대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 2, 157-177. May 2006

4학년 아동의 비와 비례 개념 분석

이 종 욱*

비와 비례 개념은 독립적으로 발달하는 것이 아니다. 오히려 이런 개념은 곱셈적 개념 장의 일부분으로 서로 관련을 가지면서 발달하게 된다. 곱셈적 개념 장에는 곱셈, 나눗셈, 분수, 비, 유리수와 같은 개념을 포함한다. 본 연구에서는 이런 개념의 발달 과정이 어떻게 시작하는가를 알아보기 위한 목적으로, 한 초등학교 4학년 아동을 대상으로 비례추론 과제를 해결하는 실험 수업을 실행하였다. 연구를 통해 이 아동이 비형식적 전략을 전개하면서 어떤 도전에 직면하였는지 그리고 비와 비례 개념을 전개하면서 어떤 수학적 지식이 유용하였는지를 분석할 수 있었다. 이러한 연구 결과는 비와 비례 개념의 발달은 곱셈적 개념 장의 발달과 깊은 관계가 있다는 기존의 입장을 지지하는 것으로 나타났다.

Ⅰ. 도 입

Piaget와 Inhelder(1975)에 따르면, 비례추론은 두 비 사이의 동치관계를 포함하는 2차적 관계이다. "사탕 5개에 400원이다"라는 말을 통해 금액의 양과 그 금액으로 살 수 있는 사탕의 양 사이의 비를 알 수 있지만, 400원에서 1200원으로 금액이 증가하면서 살 수 있는 사탕의 수에 어떠한 변화가 일어나는가를 이해하기 위해서는 비례추론이 필요하다.

초등학교에서 다루는 비례추론은 중학교와 고등학교에서 배우게 될 수학의 주요한 기초가 된다. "옥수수가 한 바구니에 3자루씩 있다. 4 바구니에 있는 옥수수는 모두 몇 자루인가?"라는 문제는 초등학교 저학년에서 곱셈과제를 단위-비율의 형태로 제시한 비와 비례의 특별한 유형이며, "남학생은 빵 4개를 6명이 똑같이 나누어 먹고, 여학생은 빵 6개를 8명이 똑같이 나누어 먹었다. 남학생과 여학생 중 누가 더 많은 빵을 먹었다고 할 수 있는가?"라는 문제는 초등학교 고학년에서 동치분수와 분수의 크기 비교를 포함하는 비와 비례 상황으로 생각할 수 있다. 두 번째 문제를 해결하면서, 어떤 학생은 그림을 그려서 남학생과 여학생 각각은 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$의 빵을 가지게 된다는 사실을 알아낸 다음 두 분수의 크기를 그림으로 비교하거나 통분하여 비교할 것이다. 또 다른 학생은 비례추론을 사용할 수도 있다. "남학생은 빵 2개를 3명이 나누어 먹게 되는 것과 같기 때문에, 남학생에게 빵 2개를 더 주면 남학생은 빵 6개를 9명이 먹게 되고, 여학생은 빵 6개를 8명이 먹게 되기 때문에, 여학생이 더 많이 먹게 된다"라는 추론을 할 수 있을 것이다. 이런 추론 과정에서 나타나는 구조적 유사성을 인식하고 곱셈적 비교를 할 수 있는 능력은 대수학과 고등수학에서 아주 중요한 위치에 있다

* 개포초등학교, jongeuk@chol.com

(Confrey & Smith, 1995).

학교 수학에서 차지하는 중요성으로 인하여 비와 비례에 대한 학생의 개념은 오랫동안 수학교육 연구의 초점이 되었다. 학생이 수립하는 전략과 수행에 영향을 주는 과제변인뿐만 아니라(Harel, Behr, Post, & Lesh, 1991; Kaput & West, 1994), 비와 비례 문제를 해결하면서 가지는 학생의 오류와 어려움에 대해 많은 것을 알 수 있었다(Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Hart, 1984). 학생의 사고에 대한 연구에서 그들은 종종 곱셈적 추론이 필요한 문제를 덧셈적 추론을 사용하여 해결하는 것으로 나타났으며(Noelting, 1980; Hart, 1981, 1988; Karplus, Pulos, & Stage, 1983; Vergnaud, 1988; Lamon, 1993; Resnick & Singer, 1993), 청소년과 성년들이 분수나 비와 비례에 대한 기본 개념을 이해하는 데 어려움을 가지는 것으로 나타났다(Noelting, 1980; Vergnaud, 1988; Hart, 1988; Kaput & West, 1994).

