

배관망에서의 파이프 직경 최적설계에 대한 실용적 해법

최창용[†], 고상철
 전주대학교 기계자동차공학과

A Practical Approach for Optimal Design of Pipe Diameters in Pipe Network

Chang-Yong Choi[†], Sang-Cheol Ko

Department of Mechanical and Automotive Engineering, Jeonju University, Jeonju 560-759, Korea

(Received September 23, 2005; revision received June 26, 2006)

ABSTRACT: An optimizer has been applied for the optimal design of pipe diameters in the pipe flow network problems. Pipe network flow analysis, which is developed separately, is performed within the interface for the optimization algorithm. A pipe network is chosen for the test, and optimizer GenOpt is applied with Nelder-Mead-O'Niell's simplex algorithm after solving the network flow problem by the Newton-Raphson method. As a result, optimally designed pipe diameters are successfully obtained which minimize the total design cost. Design cost of pipe flow network can be considered as the sum of pipe installation cost and pump operation cost. In this study, a practical and efficient solution method for the pipe network optimization is presented. Test system is solved for the demonstration of the present optimization technique.

Key words: Pipe network(배관망), Optimizer(최적화 도구), Optimization algorithm(최적화 알고리즘), Flow analysis(유동해석), Design cost(설계비용)

기 호 설 명

D : 파이프 직경 [m], 또는 함수 F 의 Jacobian
 H : 압력수두 [m]
 h : 손실수두 [m]
 L : 파이프 길이 [m]
 p : 압력 [kPa]
 Q : 유량 [m^3/s]
 QJ : 각 노드에서의 소요유량 [m^3/s]

상첨자

a : 설치비용 계산식의 계수
 m : 반복계산 횟수
 n : 유량 수두손실 관계식의 계수

하첨자

i : 노드번호
 j : 파이프번호

1. 서 론

배관망의 파이프 최적화 문제를 풀기 위해서 서로 다른 수식을 사용하는 많은 방법이 개발되어 왔으며,⁽¹⁾ 이들은 기본적으로 두 가지 접근방

[†] Corresponding author

Tel.: +82-63-220-2615; fax: +82-63-220-2056

E-mail address: cychoi@jj.ac.kr

법으로 분류될 수 있다. 첫번째 접근법은 비선형 수리학 구속조건과 비선형 비용함수를 최적화 도구에 통합시켜서 최적설계를 수행하는 것이고,⁽²⁻⁵⁾ 다른 두번째는 각각 별도의 최적화 도구(optimizer)와 배관망의 해석도구(solver)를 연계시켜서 최적해가 얻어질 때까지 해석과정과 최적화 과정을 반복 수행하는 방법이다.⁽⁶⁾

첫번째의 통합적 접근방법은 엔지니어가 실제 비용함수의 그래디언트(gradient)를 쉽게 구할 수 없는 복잡한 최적설계문제를 해결하는 데 있어서 별도의 해석프로그램 사용에 어려움이 있다. 반면에 해석과 최적화 과정을 각각 분리해서 적용할 수 있는 두번째 접근법은 알고리즘과 프로그램의 개발이 용이하고, 이들 해석과 최적화 과정의 적절한 연계방법이 제시된다면 배관망의 최적설계과정을 일반화시킬 수 있는 장점을 갖게 된다. 특히 과거에 비하여 엄청나게 빠른 컴퓨터 계산능력을 쉽게 이용할 수 있고 해석도구 및 최적화 도구로서 각각 이용 가능하고 신뢰성이 입증된 소프트웨어를 선택적으로 사용할 수 있기 때문에 공학적으로 매우 실용적인 최적설계방법으로 생각된다.

본 연구에서는 배관망의 비용을 최소화하는 최적의 파이프 직경을 결정하기 위해서 배관망의 유동해석을 GenOpt 최적화 프로그램⁽⁷⁾과 연계하여 반복 수행함으로써 최적해를 구하는 방법을 제시한다. 유동해석에서는 배관망 각 루프에서의 에너지방정식과 각 노드에서의 연속방정식이 모두 고려되고, 유량과 수두손실 관계식이 추가적으로 적용되는 요소해법이 채택되었다.⁽⁸⁾ 또한 유도된 선형과 비선형의 대수연립방정식의 해를 구하기 위해서 잘 알려진 Newton-Raphson법이 적용되었으며, 최종적으로 GenOpt를 사용한 최적설계과정이 테스트문제를 통해서 검증되었다.

