의 차수에 따른 비국소적 경계 조건의 정밀도를 유도하고 해석적 반사 오차의 전반적인 특성에 대해 논의했다. 본 연구의 핵심 공헌은 포물선 방정식과 비국소적 경계 조건의 근사 차수가 다를 때 해석적 오차 추정 방법과 사용한계를 제시했다는 데 있다.

**핵심용어:** 고차 포물선 방정식, Padé 근사법, 비국소적 경계 조건, 정규 포물선 방정식.

**투고분야:** 수중 음향 분야 (5.1)

This paper shows the analytic error caused by the inconsistency of the approximation order between the non local boundary condition (NLBC) and the parabolic governing equation. To obtain the analytic error, we first transform the NLBC to the half space domain using plane wave analysis. Then, the analytic error is derived on the boundary between the true numerical domain and the half space domain equivalent to the NLBC. The derived analytic error is physically expressed as the artificial reflection. We examine the characteristic of the analytic error for the grazing angle, the approximation order of the PE or the NLBC. Our main contribution is to present the analytic method of error estimation and the application limit for the high order parabolic equation and the NLBC.

**Key words:** High order parabolic equation, Padé approximation, Non local boundary condition, Standard parabolic equation.

**ASK subject classification:** Underwater Acoustic (5.1)

### I. 서론

해양은 물리적으로 무한 영역이나 수치 해석을 하는 경우 유한 영역으로 취급된다. 수치 영역의 유한성으로 인한 오차를 없애기 위해 일반적으로 유한 영역의 경계

에 적절한 방사 경계 조건 (Radiation boundary condition)을 추가한다 [1]. 파수 적분법이나 정상 모드 법에 기반한 일부 모델의 경우 깊이 방향을 해석 해에 근거해 풀기 때문에 인위적으로 방사 조건을 넣을 필요가 없는 경우도 있다. 그러나 깊이 방향을 유한 차분 법이나 유한 요소법을 이용해 계산하는 포물선 방정식법에는 방사 조건의 부여가 필수적이다 [2].

포물선 방정식법에서 가장 많이 사용하는 깊이 방향의

책임저자: 이 근 화 (nasalkh@uwal.snu.ac.kr)  
151-744 서울시 관악구 신림동 산 56-1 서울대학교 공과대학  
조선해양공학과  
(전화: 02-880-7332; 팩스: 02-888-9298)

방사 조건은 바닥에 임의의 거짓 바닥 (False bottom)을 넣어주는 것이다 [2-3]. 거짓 바닥으로는 주로 상부 매질과 음향학적 물성치는 같고 감쇠계수만 깊이 방향에 따라 증가하는 매질을 이용한다. 만약 거짓 바닥의 감쇠계수의 증가를 급격히 하는 경우 인위적인 반사가 생겨 방사 조건의 성능이 떨어지며 역으로 감쇠계수를 너무 천천히 증가시키면 거짓 바닥의 두께가 커지게 되어 수치적인 효율이 떨어진다. 일반적으로 심해 해양 환경에서는 전체 해석 영역 깊이의 1/3에 해당하는 영역을 거짓 바닥으로 부가해야 하며 천해 환경의 경우 거짓 바닥의 두께는 더 두터워야 한다고 보고되고 있다 [2]. 거짓 바닥으로 인한 수치 비용 (Computational cost)은 전체 계산 비용의 30% 이상을 차지한다고 한다 [3]. 이러한 전통적인 방사조건의 비효율성을 보완하기 위한 여러 연구 중의 하나로 비국소적 경계조건 (Non-local boundary condition)을 사용하는 방법이 있다 [1][4-8].

포물선 방정식에 대한 비국소적 경계조건은 1982년 Papadakis에 의해 최초로 도입되었다 [4-5]. 그는 정규 포물선 방정식 (Standard parabolic equation)에 대한 비국소적 경계조건을 유도했다. 1991년 Marcus는 Papadakis와 유사하나 보다 일반적인 비국소적 경계조건을 발표했다 [6]. 비국소적 경계조건은 Papadakis에 의해 탄성바닥에 대해 확장되었고 한 방향 Helmholtz 방정식 (One-way Helmholtz equation)에 대한 경계조건도 유도되었다 [7]. Brook과 Thomson은 수직 파수의 근사를 통해 고차 포물선 방정식에 대한 비국소적 경계조건을 유도했다 [8].

일반적으로 비국소적 경계조건을 얻기 위해서 포물선 방정식을 거리방향에 대한 푸리에 혹은 라플라스 변환을 통해 스펙트럴 영역으로 변환하는 과정을 거친다. 변환된 스펙트럴 영역에서 경계 면의 깊이에 대한 임피던스 조건을 부가하고 다시 역 변환을 취해 실제 영역에서 경계 조건을 얻는다. 그러므로 이 실제 영역 경계조건은 임피던스와 물리량간의 컨벌루션 적분식으로 표현되며 당연히 비국소적인 경계 조건이 된다. 아래의 식 (1)은 위와 같은 방법으로 유도된 NtD (Neumann to Dirichlet) 비국소적 경계 조건의 일종이다 [8].

$$p(r, z_{d,0}) = \int_0^{\infty} \frac{\partial p}{\partial z}(r-r', z_{d,0}) \left( \frac{1}{2\pi j} \int_{\epsilon-j\infty}^{\epsilon+j\infty} Z(s, z_{d,0}) e^{sr} ds \right) dr' \quad (1)$$

여기서  $r$ 은 거리  $z$ 는 깊이를 나타낸다.  $p$ 는  $z \rightarrow d-0$ 에서 음압을 나타내고  $Z(s, z_{d,0})$ 는  $z \rightarrow d+0$ 에서의 임피던

스이다.  $d$ 는 경계 면의 깊이로 수치 영역의 하부 경계를 나타낸다.

식 (1)에서 보는 것처럼 비국소적 경계조건은 수치 영역을 절감하는 대신 두 종류의 부가적인 계산비용이 필요하다. 첫째는 식 (1)의 대괄호 안의 임피던스의 역 변환에 드는 계산 비용이며, 둘째는 대괄호와 음압의 미분치 간의 컨벌루션을 계산하는데 소모되는 비용이다. 특히 첫 번째의 경우 컨벌루션의 각 점마다 수치적으로 임피던스를 역 변환해야 하므로 막대한 비용이 소모되며 결과적으로 수치 효율 면에서 비국소적 경계 조건의 성능을 저하시킨다.