학생들이 가지는 이런 어려움의 근원과 비와 비례 개념을 발달하는 데 유용한 수학적 지식과 관련하여, Vergnaud(1988)는 곱셈적 개념 장(multiplicative conceptual field)이라는 용어를 사용하여 간단하거나 복잡한 비례 문제로 분석할 수 있는 모든 상황을 설명하고자 하였다. Vergnaud는 이 상황에 곱셈, 나눗셈, 분수, 비, 비례, 그리고 일차함수와 같은 수학적 개념을 포함시키면서, 이런 개념들은 각각 별개로 발달하는 것이 아니라 오랜 기간을 거치면서 서로 연결되어 여러 상황 가운데서 발달하게 된다고 하였다. 따라서 학생의 비와 비례 개념에 대한 연구는 또한 학생의 곱셈적 개념 장의 부분이 되는 다른 개념들을 고려할 필요가 있다.

본 연구에서는 곱셈적 개념 장의 부분들을 살펴보는 시도의 결과를 보여주고 있다. 초등학교 4학년 학생인 경수[1]를 대상으로 2주간에 걸쳐 진행된 6시간의 수업으로부터 얻은 자료에 기초하여 결과를 분석하였다. 이 실험 수업의 목적은 학생 자신이 어떻게 전략을 조직하고 실행하며, 또한 이런 전략을 발달시키는 것이 어떻게 곱셈적 개념 장의 다른 개념의 발달에 영향을 주는가를 기록하는 것에 있다. 이를 위해 구체적으로 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

1. 경수는 자신의 비형식적 전략을 전개하면서 어떤 도전에 직면하는가?
2. 비와 비례 개념을 전개하면서 경수에게 어떤 수학적 지식이 유용한가?

비록 더 깊은 논의가 진행되어야 하겠지만 비와 비례에 대한 이와 같은 분석은 비례에 대한 우리의 관념에 새로운 도전을 가할 것이며, 앞으로의 연구에 더 많은 연구문제를 제공할 것으로 본다.

II. 이론적 고찰

1. 구성전략(build-up strategy)

아동들은 비례 문제를 해결하는 방법을 형식적으로 학습하기(예를 들면, 분자와 분모를 교차하여 곱하는 방법 또는 내항과 외항의 곱을 같게 하는 방법) 훨씬 전에 비형식적 전략으로 많은 비례 문제를 해결할 수 있다. 저학년 아동 중에는 덧셈 지식을 사용하여 구성전략을 사용하는 아동들이 많다. "구슬이 1개에 200원

1) 본 연구에서 '경수'는 가명을 사용하였음

한다면, 구슬 2개는 얼마인가?"라는 문제에서 구체물을 사용할 수 있게 하면 아동들은 200원을 2번 놓고서 그 합이 400임을 알게 된다.

2. 비-단위 구성전략(ratio-unit/build-up method)

"300원당 7개다. 그래서 15개는 5, (곱하기) 7, 35"와 같이 표현한 것처럼 아동들은 300원을 새로운 단위로 설정한다. 구성전략에서 1개의 구슬이 자연수의 단위였다면 "300원당"은 또 다른 단위를 형성하여 사용될 수 있기 때문에 여기서 연구자는 '비-단위[2)]'라는 용어를 사용한다. 이러한 비-단위 구성전략은 두 가지 이점이 있다. 첫째, 그것은 아동이 좀 더 편하게 사용하지 못하는 분수로 계산하는 방법을 피할 수 있거나 또는 분수 계산을 대체할 수 있다. 둘째, 비-단위 구성전략은 비례식에서 미지항을 해결할 수 있는 잠재성을 가지고 있다.

비-단위 구성전략은 비례 개념에서 중요한 요소인 공평성의 문제를 포함하고 있다. 28개의 사탕을 동전 12개에 공평하게 분배하면서 동전 3개에 사탕 7개를 대응시키며 이 과정에서 사탕 28개에 대한 동전 12개의 관계는 사탕 7개에 대한 동전 3개의 관계가 있음을 암묵적으로 인정하게된다. 이 관계는 사탕의 어떤 부분집합과 동전의 어떤 부분집합의 관계에 계속적으로 적용되는 개념으로 공평성을 특징짓고 있다. 따라서 동전이 15개가 될 때 12개보다 3개 더 많기 때문에 사탕 28개에 7개를 더하여 35개 또는 동전 3개가 5묶음이기 때문에 7곱하기 5는 35를 얻을 수 있다.