2. 지배방정식

배관망의 최적설계에 대한 수학적 모델은 설계 변수로서 파이프 직경이 선정되면, 목적함수는 배관망의 설치비용과 펌프운전비용의 총합으로 이루어질 수 있다. 이때 파이프 직경은 어떠한 크기도 가능한 연속적인 값으로 가정한다.

목적함수의 구속조건은 각 파이프 직경 D 에 대한 가능한 범위와 배관망의 각 노드에서 요구되

는 압력 p 의 최소값으로서 아래와 같이 표시된다.

$$D_{\min} \leq D_j \leq D_{\max}, \quad j = \text{파이프번호} \quad (1)$$

$$p_i \geq p_{\min}, \quad i = \text{노드번호} \quad (2)$$

이때 식(2)의 종속변수에 대한 구속조건은 penalty 함수방법⁽⁹⁾을 통해 수정된 다음의 목적함수로서 통합 적용되어 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} COST_{total} = & \sum_j (a + bD_j^2)L_j + \sum_{j \in \text{pump}} cQ_j H_j \\ & + \omega_n \frac{1}{2} \sum_j \max[0, (p_{\min} - p_j)]^2 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $COST_{total}$ 은 총 설계비용을 의미한다. 그리고 첫번째 항은 네트워크 설치비용을 나타내며 이는 파이프 직경 D 의 α 지수승과 파이프 길이 L 과의 곱에 대한 함수로서 표시될 수 있다.^(2,3) 두번째 항은 펌프의 운전비용이고 이는 펌프가 설치된 파이프에서의 유량 Q 와 수두 H (펌핑수두)의 곱에 비례한다.⁽¹⁾ 한편 아래첨자 j 는 파이프 번호이고 a, b, c 는 계수를 표시하는 상수들이다. 또한 ω 는 $\omega_{n+1} = \omega_n$ 의 관계를 가지는 가중함수를 의미한다. 따라서 결국 우리는 식(2)의 구속조건을 만족하고 목적함수 식(3)을 최소화하는 최적화 문제를 설계변수 D 로서 풀어야 한다.

한편 위 최적화 과정에서 파이프 직경에 따른 유량과 압력분포해가 필요하고, 이를 위해서 별도의 배관망 유동해석이 수행된다. 유동해석의 지배방정식은 아래와 같은 연속방정식과 에너지손실방정식으로 각각 표시될 수 있다.

연속방정식

$$\sum a_{ij} Q_j = Q_i, \quad a_{ij} \in \{-1, +1\} \quad (4)$$

에너지손실방정식

$$\sum b_{ij} h_j = 0, \quad b_{ij} \in \{-1, +1\} \quad (5)$$

식(4)에서 i 는 노드번호, j 는 파이프번호, Q_j 는 j 번 파이프를 흐르는 유량, Q_i 는 i 번 노드에서 사용되는 소모유량을 각각 의미한다. j 번 파이프에서 i 번 노드로 유입되는 유량일 때는 계수 $a_{ij} =$

+1이고 유출되는 유량일 때 $a_{ij} = -1$ 이며, 이들 유량의 총합은 소요유량과 평형을 이루어야 한다. 또한 식(5)에서 h_j 는 루프를 구성하는 j 번 파이프에서의 수두손실을 나타내며, 이때 i 는 배관망 내에서 중복되지 않는 루프의 번호를 표시한다. 각 파이프에서 루프의 방향과 유동방향이 동일한 경우는 계수가 $b_{ij} = +1$ 이고, 반대방향의 경우는 계수가 $b_{ij} = -1$ 이 된다.

또한 식(4)와 식(5)에서의 미지값을 각 파이프에서의 유량으로 표시하기 위해서는 아래와 같은 지수공식(exponential formula)으로 일반화될 수 있는 유량과 수두손실관계식을 도입한다.

$$h_j = K_j Q_j^n, \quad j = \text{파이프번호} \quad (6)$$

여기서 계수 K 와 n 은 Darcy-Weisbach 방정식을 적용하여 결정할 수 있다.⁽⁸⁾ 결국 식(5)의 에너지손실방정식은 식(6)의 관계를 대입하여 아래와 같이 표시될 수 있다.

$$\sum b_{ij}(K_j Q_j^n) = 0, \quad b_{ij} \in \{-1, +1\} \quad (7)$$

따라서 식(4)와 식(7)은 각 파이프 j 에서 유량 Q_j 를 구하기 위해 함께 풀어야 하는 비선형 대수방정식 시스템을 구성한다. 이때 배관망에서의 펌프, 밸브, 저장조 등의 수송요소들에 대한 모델링은 펌프의 $Q-H$ 특성곡선을 근사한 이차함수식, 밸브의 손실수두 K_L 을 도입한 손실수두식, 저장조의 수두 H 등을 통해서 이루어질 수 있다.⁽⁸⁾ 결과적인 압력분포는 저장조수두, 펌프수두, 각 파이프에서의 손실수두, 노드의 설치높이(elevation) 등으로부터 산술적으로 계산된 각 노드에서의 압력수두로부터 압력=비중량×압력수두 식으로서 계산된다.