다행히 정규 포물선 방정식, 1차 Pad 포물선 방정식 또는 Claerbout 포물선 방정식, Helmholtz 방정식에 대해서는 임피던스 역 변환의 해석적인 식이 존재한다. 아래 식 (2)-(4)는 각각의 방정식에 대응하는 NtD 비국소적 경계조건이다 [8-9].

$$p(r, z_{d,0}) \sim \int_0^{\infty} \frac{\partial p}{\partial z}(r-r', z_{d,0}) \frac{e^{kr}}{\sqrt{r}} dr' \quad (2)$$

$$p(r, z_{d,0}) \sim \int_0^{\infty} \frac{\partial p}{\partial z}(r-r', z_{d,0}) e^{\beta r} (J_0(\beta_2 r') - j J_1(\beta_2 r')) dr' \quad (3)$$

$$p(r, z_{d,0}) \sim \int_0^{\infty} \frac{\partial p}{\partial z}(r-r', z_{d,0}) e^{-\gamma r} J_0(\gamma_2 r') dr' \quad (4)$$

여기서  $\alpha, \beta, \gamma$ 는  $z \rightarrow d+0$ 에서 음향학적 물리량으로 계산되는 상수이다.

식 (2)-(4)는 식 (1)과 달리 컨벌루션 적분의 계산만 필요로 하기 때문에 매우 효율적이다. 그러나 위의 식들은 앞서 말한 바와 같이 식 (2)는 정규 포물선 방정식, 식 (3)은 1차 Pad 포물선 방정식 또는 Claerbout 포물선 방정식, 식 (4)는 Helmholtz 방정식이 지배방정식으로 사용될 때 적용할 수 있는 경계 조건이다. 만약 지배방정식으로 고차 차수의 포물선 방정식을 사용한다면 엄밀하게 말해 식 (2)-(4)는 사용될 수 없다. 이때는 식 (1)로 돌아가 직접 임피던스의 역 변환을 구하며 비국소적 경계 조건을 적용하거나 아니면 분할 비국소적 경계 조건과 같은 새로운 방법으로 접근해야 한다 [3][10]. 어떤 경우든 막대한 양의 수치비용이 소요된다.

그래서 기존 연구자들은 고차 포물선 방정식을 풀 때 도 식 (2)-(4)를 적용했다. Brooke 등은 고차 포물선 방정식에 저차의 비국소적 경계 조건인 식 (2)와 식 (3)을 적용해 수중에서 저주파 음파 전달을 모사했다 [8][11]. 그들은 고차 포물선 방정식에 저차의 경계 조건을 사용

해도 좋은 결과를 준다고 서술하고 있다. Levy는 깊이 방향으로 굴절률이 증가하는 매질에 대해 정규 포물선방정식에 대한 비국소적 경계 조건을 유도하고 저차 포물선 방정식과 결합해 전자기파 전달을 모사했다 [9]. Hyaric은 고차 포물선 방정식에 식 (4)와 유사한 한 방향 Helmholtz경계 조건을 적용했다. 그는 수치실험을 통해 식 (4)의 경계조건은 저차의 포물선 방정식에 대해서 오차를 보이나 8차 의 포물선 방정식에서는 거의 정확한 해를 준다고 밝히고 있다 [12].

위의 연구자들은 모두 수치적인 검증을 통해서만 식 (2)-(4)의 경계 조건이 차수가 다른 포물선 방정식에 사용해도 의미있는 결과를 준다는 것을 확인했다. 이들이 수치 예제로 선택한 환경에서는 그들의 결론이 맞을지 모르나, 일반적인 경우에 관해서는 경계 조건과 지배방정식의 근사 차수의 불일치가 수치 해에 어떤 영향을 주는지는 여전히 불분명하다. 아직까지 불일치의 영향에 대한 어떠한 해석적인 추정도 없었고 근사 차수가 다른 비국소적 경계 조건의 사용 한계를 제시한 연구는 시도 되지 않았다 [3].

본 연구에서는 비국소적 경계 조건과 지배방정식으로 써 포물선 방정식의 근사 차수의 불일치가 해에 미치는 영향을 해석적으로 보였다. 본 연구의 방법을 이용하면 불일치의 영향에 대해 해석적으로 추정할 수 있으며 식 (2)-(4)의 비국소적 경계 조건의 사용 한계도 쉽게 보일 수 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 본 연구에 이용된 포물선 방정식을 유도했고 III장에서는 평면파 분석법을 이용해 수치 영역의 하부 경계에서 불일치의 영향을 접지각에 따른 평면파 반사계수로 표현하고 그 효과를 분석했다. IV장에서는 차수의 불일치가 반사 오차에 미치는 효과를 도식적으로 고찰했다. V장은 결론이다.

## II. 포물선 방정식의 유도

음압을  $p$ 라고 할 때 이차원 사각 좌표계에서 Helmholtz 방정식은 다음과 같다.

$$\rho(x, z) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho(x, z)} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho(x, z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(x, z)} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2(x, z)p = 0 \quad (5)$$

여기서  $\rho(x, z)$ 는 매질의 밀도,  $k(x, z) = \omega/c(x, z)$ 이며 매질 파수를 나타낸다.  $\omega$ 는 각주파수,  $c(x, z)$ 는 매질의

음속이다.

미소 공간에 대해 거리 독립이라 가정하고 임의의 음속을  $c_0$ 라 하고 임의의 파수를  $k_0 = \omega/c_0$ 라 한다. 이때 식 (5)의 방정식을 입사파와 전달파에 해당하는 항으로 분리해 전달파만을 취하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = jk_0 \sqrt{1+X} p \quad (6)$$

여기서  $X = \frac{1}{k_0^2} [k^2(z) - k_0^2 + \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right)]$ 로 표현되는 연산자이다.

식 (6)은 자체로는 완전한 한 방향 Helmholtz방정식이다. 식 (6)에서  $\sqrt{1+X}$  연산자를 어떻게 근사하느냐에 따라 포물선 방정식의 형태가 달라진다. 가장 간단한 정규 포물선 방정식은 식 (6)의 깊이 방향 연산자에 Taylor 근사를 취해  $O(X)$ 항까지 고려하며 다음과 같다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = jk_0 \left( 1 + \frac{X}{2} \right) p \quad (7)$$

식 (7)의 정규 포물선 방정식은 거의 수평 방향의 포물선 근사 (Paraxial approximation)를 취한 것으로 넓은 범위의 각도까지 포함하려면  $x$ 의 고차 항까지 고려해야 한다. 가장 쉬운 방법으로는 Taylor 근사의 차수를 높이는 방법이 있으나 적용할 수 있는 수치 해법의 제약 때문에 부분분수 형태로 변화시켜 근사하는 Padé 근사법을 사용한다. 아래의 식은 Padé 법으로 근사한 포물선 방정식이다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = jk_0 \left[ 1 + \sum_{m=1}^M \frac{a_m X}{1 + b_m X} \right] p \quad (8)$$

여기서  $a_m = \frac{2}{2M+1} \sin^2 \left( \frac{m\pi}{2M+1} \right)$ ,  $b_m = \cos^2 \left( \frac{m\pi}{2M+1} \right)$  이다[13].

식 (8)의 포물선 방정식은 M차 차수의 포물선 방정식으로 불리며  $O(X^{2M})$ 의 항까지 취한 것이다.