공평성의 문제를 포함하지 않을 때 아동들은 곱셈적 추론보다는 덧셈적 추론을 사용하게 된다. 예를 들면 "2달러로 5장의 카드를 살 수 있다. 6달러로는 몇 장의 카드를 살 수 있겠는가?"라는 문제에서 덧셈적 추론을 하는 아동은 2달러에서 6달러로 4달러가 더 많기 때문에 5+4를 하여 9장의 카드를 살 수 있다고 추론하게 된다. 덧셈적 추론을 종종 사용하지만 이것이 학습에 큰 장애가 되지는 않는다. 덧셈적 추론의 단계는 모든 아동이 반드시 거쳐야 하는 불변의 발달단계로 보이지 않고, 오히려 수업에 영향을 받는다(Karplus, Karplus, Formisano, & Paulsen, 1979).

3. 곱셈적 개념 장(multiplicative conceptual field)

개념 장에 대해 Vergnaud(1988)는 몇 가지 다른 특성을 가지는 개념들의 숙달을 요구하는 일단의 상황으로 정의하였다. 예를 들어, 곱셈적 구조에서 개념 장은 간단하거나 복잡한 비례 문제로 해석될 수 있는 모든 상황으로 이루어져 있으며 곱하거나 나누는 연산이 필요하다. "장난감 자동차 4개를 사고싶은데 자동차 1개에 5달러라고 하면 얼마가 필요한가?"라는 문제에 ①5+5+5+5=20, ②4×5=20, ③5×4=20, ④4+4+4+4+4=20이라는 절차를 제시하였다. 각각의 절차는 5×4 또는 4×5의 곱셈을 포함한다. 그러나 이런 선택을 끌어낸 수학적 관계는 매우 다르다. ③의 절차는 장난감 자동차 4개의 가격은 1개 가격의 4배인 비용이 든다는 사고과정을 포함한다. 이것은 일차함수의 특성을 나타내며 다음 문제와 연결된다. "케이크 6개를 5달러에 살 수 있다. 24개의 케이크를 사려면 얼마가 필요한가?"를 ⑤5×4=20으로 해결한 사고에는 24개의 케이크는 6개의 4배이기 때문

2) 비-단위와 단위-비율은 다른 개념이다. 비-단위가 새로운 단위로서 비의 기본 단위가 된다면 단위-비율은 기준량을 1로 했을 때 비교하는 양의 값을 비로 나타내는 것이다.

에 전체 케이크의 값(6개×4)= 5달러×4로 나타내게 된다. 여기서 사용한 절차는 일반적으로 자연수 n에 대하여 $f(n \cdot x)=n \cdot f(x)$로 나타낼 수 있다. 절차 ③은 절차 ①과 깊은 관계를 가진다. 4개의 장난감 자동차의 가격=1대의 장난감 자동차 가격+1대의 장난감 자동차 가격+1대의 장난감 자동차 가격+1대의 장난감 자동차 가격이 되며, $f(1+1+1+1)=f(1)+f(1)+f(1)+f(1)$로 형식적으로 표현할 수 있다. 그러나 절차 ②와 ④는 비록 곱셈의 가환성으로 수학적으로는 동치이지만 장난감 자동차와 가격이라는 용어와는 어떤 의미를 가지지 못하여 개념적으로는 같지 않다.

아동들은 분수와 비를 먼저 연산이나 양으로 이해한다. "3명의 아이가 12개의 사탕을 나누어 먹는다"에서 먼저 연산으로서 12를 3으로 나누어 1명이 먹는 몫으로 4개를 생각할 수 있고, 4개씩 3묶음으로 보고 1묶음은 전체 3묶음 중 1묶음으로 양으로서의 분수 $\frac{1}{3}$을 표현할 수 있다. 그리고 이 관계는 공평성의 문제로 다시 해석하여 3명의 아이가 12개를 먹는 것과 1명이 4개를 먹는 것은 공정하다. 즉 비례식 3:12=1:4로 표현할 수 있다.

분수와 비는 다른 의미를 가진다. 분수는 같은 성질의 두 양과 관련되지만 비는 다른 성질의 대상도 비교할 수 있다. 500원에 대한 연필 3자루의 비, 즉 $\frac{3\text{자루}}{500\text{원}}$은 분수가 아니다. "2시간에 50Km를 갔다면 같은 빠르기로 6시간 동안 얼마나 가겠는가?"라는 문제를 해결하기 위해서는 같은 성질의 두 양의 크기를 비교하는 스칼라 연산자를 생각하는 방법과 서로 다른 차원의 일차함수의 계수를 조작하는 함수 연산자를 생각할 수 있다.