3. 최적설계 해법

본 연구에서 제시하는 배관망 최적설계 해법은 각각 별도로 개발된 파이프 유동해석 프로그램과 최적화 프로그램을 연계 적용시켜서 배관망 설치비용을 최소화하는 파이프 직경 최적해를 구하는 것이다. 먼저 주어진 파이프 네트워크의 배치에 대해서 구속조건 범위 내에 있는 각 파이프의 초기 직경을 가정하고 유동해석을 수행하며, 해석

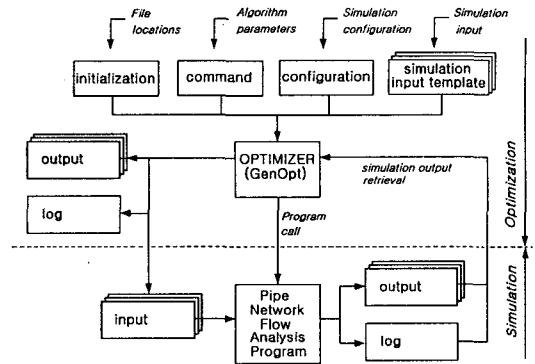


Fig. 1 Interface between the analysis program and the optimizer GenOpt.

프로그램을 통해서 각 파이프의 유량, 압력, 수두 등의 해가 얻어진다. 따라서 총 설계비용의 목적함수값이 계산되며 이때 최적화 알고리즘에 근거하여 새로운 파이프 직경이 선정되고 다시 해석 과정을 거쳐서 새로운 목적함수값을 계산한다. 이 전체과정은 최소의 목적함수값으로 수렴될 때까지 반복되며, 결과적으로 최적의 파이프 직경 설계값을 얻는다. Fig. 1은 최적설계 해법과정을 보여준다.

최적화 도구로서 GenOpt를 사용한 본 논문에서는 패턴탐색방법⁽⁹⁾ 중에서 O'Neill에 의해 확장된 Nelder와 Mead의 Simplex 최적화 알고리즘⁽⁷⁾을 적용하였다. GenOpt는 해석 프로그램에 의해 계산되는 비용함수의 최소화를 위한 최적화 프로그램으로서 미국의 Lawrence Berkeley National Laboratory에서 개발되었으며, 입력과 출력을 기록하는 모든 해석 프로그램과 결합되어 사용 가능하다. 최적화를 수행하기 위해 GenOpt 알고리즘에서는 해석 프로그램의 입력값 생성 및 해석 프로그램을 수행시켜서 얻는 결과와 최적화 함수를 통해 프로그램 반복실행을 위한 새로운 입력 변수를 결정하며, 이 과정이 함수의 최소값이 얻어질 때까지 반복된다.

한편 배관망의 유동해석을 위해서는 비선형연립대수방정식을 이루는 식(4)와 식(7)를 동시에 풀어야 한다. 본 연구에서는 비선형방정식에 대한 해법으로서 가장 일반적으로 사용될 수 있는 Newton-Raphson법을 적용하였다.⁽¹⁰⁾ Fig. 2는 유동해석 프로그램의 알고리즘을 나타낸다. 또한 상관관계식들을 적용한 유동해석 결과들은 참고문