계산의 편의를 위해  $k_0 = k$ 로 놓고 매질의 물성은 깊이 방향으로 일정하다고 할 때, 깊이 방향의 연산자  $X$ 는 다음과 같이 단순화 된다.

$$X = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9)$$

위의 가정과 더불어  $p \sim e^{jk_x x + k_z z}$ 라 가정하면 식 (6)-(9)로부터 각각 다음과 같은 분산 관계식들이 얻어진다.

$$k_x = k \left(1 - \frac{k_z^2}{2k^2}\right) \tag{10}$$

$$k_x = k \left[1 - \sum_{m=1}^M \frac{a_m k_z^2}{k^2 - b_m k_z^2}\right] \tag{11}$$

$$k_x = k \sqrt{1 - \frac{k_z^2}{k^2}} \approx \sqrt{k^2 - k_z^2} \tag{12}$$

여기서 식 (10)은 정규 포물선 방정식, 식 (11)은 M차 포물선 방정식, 식 (12)는 한 방향 Helmholtz 방정식에 대한 분산 관계식이다.

식 (10)-(12)에서 보면 포물선 근사의 방법에 따라 매질의 분산 관계식이 달라지는 것을 볼 수 있다. 이 분산 관계식의 변화는 도파관 매질에서 음파의 위상속도나 군속도에 영향을 주어 음장의 위상변화를 가져온다 [14]. 또한 어떤 2층 매질이 있을 때 두 매질의 음향학적 물성이 같더라도 서로 다른 차수로 포물선 근사되었다면 그 경계에서 Snell의 위상 일치 조건이 자명하게 만족되지 않는다는 것도 추정할 수 있다. 다음 장에서는 포물선 근사의 불일치가 궁극적으로 어떤 영향을 주는지 평면파 분석법을 이용해 해석하겠다.

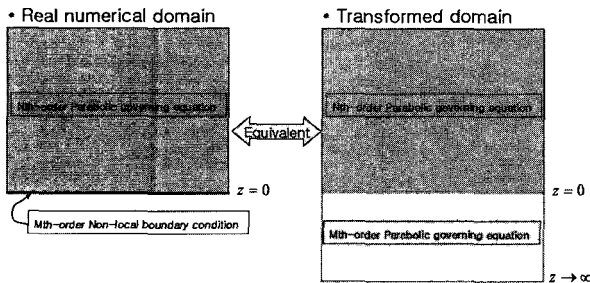


그림 1. 실 수치 영역의 비국소적 경계 조건과 변환 영역의 반 무한 매질 영역의 동일성

Fig. 1. The equivalence between the NLBC in the real numerical domain and the half-space domain in the transformed domain.

### III. 평면파 분석법을 이용한 비국소적 경계조건 해석

평면파 관점에서 수치 영역의 비국소적 경계 조건은 같은 근사 차수를 만족하는 반 무한 영역 매질로 치환할 수 있다. 즉, M차 근사 차수의 비국소적 경계 조건은 동일한 차수의 포물선 지배 방정식으로 묘사되는 반 무한 영역 매질로 변환할 수 있다는 말이다. 그림 1은 물리 영역에서 '수치영역+비국소적 경계 조건'이 파수 영역에

서 '수치영역+반 무한 영역 매질'과 동등하다는 것을 도식화한 것이다. 해양 환경의 경우 수치 영역의 상부 경계는 압력 소멸 조건으로 취급되므로 우리는 바닥 경계 조건만을 고려해 문제를 그림 1의 좌측과 같은 2층 매질로 단순화한다. 2층 매질의 물리적인 음향학적 물성은 동일하다. 실제 물리 영역에서는 그림1의 상부매질은 수치 영역에 해당하는 부분이고 하부매질은 비국소적 경계 조건으로 응축되는 부분이다. 만약 상부 매질의 지배 방정식이 M차 포물선 방정식이고, 하부 매질 역시 M차 포물선 방정식이라면 두 매질의 경계에서 반사는 발생하지 않는다. 경계에서 반사계수가 0이므로 이론적으로 완벽한 방사 경계 조건을 만족한다고 할 수 있다. 그러나 근사 차수의 불일치가 발생하면 인위적인 반사가 발생할 것이다.

음압이 평면파라 가정할 때 그림 1의 상부 매질에서 음장은 다음과 같이 표현된다.

$$p_1(x, z) = e^{jk_x x} (e^{jk \sin \theta_1 z} + R e^{-jk \sin \theta_2 z}) \tag{13}$$

여기서 R은 평면파 반사계수,  $\theta_1$ 는 접지각,  $\theta_2$ 은 반사각을 나타낸다. k는 매질의 파수이고  $k_{x1}$ 은 포물선 근사의 차수에 따라 분산 관계식에서 결정되는 상부 매질의 수평 파수이다.

한편 하부 매질의 음장은 아래와 같이 표현된다.

$$p_2(x, z) = T e^{k_{x2} x} e^{k \sin \theta_1 z} \tag{14}$$

여기서 T은 평면파 전달계수,  $\theta_1$ 는 전달각을 나타낸다. k는 상부 매질과 동일한 매질의 파수이고  $k_{x2}$ 는 역시 포물선 근사의 차수에 따라 분산 관계식에서 결정되는 하부 매질의 수평 파수이다.

두 매질의 음장은 각각 경계 면인  $z=0$ 에서 음압과 깊이 방향 속도에 대한 연속 조건을 만족해야 한다.

우선 음압의 연속 조건에서 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\theta_1 = \theta_2 \tag{15}$$

$$k_{x1} = k_{x2} \tag{16}$$

$$1 + R = T \tag{17}$$

식 (15)-(16)은 위상의 일치 조건에 의한 것이고 식 (17)은 식 (15)-(16)이 성립할 때 음압의 연속 조건에서 얻어진다. 특히 식 (16)은 Snell의 법칙으로 볼 수 있으

나 그 의미는 사뭇 다르다. Snell의 법칙에서는 두 매질의 음속의 차이와 접지각에 의해 전달각이 결정된다. 만약 두 매질의 음속이 같다면 접지각과 전달각은 동일하다. 이것은 실제 현실에서 관찰되는 물리 현상이다. 그러나 본 유도에서는 두 매질의 음속이 같더라도 접지각과 전달각이 달라질 수 있다. 이것은 순수하게 두 매질간의 포물선 근사 차수의 불일치에서 일어나는 현상이며 근원적으로 분산 관계식의 불일치에 원인이 있다.

한편 깊이 방향 속도의 연속 조건을 적용하면 다음과 같은 식이 얻어진다.

$$\sin \theta_i - R \sin \theta_r = T \sin \theta_t \tag{18}$$

식 (15), (17), (18)을 정리하면 아래와 같은 평면파 반사계수를 얻을 수 있다.

$$R = \frac{\sin \theta_i - \sin \theta_t}{\sin \theta_i + \sin \theta_t} \tag{19}$$

여기서  $\theta_t$ 는 식 (16)에 의해서 결정된다.