이와 같이 곱셈적 개념 장에는 비형식적 전략으로서 구성전략과 비-단위 구성전략이 포함되며 자연수, 분수, 비, 곱셈, 나눗셈, 일차함수와 같은 수학적 개념이 서로 관련된다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

경수는 초등학교 4학년이며 연구 당시 10년 1개월이었다. 경수의 교실에서 이루어지는 수학 수업은 전형적인 교사의 설명식 수업이었으며, 자신의 전략을 설명하고 자신의 논리를 정당화하는 활동이 부족하였다.

방과후에는 학원에서 진행하는 수학 수업을 받았는데 실험을 시작하기 약 보름 전에 경수의 부모는 학원 수강을 그만두고 집에서 개인 과외를 시켰다. 실험 기간 경수는 겨울방학을 보내고 있었으며 5학년에서 배우게 될 수학 교과서로 사전 학습을 하고 있었다.

경수가 이미 배운 4학년 수학 교과서의 내용은 곱하고 나누는 수가 두 자리 수인 곱셈과 나눗셈, 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 소수의 덧셈과 뺄셈, 초단위까지 시간의 덧셈과 뺄셈, 1g, 1kg 단위의 무게의 덧셈과 뺄셈을 포함하였다. 그리고 경수가 겨울방학 동안 예습한 5학년 수학 내용은 배수와 약수, 약분과 통분, 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈을 포함하였다.

2. 자료 수집

본 연구에서는 관찰, 문서 수집의 방법으로 자료를 수집하였다. 연구자는 경수에게 문제가 될 것 같으며 현재의 수학적 지식을 발전시킬 잠재성을 가지는 과제를 개발하였으며, 과제를 해결하면서 경수가 가지는 사고의 과정을 관찰

하였다. 실험을 하면서 경수에게 자신이 생각하는 방법이 어떤 것인지 말이나 글 또는 그림으로 설명할 것을 계속적으로 요구하였으며 이런 대화를 녹화한 비디오 자료를 통해 관찰 자료를 수집하였다. 그리고 문제에 대해 경수가 글이나 그림으로 표현한 학습지를 통해 문서 자료를 수집하였다.

3. 자료 분석

각 수업은 평균적으로 30분에서 40분씩 진행하였다. 수업을 마친 그 날 바로 예비분석을 하여 다음 수업을 위한 과제를 개발하였다. 예비분석을 통해 다음 과제의 내용과 분석 관점을 정할 수 있었다.

비디오 자료를 전사하여 각 에피소드에서 이루어진 대화를 분석하였다. 문제를 어떻게 해석하고, 자신의 해결전략을 어떻게 실행하며, 비와 비례 과제를 해결하면서 곱셈적 개념 장의 내용과 어떻게 관련짓는가를 분석하였다.

4. 실험에 대한 개관

본 실험을 시작하기 이전에 예비 실험을 통해 경수가 비례추론 과제를 어떻게 해결하는가를 알아보았다. 2006년 1월 16일 "100원짜리 동전 12개로 사탕을 28개 샀다면, 동전 15개로는 몇 개의 사탕을 살 수 있겠는가?"라는 과제를 제시하였다. 100원짜리 동전 12개와 수모형(낱개 모형) 28개를 주고서 과제를 해결하도록 하였다. 처음에 경수는 28개의 사탕(낱개 모형)을 12개의 동전에 3개씩 나누어주다 모자라자 2개씩 나누어주었다. 12개의 동전 각각에 2개씩 나누어주고도 나머지가 4개 생긴다는 사실을 알고서, 이번에는 4개씩 사탕을 묶어 각 동전에 배분하였다. 계속하여 시행착오를 하였으나 어느 것도 만족스럽지 못하다는 사실을 발견하였다.

계속되는 몇 번의 시도 끝에, 경수는 하나의 동전에 사탕을 똑같이 나누어주는 것이 어렵다는 사실을 발견하고, 2개의 동전에 5개의 사탕을 모으기 시작했다. 2개의 동전에 6개, 4개, 2개의 경우를 모두 놓아보고, 3개의 동전에 5개, 6개를 놓았다.

처음에 사탕 28개를 2개, 3개씩 묶었던 것을 이번에는 동전을 2개, 3개씩 묶어보더니, 나중에는 동전과 사탕을 각각 몇 개씩 묶어 묶음의 수가 같은 경우를 찾고자 하였다. 결국에는 100원짜리 동전 3개로 7개의 사탕을 살 수 있기 때문에, 15개의 동전으로는 동전 3개가 5묶음이기 때문에 7 곱하기 5를 계산해서 35개의 사탕을 살 수 있다는 것을 알게 되었다.