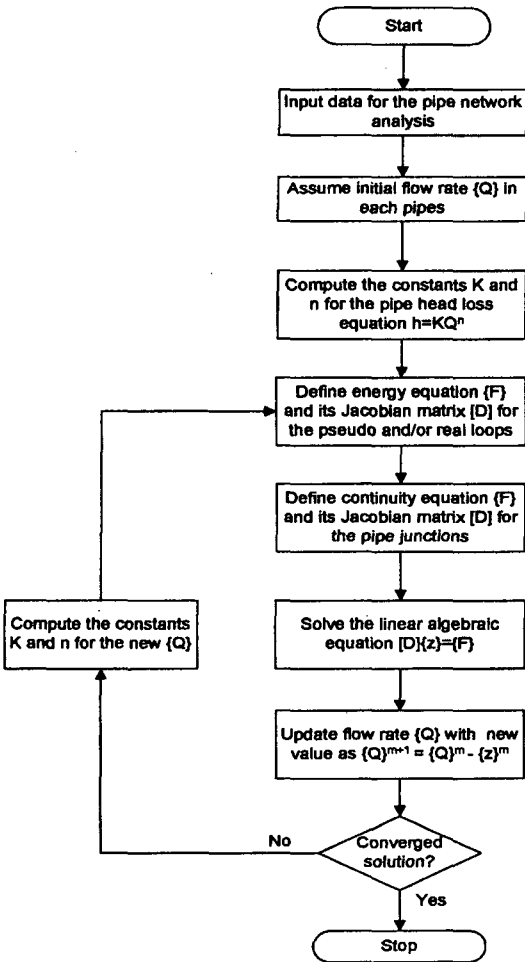


Fig. 2 Pipe network flow analysis algorithm.

현⁽¹¹⁾에서 제시된 데이터들을 통해 검증되었다. 전체 방정식시스템 식(4)와 식(7)은

$$F_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_j) = 0 \quad (8)$$

로서 표현될 수 있고, 여기서의 함수 {F}는 초기 가정되는 임의의 해(initial solution) $(Q_1^0, Q_2^0, \dots, Q_j^0)$ 를 중심으로 Taylor 급수 전개하여 선형항(linear term)만을 보존하면 다음과 같이 정리될 수 있다.

$$\{F\}^{(m)} + [D] \cdot (\{Q\}^{(m+1)} - \{Q\}^{(m)}) \simeq 0 \quad (9)$$

여기서 위첨자 m 은 반복계산 횟수를 나타내며,

행렬 [D]는 함수 {F}에 대한 Jacobian을 표시한다.

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial Q_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_j}{\partial Q_1} & \frac{\partial F_j}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial F_j}{\partial Q_j} \end{bmatrix} \quad (10)$$

한편 $\{Q\}^{(m+1)} - \{Q\}^{(m)} = -\{z\}$ 라 두면 식(9)는 선형대수방정식

$$[D]\{z\} = \{F\} \quad (11)$$

로 정리되며 이 식에서 {z}를 먼저 구한 후에는 아래 식을 이용하여 Q_j 를 반복 계산한다.

$$\{Q\}^{(m+1)} = \{Q\}^{(m)} - \{z\} \quad (12)$$

이때 수렴판정은 반복 계산된 해로서 각 노드의 유량 Q_j 가 식(8)을 만족해야 하는 기준을 적용하였으며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$|F_i(Q_1^{(m+1)}, Q_2^{(m+1)}, \dots, Q_j^{(m+1)})| = \epsilon \quad (13)$$

본 연구에서는 수렴기준값 ϵ 으로서 1.0×10^{-5} 를 사용하였다.

4. 최적설계 결과

본 연구에서는 Fig.3과 같이 8개 파이프, 5개 접합점, 2개 저장조, 2개 펌프, 3개의 부차적 손실장치(밸브 또는 유동미터), 그리고 3개 루프(2개 실제루프 및 1개 가상루프) 등으로 구성된 배관망을 테스트 예제로 선정하고, 제안된 최적설계방법에 따라서 파이프 직경에 대한 최적설계를 수행하였다. 식(3)의 목적함수에서 계수들은 편의에 따라 각각 $a=1.0, b=1.0, c=10.0, \alpha=1.5$, 그리고 최소압력은 1,500 kPa로 선택하였고, 파이프 직경의 가능한 범위는 식(1)의 구속조건에서 최소 0.15 m, 최대 0.5 m로 가정되었다. 이에 대한

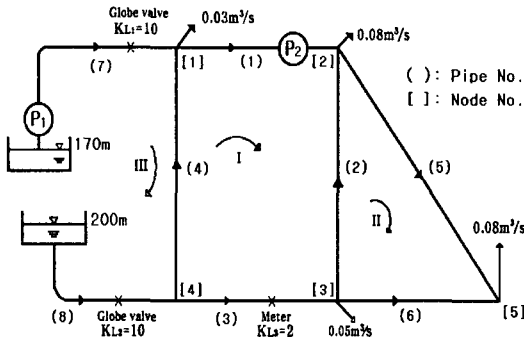


Fig. 3 Pipe network for test example.