식 (19)의 반사계수는 명백히 포물선 근사 차수의 불일치에서 발생하는 반사이며 수치 해의 오차 성분이 된다. 물론 두 매질 사이의 근사 차수가 같은 경우 식 (19)는 당연히 0이 된다. 이때는 비국소적 경계 조건이 완벽한 방사 경계 조건으로써의 역할을 한다. 그러나 근사 차수가 다른 경우 식 (19)에 의해 입사각에 따라 인위적인 반사가 발생할 것이다. 다음 절에서는 3가지의 간단한 환경에서 반사 오차의 특성을 고찰한 후 이어서 고차 근사 차수에 대해 식 (19)의 해석적인 식을 유도할 것이다.

### 3.1. 한 방향 Helmholtz 방정식/정규 포물선 방정식

상부 매질은 한 방향 Helmholtz 방정식이 지배방정식이고 하부 매질은 정규 포물선 방정식이 지배방정식인 경우를 생각한다. 이때 위상 조건인 식 (16)은 분산 관계식인 식 (10)과 식 (12)에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$k_x = k_{x,2} \rightarrow k \cos \theta_i = k \left(1 - \frac{k^2 \sin^2 \theta_i}{2k^2}\right) \tag{20}$$

식 (20)을 정리하면,  $\sin \theta_t = \sqrt{2(1 - \cos \theta_i)}$ 가 되고 식 (19)에 넣어 해석적인 반사계수를 구하면 다음과 같다.

$$R_{\text{OWH1SFE}} = \frac{\sqrt{1 + \cos \theta_i} - \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \cos \theta_i} + \sqrt{2}} \tag{21}$$

식 (21)은 한 방향 Helmholtz 방정식이 지배 방정식이고, 정규 포물선 방정식이 비국소적 경계 조건으로 사용될 때 경계 조건의 반사 오차를 의미한다. 이 반사 오차는 식 (21)에서 보듯 접지각에 의존적이다. 재미있는 점은  $\theta_i \rightarrow 0$ 일 때 식 (21)의 오차는 0으로 수렴한다는 것이다. 즉, 낮은 접지각 영역에서는 두 매질간의 근사 차수의 불일치의 오차가 거의 나타나지 않는다. 그리고 전파 모드 (Radiation mode)인  $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$ 에서 식 (21)은 크기는 언제나 음수라는 것도 쉽게 확인할 수 있다.

이번엔 음향학적 물성 차이에 의한 반사처럼 역전 원리 (Reciprocity principle)가 성립하는지를 확인하기 위해 반대의 경우를 생각한다. 즉, 정규 포물선 방정식이 상부 매질이고 한 방향 Helmholtz 방정식이 하부 매질이다. 이때 식 (16)은  $k(1 - \frac{k^2 \sin^2 \theta_i}{2k^2}) = k \cos \theta_t$ 이 되어 식 (19)에 넣어 정리하면 다음과 같다.

$$R_{\text{SPE1CWH}} = \frac{2 - \sqrt{3 + \cos^2 \theta_i}}{2 + \sqrt{3 + \cos^2 \theta_i}} \tag{22}$$

식 (22)도 식 (19)처럼 낮은 접지각 영역에서 근사 차수 불일치의 오차가 작아진다.  $\theta_i \rightarrow 0$ 에서 반사계수는 0에 가깝다. 식 (19)와 비교해 흥미로운 점은 식 (22)는 전파 모드에서 언제나 양수의 값을 갖는다는 것이다. 그러나 식 (19)와 식 (22)를 비교해 보면 역전 원리 (Reciprocity principle)는 성립하지 않는다는 것을 알 수 있다. 이것은 포물선 근사의 불일치에서 기인하는 반사의 독특한 특징이라고 볼 수 있다.

### 3.2. 한 방향 Helmholtz 방정식/1차 포물선 방정식

유도과정은 3.1절과 동일하다. 이때 식 (16)은  $k \cos \theta_i = k \left(1 - \frac{(1/2)k^2 \sin^2 \theta_i}{k^2 - (1/4)k^2 \sin^2 \theta_i}\right)$ 이 되며 식 (19)는 다음과 같이 표현된다.

$$R_{\text{CWH1SFE}} = \frac{\sqrt{1 + \cos \theta_i} - \sqrt{4/(3 - \cos \theta_i)}}{\sqrt{1 + \cos \theta_i} + \sqrt{4/(3 - \cos \theta_i)}} \tag{23}$$

근사 오차인 식 (23)도 3.1절의 식 (19)처럼 낮은 접지각 영역에서 작은 크기를 가진다는 것을 쉽게 알 수 있다.

식 (23)을 구할 때와 동일한 과정으로 두 매질을 바꿔서 반사계수를 구해보면 다음과 같다.

$$R_{\text{SPE/OWH}} = \frac{1 - \sqrt{8(1 + \cos^2 \theta_1)(3 + \cos^2 \theta_1)}}{1 + \sqrt{8(1 + \cos^2 \theta_1)(3 + \cos^2 \theta_1)}} \quad (24)$$

역시 식 (24)는 식 (23)과 역전 원리가 성립하지 않는다. 그리고 3.1절에서 관찰한 것과 유사하게 전파모드에 대해 식 (23)는 언제나 0 이하의 음수인 반면 식 (24)은 0 이상의 양수이다.

### 3.3. 정규 포물선 방정식/1차 포물선 방정식

본 절에서는 상부 매질은 정규 포물선 방정식, 하부 매질은 1차 포물선 방정식으로 묘사되는 2층 매질에서 대한 반사 오차를 유도한다. 이 경우 식 (16)에서  $k(1 - \frac{k^2 \sin^2 \theta_1}{2k^2}) = k(1 - \frac{(1/2)k^2 \sin^2 \theta_1}{k^2 - (1/4)k^2 \sin^2 \theta_1})$  이 되고 식 (19)는 다음과 같이 유도된다.

$$R_{\text{SPE/lstPE}} = \frac{1 - 2/\sqrt{5 - \cos^2 \theta_1}}{1 + 2/\sqrt{5 - \cos^2 \theta_1}} \quad (25)$$

두 매질을 바꾸었을 때 반사 오차는 다음과 같다.

$$R_{\text{OWH/SPE}} = \frac{1 - 2/\sqrt{3 + \cos^2 \theta_1}}{1 + 2/\sqrt{3 + \cos^2 \theta_1}} \quad (26)$$

전파 모드에서 식 (25)의 반사 오차는 언제나 0이상의 양수이고, 식 (26)의 반사 오차는 0이하의 음수라는 것을 역시 확인할 수 있다. 3.1절 식 (21), (22), 3.2절의 식 (23), (24)와 위의 두 식을 고찰할 때 하나의 규칙성을 발견할 수 있다. 비국소적 경계 조건의 근사 차수가 지배 방정식의 차수보다 높은 경우 언제나 반사 오차는 양수가 된다. 역으로 비국소적 경계 조건의 근사 차수가 보다 낮은 경우 반사 오차는 음의 값을 갖는다. 바닥의 음향 임피던스가 0에서 무한대로 증가함에 따라 반사계수가 -1에서 1로 변화하듯, 경계 조건의 근사 차수의 증가에 따라 비슷한 경향을 보이는 것을 알 수 있다.