최적설계 결과는 Table 1과 같이 주어질 수 있다. 여기서 파이프 길이, 조도, 그리고 노드에서의 소요유량(demand), 고도(elevation) 등은 주어지는 입력자료이고, 결과적인 파이프 직경은 최적화된 설계값이 된다. 각 파이프에서의 유량과 수두손실, 그리고 각 노드에서의 수두, 압력, 수력구배선(HGL) 등은 최적화된 파이프 직경에 대해서 해석을 통해 주어지는 결과에 해당하며, 파이프 네트워크 설계비용은 이들로부터 최종적으로 계산된 최소 비용값이 된다. 이때 주어진 조건 하에서 최적화된 펌프의 운전조건은 각각 펌프1: 유량 $Q=0.012537 \text{ m}^3/\text{s}$, 수두 $H=12.035 \text{ m}$, 펌프2: 유량 $Q=0.049581 \text{ m}^3/\text{s}$, 수두 $H=4.0461 \text{ m}$ 로서 얻어졌으며, 결과적인 펌프의 운전비용은

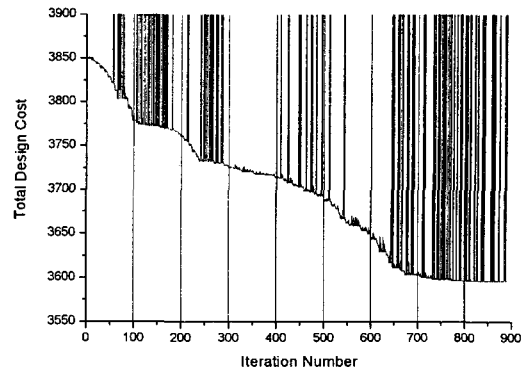


Fig. 4 Converging process of the total design cost.

3.51487로서 계산되었다.

본 예제는 Fig. 4와 같이 최적설계과정에서 총 892번의 반복해석을 통해 최소설계비용값 3596.292로 수렴되었다. 한편 Fig. 5는 GenOpt 프로그램 실행 중에서 각 파이프 직경의 수렴과정을 보여주며, 따라서 최소압력의 구속조건을 만족하는 최적설계 결과는 Table 2와 같이 정리될 수 있다. 이들은 본 연구에서 제시한 해석 프로그램과 최적화 도구를 연계시킨 최적설계 해법이 문제의 수학적 복잡성과 관계없이 배관망에서의 파이프 직경을 간단하고 효과적으로 최적설계할 수 있음을 보여주고 있다.

Table 1 Optimization results for the test example

| | Pipe No. | Nodes from to | Length (m) | Diameter (m) | Roughness (m) | Flow rate (m^3/s) | Head loss (m) |
|-----------|-----------|--------------------|----------------------------------|---------------|---------------|-------------------------------------|---------------|
| | Pipe data | 1 | 1 2 | 500 | 0.15061 | 0.0001 | 0.049581 |
| 2 | | 3 2 | 300 | 0.20324 | 0.0001 | 0.073655 | 6.8902 |
| 3 | | 4 3 | 500 | 0.23578 | 0.0001 | 0.160420 | 24.5070 |
| 4 | | 4 1 | 300 | 0.17547 | 0.0001 | 0.067044 | 12.1770 |
| 5 | | 2 5 | 600 | 0.18877 | 0.0001 | 0.043235 | 7.1584 |
| 6 | | 3 5 | 500 | 0.15006 | 0.0001 | 0.036764 | 14.0490 |
| 7 | | 0 1 | 300 | 0.15100 | 0.0001 | 0.012537 | 0.9931 |
| 8 | | 0 4 | 300 | 0.34630 | 0.0001 | 0.227460 | 4.0584 |
| Node data | Node No. | Pipe No. connected | Demand (m^3/s) | Elevation (m) | Head (m) | Pressure (kPa) | HGL (m) |
| | 1 | 1, 4, 7 | 0.03 | 0.0 | 180.79 | 1772.8 | 180.79 |
| | 2 | 1, 2, 5 | 0.08 | 0.0 | 160.20 | 1570.9 | 160.20 |
| | 3 | 2, 3, 6 | 0.05 | 0.0 | 167.09 | 1638.4 | 167.09 |
| | 4 | 3, 4, 8 | 0.00 | 0.0 | 192.97 | 1892.3 | 192.97 |
| | 5 | 5, 6 | 0.08 | 0.0 | 153.04 | 1500.7 | 153.04 |