### 3.4. 3가지 경우에서 비국소적 경계 조건의 정밀도

지금까지 유도한 반사 오차는 모두 낮은 접지각에서 0에 가까운 값을 갖는다. 그러나 Taylor 근사를 이용해  $\theta_1 \rightarrow 0$  근처에서 반사 오차의 정밀도를 비교해 보면 미세한 차이가 나는 것을 알 수 있다.

$$\text{식 (21): } R_{\text{OWH/SPE}}|_{\theta_1 \rightarrow 0} \approx \frac{\sqrt{2}(1 - (1/8)\theta_1^2 + \dots) - \sqrt{2}}{\sqrt{2}(1 - (1/8)\theta_1^2 + \dots) + \sqrt{2}} \approx 0 + O(\theta_1^2) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \text{식 (23): } R_{\text{OWH/SPE}}|_{\theta_1 \rightarrow 0} &\approx \frac{\sqrt{2}(1 - (1/8)\theta_1^2 + (1/384)\theta_1^4 + \dots) - \sqrt{2}(1 - (1/8)\theta_1^2 + (13/384)\theta_1^4 + \dots)}{\sqrt{2}(1 - (1/8)\theta_1^2 + (1/384)\theta_1^4 + \dots) + \sqrt{2}(1 - (1/8)\theta_1^2 + (13/384)\theta_1^4 + \dots)} \\ &\approx 0 + O(\theta_1^4) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{식 (25): } R_{\text{SPE/lstPE}}|_{\theta_1 \rightarrow 0} \approx \frac{1 - (1 - (1/8)\theta_1^2 + \dots)}{1 + (1 - (1/8)\theta_1^2 + \dots)} \approx 0 + O(\theta_1^2) \quad (29)$$

식 (27)과 식 (28)을 보면 지배 방정식의 차수가 같아도 경계 조건에 따라 정밀도가 달라지는 것을 볼 수 있다. 역으로 식 (28)과 식 (29)에서는 경계 조건의 차수가 같아도 지배 방정식의 차수가 다르다면 정밀도가 달라지는 것을 볼 수 있다. 이러한 경향은 근사 차수의 불일치에서 오는 오차가 단순히 비국소적 경계 조건이나 또는 지배 방정식의 차수, 어느 한 쪽에서 일방적으로 기인하는 것이 아니라 둘 사이의 상관 관계에 따라 결정된다는 것을 의미한다. 위의 결과로만 판단하면 반사 오차의 정밀도는 지배방정식과 비국소적 경계 조건 중에 차수가 낮게 근사된 부분에 의존하는 것을 관찰할 수 있다. 마치 체인 룰 (Chain rule)에서 쇠사슬에서 가장 약한 부분이 전체 쇠사슬의 특성을 결정하듯 지배 방정식과 비국소적 경계 조건도 근사 차수가 낮은 부분이 수치 해의 오차 정밀도를 결정하는 것이다. 현 관찰의 일반적인 증명은 다음 장에서 보일 것이다. 한편 식 (22), 식 (24), 식 (26)의 두 매질이 바뀌었을 때의 반사 오차의 정밀도는 각각 위의 식 (27)-(29)와 같다. 이것은 식 (16)의 위상 일치 조건을 Taylor 근사를 이용해 접지각의 다항식으로 전개한 후 급수의 역전 공식을 이용하면 쉽게 보일 수 있다[15]. 이처럼 두 매질이 역전 되었을 때도 같은 오차 정밀도를 갖는다는 것은 반사 오차가 순수하게 지배방정식과 경계조건의 상대적인 차수의 불일치에 의해 결정된다는 것을 말한다.

### 3.5. M차 포물선 방정식/SPE or OWH or lstPE

본 절에서는 3.1-3.3절의 논의를 일반화 하겠다. 상부 매질은 M차 포물선 방정식이 지배방정식이고 하부 매질은 정규 포물선 방정식, 한 방향 Helmholtz 방정식, 1차 포물선 방정식 중 하나라고 한다. 특별히 상부 매질의  $M \rightarrow \infty$ 인 경우 M차 포물선 방정식은 한 방향 Helmholtz 방정식과 같다고 볼 수 있고,  $M=1$ 이고  $q=1/2$ ,  $h=0$ 으로 놓는다면 M차 포물선 방정식은 정규 포물선 방정식으로 취급할 수 있다 [2].

본 절에서 상정한 2층 매질은 식 (2)-(4)에서 표현된 각각의 비국소적 경계 조건을 고차 포물선 방정식에 적용한 것과 같으며 실제 수치모델에서 많이 응용되는 방

법이다. 앞 절과 동일한 방법으로 식 (16)의 위상 조건에 의해 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 k[1 - \frac{\sum_{n=1}^M \frac{a_n k^2 \sin^2 \theta_n}{k^2 - b_n k^2 \sin^2 \theta_n}] &= k[1 - \frac{k^2 \sin^2 \theta_0}{2k^2}] \quad (\text{MthPE/SPE}) \\
 k \cos \theta &= k[1 - \frac{\sum_{n=1}^M \frac{a_n k^2 \sin^2 \theta_n}{k^2 - b_n k^2 \sin^2 \theta_n}] = k \cos \theta_0 \quad (\text{MthPE/OWH}) \\
 k[1 - \frac{\sum_{n=1}^M \frac{a_n k^2 \sin^2 \theta_n}{k^2 - b_n k^2 \sin^2 \theta_n}] &= k[1 - \frac{a_0 k^2 \sin^2 \theta_0}{k^2 - b_0 k^2 \sin^2 \theta_0}] \quad (\text{MthPE/1stPE})
 \end{aligned} \tag{30}$$

식 (30)에서 각각의 경우에  $\sin \theta_n$ 는 해석적으로 구해지며 약간 복잡해지긴 하지만 식 (19)의 반사계수도 역시 해석적으로 구할 수 있다. 다음의 식들은 각각에 해당하는 반사계수이다.

$$R_{\text{MthPE/SPE}} = \frac{1 - \sqrt{4 \sum_{n=1}^M a_n (1 - b_n \sin^2 \theta_n)}}{1 + \sqrt{4 \sum_{n=1}^M a_n (1 - b_n \sin^2 \theta_n)}} \tag{31}$$

$$R_{\text{MthPE/OWH}} = \frac{1 - \sqrt{4 \sum_{n=1}^M a_n (1 - b_n \sin^2 \theta_n) [2 - \sum_{n=1}^M a_n \sin^2 \theta_n (1 - b_n \sin^2 \theta_n)]}}{1 + \sqrt{4 \sum_{n=1}^M a_n (1 - b_n \sin^2 \theta_n) [2 - \sum_{n=1}^M a_n \sin^2 \theta_n (1 - b_n \sin^2 \theta_n)]}} \tag{32}$$

$$R_{\text{MthPE/1stPE}} = \frac{1 - \sqrt{(\sum_{n=1}^M \frac{a_n}{1 - b_n \sin^2 \theta_n}) A_0 \pm b_0 \sum_{n=1}^M \frac{a_n \sin^2 \theta_n}{1 - b_n \sin^2 \theta_n}}}{1 + \sqrt{(\sum_{n=1}^M \frac{a_n}{1 - b_n \sin^2 \theta_n}) A_0 + b_0 \sum_{n=1}^M \frac{a_n \sin^2 \theta_n}{1 - b_n \sin^2 \theta_n}}} \tag{33}$$