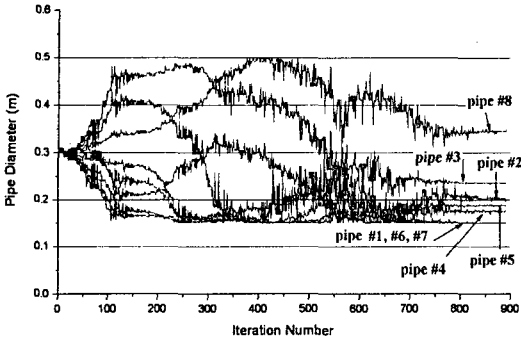


Fig. 5 Converging process of the pipe diameters.

Table 2 Optimum pipe diameters with pressures calculated at nodes

| Pipe No. | Pipe diameter | | | Node No. | Pressure (kPa) |
|----------|-------------------|-------------------|---------------|----------|----------------|
| | Initial value (m) | Optimum value (m) | Nominal value | | |
| 1 | 0.3 | 0.15061 | A150 | 1 | 1773 |
| 2 | 0.3 | 0.20324 | A200 | 2 | 1517 |
| 3 | 0.3 | 0.23578 | A250 | 3 | 1538 |
| 4 | 0.3 | 0.17547 | A200 | 4 | 1892 |
| 5 | 0.3 | 0.18877 | A200 | 5 | 1501 |
| 6 | 0.3 | 0.15006 | A150 | - | - |
| 7 | 0.3 | 0.15100 | A150 | - | - |
| 8 | 0.3 | 0.34630 | A150 | - | - |

5. 결 론

본 연구에서는 펌프, 밸브, 저장조 등을 포함하는 비압축성 유체 수송시스템에 대하여 배관망의 설계비용을 최소화하는 범용의 효과적이고 실용적인 파이프 직경 최적설계 해법을 제시한다. 최적해를 구하는 방법은 별도로 적용되는 배관망 유동해석을 GenOpt 최적화 프로그램과 연계하여 반복 수행함으로써 최적화 문제의 비선형에 따른 수학적 복잡성에 관계없이 적용될 수 있다. 선정된 배관망에 대해서 Newton-Raphson법을 사용한 유동해석이 수행되었고, 최적화 프로그램 GenOpt에서 O'Neill에 의해 확장된 Nelder와 Mead의 Simplex 최적화 알고리즘을 적용하여 수렴된 파이프 직경의 최적해를 구함으로써 배관망 최적설계가 이루어졌다.

참고문헌

1. Osadacz, A. J. and Gorecki, M., 1995, Optimization of pipe size for distribution gas network design, PSIG (Pipeline Simulation Interest Group), 27th Annual Meeting, October.
2. Fujiwara, O. and Khang, D. B., 1990, A two-phase decomposition method for optimal design of looped water distribution networks, Water Resources Research, Vol. 26, No. 4, pp. 539-549.
3. Eiger, G., Shamir, U. and Ben-Tal, A., 1994, Optimal design of water distribution networks, Water Resources Research, Vol. 30, No. 9, pp. 2637-2646.
4. Wolf, D. D. and Smeers, Y., 1996, Optimal dimensioning of pipe networks with application to gas transmission networks, Operations Research, Vol. 44, No. 4, pp. 596-608.
5. Castillo, L. and Gonzalez, A., 1998, Distribution network optimization: Finding the most economic solution by using genetic algorithms, Euro. J. of Operation Research, Vol. 108, pp. 527-537.
6. Lippai, I., Heaney, J. P. and Laguna, M., 1999, Robust water system design with commercial intelligent search optimizers, Journal of Computing in Civil Engineering, Vol. 13, July, pp. 135-143.
7. Wetter, M., 2004, GenOpt 2.0.0-Generic Optimization Program, LBNL-54199.
8. Larock, B. E., Jeppson, R. W. and Watters, G. Z., 2000, Hydraulics of Pipeline Systems, CRC Press LLC, New York.
9. Venkataraman, P., 2002, Applied Optimization with MATLAB Programming, Wiley-Interscience, New York.
10. Choi, C. Y., Ko, S. C., Cho, S. H. and Tae, C. S., 2004, Optimal design of pipe diameters in pipe network, Proceedings of the SAREK 2004 Summer Annual Conf., pp. 1041-1046.
11. Jeppson, R. W., 1976, Analysis of Flow in Pipe Networks, Ann Arbor Science, Ann Arbor Michigan.