위의 식 (31)-(33)은 일반화된 식으로 역시  $\theta \rightarrow 0$ 일 때 반사 오차가 0에 가까워진다. 위의 식에 대해 접지각 영역에서 반사 오차의 정밀도를 알아보기 위해 Taylor 근사를 취하면 다음과 같다.

$$R_{\text{MthPE/SPE}}|_{\theta \rightarrow 0} \approx 0 + O(\theta^2) \tag{34}$$

$$R_{\text{MthPE/OWH}}|_{\theta \rightarrow 0} \approx 0 + O(\theta^{2M}) \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\text{MthPE/1stPE}}|_{\theta \rightarrow 0} &= 0 \quad (M=1) \\
 &\approx 0 + O(\theta^2) \quad (M \neq 1)
 \end{aligned} \tag{36}$$

위 식에서 Taylor 근사를 계산할 때 MATLAB의 MAPLE 루틴을 이용했다 [16].

위의 일반화 된 결과를 살펴보면, 앞 절에서 고찰했던 것과 같은 결과가 나오는 것을 볼 수 있다. 식 (33)에서 보면, 지배 방정식의 차수와 관계없이 오차의 정밀도는 언제나  $O(\theta^2)$ 이다. 정규 포물선 방정식은 언제나 M차 포물선 방정식보다 낮은 근사도를 갖고 있기 때문에 나타나는 결과이다. 식 (34)는 식 (33)과 반대의 경우이다. 경계 조건은 근사 차수가 무한대인 완전한 한 방향 Helmholtz 방정식을 따른다. 이때 지배방정식의 차수에 따른 오차의 정밀도는  $O(\theta^{2M})$ 으로 지배 방정식의 차수를

높일수록 증가한다. 다시 말하면 식 (34)와 같은 경계 조건에서는 지배 방정식의 차수가 해의 정확성을 좌우한다. 식 (35)는 1차 포물선 방정식에 의한 경계 조건을 갖는 경우이다. 식 (33)에 비해 오차의 정밀도는  $O(\theta^2)$ 으로 높아진 것을 알 수 있다. 그러나 역시 지배 방정식의 차수를 높이더라도 경계 조건의 차수가 1차이기 때문에 오차 정밀도는 항상  $O(\theta^2)$ 이 된다. 물론 지배 방정식의 차수가 1차라면 오차는 0이 된다.

마지막으로 두 개의 매질이 역전 된 경우에 대해서 생각한다. 이때는 M차 포물선 방정식이 하부 매질의 역할을 한다. 이 같은 경우는 실제 수치 해석에서 사용되지 않는다. 왜냐하면 이때는 서론에서 밝혔듯이 식 (1)을 직접 계산해야 하므로 수치적인 비용이 너무 크기 때문이다. 그러나 특별히 지배방정식과 경계 조건의 역전 관계를 비교하기 위해 고려해 보았다. 동일한 유도과정에 따라 식 (16)의 위상조건에 의해 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\begin{aligned}
 k[1 - \frac{k^2 \sin^2 \theta_0}{2k^2}] &= k[1 - \sum_{n=1}^M \frac{a_n k^2 \sin^2 \theta_n}{k^2 - b_n k^2 \sin^2 \theta_n}] \quad (\text{SPE/MthPE}) \\
 k \cos \theta &= k[1 - \sum_{n=1}^M \frac{a_n k^2 \sin^2 \theta_n}{k^2 - b_n k^2 \sin^2 \theta_n}] \quad (\text{OWH/MthPE}) \\
 k[1 - \frac{a_0 k^2 \sin^2 \theta_0}{k^2 - b_0 k^2 \sin^2 \theta_0}] &= k[1 - \sum_{n=1}^M \frac{a_n k^2 \sin^2 \theta_n}{k^2 - b_n k^2 \sin^2 \theta_n}] \quad (1stPE/MthPE)
 \end{aligned} \tag{36}$$

식 (36)에서  $\sin \theta_n$ 을 구하기 위해서는  $\sin \theta$ 에 대한 고차 다항식을 풀어야 한다. 그러므로 임의의 M차 항에 대

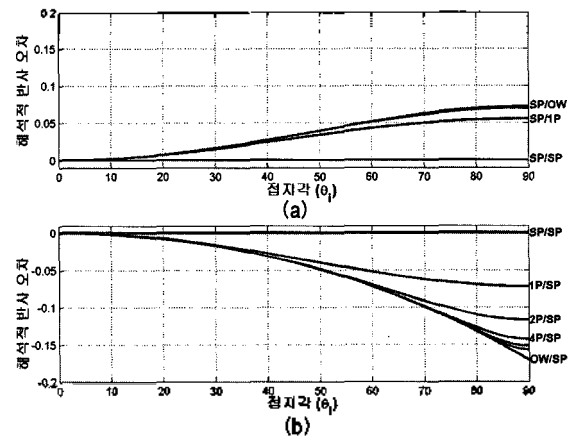


그림 2. 접지각에 따른 해석적 반사 오차: (a) 정규 포물선 지배 방정식과 다양한 비국소적 경계 조건, (b) 다양한 포물선 지배 방정식과 정규 포물선 방정식의 비국소적 경계 조건. (X/Y: X의 지배방정식과 Y의 경계 조건, SP:정규 포물선 근사, NP: N차 Padé 포물선 근사, OW: 한방향 Helmholtz 근사)

Fig. 2. The analytic reflection errors as functions of the grazing angle for the following cases: (a) Standard parabolic governing equation and several NLBCs. (b) Several parabolic governing equation and standard parabolic NLBC. (X/Y: the governing equation of X and the NLBC of Y, SP: Standard approximation, NP: N th-order Padé approximation, OW: One-way Helmholtz approximation).

해 해석적인 해를 구하는 것은 불가능하다. 그래서 본 논문에서는 Bisection법으로 식 (36)의 해를 구하고 식 (19)의 반사 오차를 구했다[17]. 한편, 이와 같이 두 매질이 역전된 경우의 오차 정밀도는 3.4절에서 언급한 것처럼 급수의 역전 공식에 의해 각각 식 (33)-(34)와 동일

하다. 다음 장에서는 본 장에서 유도한 반사 오차를 도식적으로 논의하겠다.

#### IV. 차수 불일치가 반사 오차에 미치는 효과

그림 2는 정규 포물선 방정식이 비국소적 경계 조건으로 사용될 때, 그리고 둘 사이의 관계가 역전된 경우의 반사 오차를 도시한 것이다. 그림 2(a)에서는 지배 방정식으로 정규 포물선 방정식을 사용하고 비국소적 경계 조건의 차수를 정규 포물선 근사, 1차 Padé 포물선 근사, 2차 포물선 근사, 4차 포물선 근사, 6차 포물선 근사, 8차 포물선 근사, 한방향 Helmholtz 근사 순으로 변화시켜가며 반사 오차의 거동을 관찰했다. 그림에서 보듯 SP/SP일 때 당연히 반사 오차는 0이 된다. 그러나 지배 방정식과 경계 조건의 차수가 달라지면 반사 오차가 발생하는 것을 볼 수 있다. 그림 2(a)에서 기호로 표시하지 않았으나 SP/1P와 SP/OW사이에는 SP/2P, SP/4P, SP/8P의 곡선이 차례로 겹쳐있다. 즉, 1차 Padé 포물선 근사보다 높은 차수의 경계 조건일 때 반사 오차는 급격하게 한 방향 Helmholtz 근사의 경계 조건인 경우로 수렴한다.

그림 2(b)는 수증음향에서 많이 적용되는 예로서 정규 포물선 방정식을 비국소적 경계 조건으로 갖는 경우를 살펴해보았다. 그림 2(a)와 마찬가지로 지배방정식과 경계 조건의 차수의 불일치가 커지면서 반사 오차는 커진다. 그림 2(b)에서 유의할 점은 적어도 15도 이내의 접지각에서는 불일치의 정도에 상관없이 언제나 반사 오차는 0에 가깝다는 것이다. 이런 경향은 그림 2(a)에서도 나타난다. 이것은 지배 방정식과 경계 조건 중 낮은 근사 차수를 갖는 부분이 전체 해의 정밀도를 결정하기 때문이다.

그림 3은 한방향 Helmholtz 방정식이 비국소적 경계 조건으로 사용될 때, 그리고 둘 사이의 관계가 역전된 경우의 반사 오차를 도시한 것이다. 근사 차수는 그림 2와 같이 증가시켰다. 해당하는 지배 방정식과 경계 조건의 관계는 그림 우측에 기호로 표시했다. 기호로 표시하지 않았으나 그림 3(a)에서 OW/OW와 OW/2P사이에는 OW/8P, OW/6P, OW/4P이 차례로 놓여 있다. 마찬가지로 그림 3(b)에서도 1P/OW와 OW/OW사이에는 2P/OW, 4P/OW, 6P/OW, 8P/OW이 차례로 놓여 있다. 그림 2와 마찬가지로 지배방정식과 경계 조건의 차수가 같을 때는 반사 오차는 0이 된다. 그러나 차수의 불일치가 커질수

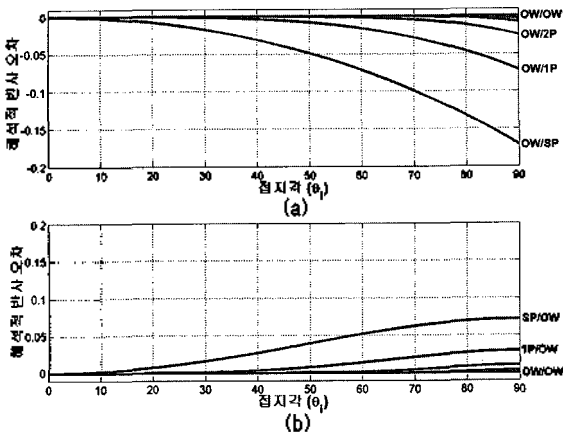


그림 3. 접지각에 따른 해석적 반사 오차: (a) 한방향 Helmholtz 지배 방정식과 다양한 비국소적 경계 조건, (b) 다양한 포물선 지배 방정식과 한방향 Helmholtz 비국소적 경계 조건. (X/Y: X의 지배 방정식과 Y의 경계 조건, SP: 정규 포물선 근사, NP: N차 Padé 포물선 근사, OW: 한방향 Helmholtz 근사)

Fig. 3. The analytic reflection errors as functions of the grazing angle for the following cases: (a) One-way Helmholtz governing equation and several NLBCs, (b) Several parabolic governing equation and one-way Helmholtz NLBC. (X/Y: the governing equation of X and the NLBC of Y, SP: Standard approximation, NP: N th-order Padé approximation, OW: One-way Helmholtz approximation).

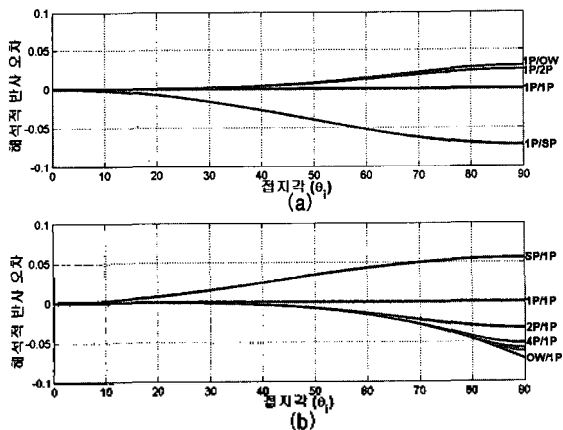


그림 4. 접지각에 따른 해석적 반사 오차: (a) 1차 Padé 포물선 지배 방정식과 다양한 비국소적 경계 조건, (b) 다양한 포물선 지배 방정식과 1차 Padé 포물선 비국소적 경계 조건. (X/Y: X의 지배방정식과 Y의 경계 조건, SP: 정규 포물선 근사, NP: N차 Padé 포물선 근사, OW: 한방향 Helmholtz 근사)

Fig. 4. The analytic reflection errors as functions of the grazing angle for the following cases: (a) 1st Padé parabolic governing equation and several NLBCs, (b) Several parabolic governing equation and 1st Padé parabolic NLBC. (X/Y: the governing equation of X and the NLBC of Y, SP: Standard approximation, NP: N th-order Padé approximation, OW: One-way Helmholtz approximation).



록 반사오차는 커지게 된다. 그림 3에서 해의 정밀도는 포물선 근사의 차수가 높아질수록 증가하는 것을 볼 수 있다. 특히 그림 3(a)의 OW/2P이상의 경우, 그림 3(b)의 2P/OW이상에서는 모든 접지각에 걸쳐서 반사 오차는 0에 가까운 것을 볼 수 있다. 즉, 2차 이상의 포물선 방정식을 지배 방정식으로 이용하는 경우 한방향 Helmholtz 경계 조건은 충분한 방사 조건을 충족시킨다는 것을 볼 수 있다. 또한 그림 2와 3에서 지배방정식의 차수가 경계 조건보다 높은 경우 반사 오차는 음의 값을 갖고, 낮은 경우는 양의 값을 갖는 경향을 확인할 수 있다.

그림 4는 1차 Pad 포물선 방정식이 비국소적 경계 조건으로 사용될 때, 그리고 둘 사이의 관계가 역전된 경우의 반사 오차를 도시한 것이다. 그림 4의 표기는 그림 2와 3과 같다. 그림 우측의 기호가 생략된 부분은 그림 2와 3처럼 순서대로 곡선이 겹쳐서 놓여있다고 보면 된다. 그림 4는 앞서 논의했던 결과를 전반적으로 보여준다. 그림 4(a)와 4(b)에서 반사 오차는 지배방정식과 경계 조건의 차수의 크기가 달라짐에 따라 양수에서 음수, 혹은 음수에서 양수로 변화한다. 0의 값은 지배방정식과 경계조건의 차수가 같을 때 나타난다. 또한 SP/1P와 1P/SP의 경우 해의 정밀도는 15도 이내인 것을 알 수 있다. 이것은 낮은 차수가 해의 정밀도를 결정한다는 원리를 따른다. 지배 방정식이나 경계 조건의 근사 차수가 SP보다 높은 경우는 40도까지 해의 정밀도가 향상되는 것을 볼 수 있다. 이것은 1차 Pad 포물선 근사의 정밀도와 일치하며 역시 앞서 말한 정밀도의 낮은 차수 결정 원리를 만족한다.

그림 2, 3, 4를 전반적으로 관찰할 때 반사 오차는 낮은 접지각 영역에서 0에 가까우며 높은 접지각으로 갈수록 커지는 것을 볼 수 있다. 또한 차수의 불일치가 발생하더라도 최대 반사 오차는 10.21을 넘지 않는다. 이러한 경향을 관찰할 때, 그간 여러 연구자들이 수행한 수치 검증에서 비국소적 경계 조건이 우수한 성능을 보였던 원인을 고찰할 수 있다. 해양 도파관에서 음파 전달 실험을 하는 경우 낮은 접지각 영역이 지배적이므로 차수의 불일치에 의한 오차의 영향이 비교적 적게 반영된다. 게다가 높은 접지각 영역에서 인위적으로 반사되는 성분도 그 크기가 매우 작아 대부분의 경우 전체 음장에 미치는 영향이 미미했을 것이다.

마지막으로 본 논문에서 유도된 평면파 반사 계수 오차는 경계 조건의 오차를 보여주는 양이며 실제 공간에서 물리적인 반사 오차를 나타내는 물리량은 아니라는

점을 언급한다. 참고로 물리적인 반사 오차는 구면파 반사 계수로 표현되며 평면파 반사 계수의 적분 변환을 통해 계산할 수 있다.

## V. 결 론

우리는 수치 영역의 포물선 지배 방정식의 근사 차수와 수치 영역 경계의 비국소적 경계 조건의 근사 차수가 서로 다를 때의 오차를 보이고 정밀도를 유도했다. 본 논문에서 얻은 결론은 다섯 가지로 정리할 수 있다. 첫째, 지배 방정식과 경계 조건의 근사 차수의 불일치로 인해 발생하는 반사 오차의 거동은 둘 중 낮은 차수를 갖는 쪽에 의해 지배된다. 둘째, 정규 포물선 근사 차수의 비국소적 경계 조건을 사용할 때 반사 오차는 포물선 지배 방정식의 차수와 상관없이 언제나  $O(\theta^2)$ 의 정밀도를 갖는다. 한방향 Helmholtz 근사 차수의 경계 조건에 대해서는 지배 방정식의 차수에 따라 반사 오차는  $O(\theta^{4m})$ 의 정밀도를 갖고, 1차 Pad 포물선 근사 차수의 경계 조건에 대해서는 지배 방정식의 차수와 상관없이 언제나  $O(\theta^4)$ 의 정밀도를 갖는다. 지배 방정식과 경계 조건의 근사 차수가 같은 경우는 반사 오차는 0이 된다. 셋째, 전달 모드에서 최대 반사 오차는 접지각이 90도일 때 발생하며 그 크기는 10.21이내이다. 지배 방정식과 경계 조건의 근사 차수의 불일치가 작을수록 최대 반사 오차는 작아진다. 넷째, 높은 근사 차수의 지배 방정식과 낮은 근사 차수의 경계 조건의 경우 반사 오차는 언제나 음의 값을 가지며 반대의 경우는 언제나 양의 값을 가진다. 다섯째, 근사 차수의 불일치에서 발생하는 반사는 역전 원리를 만족하지 않는다.

본 논문은 식 (2)-(4)의 비국소적 경계 조건의 오차 추정을 위한 해석적인 방법을 제공하고 사용 한계를 제시했다는데 의의가 있다. 이 연구는 차후 수치 산란 모델에 응용될 것이다.

## 감사의 글

이 연구는 서울대학교 해양시스템공학연구소의 연구 과제 지원으로 이루어졌습니다.

## 참고 문헌

1. D. Givoli, *Numerical Methods for Problems in Infinite Domains* (Elsevier, Amsterdam, 1992).
2. F. B. Jensen et al., *Computational Ocean Acoustics* (AIP press, New York, 1993).
3. D. Mikhlin, "Exact discrete non-local boundary conditions for high-order Padé parabolic equations," *J. Acoust. Soc. Am.* **116** (5), 2864-2875, 2004.
4. J. S. Papadakis, "Impedance formulation of the bottom boundary conditions for the parabolic model in underwater acoustics," NORDA Technical note 143, NORDA, Stennis Space Center, MS (1982).
5. J. S. Papadakis et al., "A new method for a realistic treatment of the sea bottom in the parabolic approximation," *J. Acoust. Soc. Am.* **92** (4), 2030-2038, 1992.
6. S. W. Marcus, "A generalized impedance method for application of the parabolic approximation to underwater acoustics," *J. Acoust. Soc. Am.* **90** (1), 391-398, 1991.
7. J. S. Papadakis, "Exact, non-reflecting boundary condition for parabolic approximation in the underwater acoustics," *J. Comput. Acoust.* **2** (1), 83-98, 1994.
8. G. H. Brooke and D. J. Thomson, "Non-local boundary conditions for high-order parabolic equation algorithms," *Wave Motion* **31**, 117-129, 2000.
9. M. Levy, *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* (IEE, London, 2000).
10. D. Yevick and D. J. Thomson, "Non-local boundary conditions for finite difference parabolic equation algorithms," *J. Acoust. Soc. Am.* **106** (1), 143-150, 1999.
11. G. H. Brooke et al., *PECAN: A Canadian Parabolic Equation Model for Underwater Sound Propagation* (2000).
12. A. Z. Hyaric, "Wide angle non-local boundary conditions for the parabolic wave equation," *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **49** (6), 916-922, 2001.
13. 김태현, 해양 음파 전달 해석의 포물선 근사 해법에 대한 보고, 서울대학교 조선해양공학과 학사 학위 논문, 2000.
14. S. T. McDaniel, "Propagation of normal mode in the parabolic approximation," *J. Acoust. Soc. Am.* **57** (2), 307-311, 1975.
15. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics Part I*, (Mcgraw-Hill, New York, 1953), page 411.
16. The Mathworks, Inc., *Symbolic math toolbox user's guide* (2006).
17. H. A. Koenig, *Modern Computational Methods* (Taylor & Francis, Philadelphia, 1999).

---

## 저자 약력

---

- 이근화 (Keunhwa Lee)

한국음향학회지 제25권 1E호 참조

- 성우제 (Woojae Seong)

한국음향학회지 제23권 8호 참조