경수는 예비 실험에서 구체물을 사용하여 비-단위 구성전략을 세울 수 있었다. 그러나 물리적 대상이 수학적 사고를 방해할 수 있다는 생각으로 본 실험에서는 구체물을 치웠다.

과제1: 백원짜리 동전 2개로 색종이 6장을 샀다. 그렇다면 백원짜리 동전 8개로 색종이 몇 장을 살 수 있겠는가?

과제2: 백원짜리 동전 4개로 6장의 카드를 샀다. 그렇다면 백원짜리 동전 10개로 몇 장의 카드를 살 수 있겠는가?

과제3: 백원짜리 동전 12개로 8개의 사탕을 샀다. 그렇다면 백원짜리 동전 9개로는 몇 개의 사탕을 살 수 있겠는가?

첫 실험은 쉬운 비례추론 과제부터 시작하였다. 과제1, 2, 3에서는 단위-비율 전략이나 비-단위 전략을 어떻게 사용하는가를 알아보고자 하였다. 과제1은 단위-비율과 비-단위 전략이 모두 가능한 과제이다. 과제2와 과제3은 비-단

위 전략을 사용할 경우 과제2는 4:6=10:x로 우항의 수가 좌항보다 증가하는 경우이고 과제3은 12:8=9:x로 우항의 수가 좌항보다 감소하는 경우이다. 그리고 과제2와 과제3은 단위-비율 전략을 사용할 경수 분수로 표현해야 하는 과제이기 때문에 경수가 분수를 사용하여 비를 표현하는가를 알아보고자 하였다.

과제1에서 연구자는 경수가 단위-비율 전략을 사용할 것으로 기대했지만 경수는 함수 연산자를 사용하여 계산하였다. 과제2와 과제3을 해결하면서 경수는 비-단위 전략을 사용하였으며 단위-비율 전략을 사용하지 않았다. 경수는 분수 표현을 하지 않았는데 이것은 제시한 자료가 모두 이산량이기 때문에 그런 결과가 나온 것이 아닌가 추측하였다.

과제4: A모둠은 여학생 3명이 케이크 2개를 나누어 먹었고, B모둠은 남학생 4명이 케이크 3개를 나누어 먹었다. 어느 모둠의 학생이 더 많은 케이크를 먹었다고 할 수 있나?

과제5: 피자 3판을 사는데 천원짜리 지폐 12개를 주었다. 천원짜리 지폐 20개를 주면 피자 몇 판을 살 수 있겠는가?

과제6: 12명의 학생이 16개의 케이크를 똑같이 나누어 가진다면, 3명의 학생은 얼마만큼의 케이크를 가지겠는가?

두 번째 실험에서 과제4, 5, 6은 연속량을 사용하였을 때 단위-비율 구성전략을 사용하는가와 분수나 소수로 표현하는가를 알아보고자 하였다. 과제4에서는 비의 값을 어떻게 표현하며 두 비의 값을 비교하기 위해 어떤 방법을 사용하는가를, 과제5에서는 3:12=x:20의 비례식에서 미지항이 우항의 전항이 될 경우 과제를 어떻게 해결하는가를, 그리고 과제6에서는 약수와 배수 개념이 어떻게 비례추론과 연결되는지, 과제에 제시한 수 12와 3 사이에 있는 곱셈관계를 어떻게 해석하는가를 알아보고자 하였다.

과제7: 마술을 부리는 마귀 할멈은 집을 크게 할 수도 있고 작게 할 수도 있다. 어느 날, 높이가 24cm이고 대문의 높이가 18cm인 집을, 마술을 부려서 높이가 12cm인 집으로 줄어들었다. 줄어든 집의 대문 높이는 몇 cm일까?

과제8: 12명의 학생이 16개의 빵을 가진다면, 15명의 학생은 몇 개의 빵을 가져야 하겠는가?

과제9: 3명이 6개의 빵을 먹는다면, 5명은 몇 개의 빵을 먹겠는가?

세 번째 실험에서는 수들 사이에 존재하는 곱셈 관계를 어떻게 해석하는가를 알아보고자 하였다. 그리고 과제4, 5, 6에서 연속량을 사용하였을 때 경수는 단위-비율 전략을 사용하였는데, 비-단위 전략을 사용하면 어떤 수학적 개념이 연결되며 경수가 계속해서 주장하는 공약수의 사용이 비례추론에 어떻게 연결되는가를 알아보았다.

과제11. 물고기A는 18cm이고 물고기B는 12cm이다. 만일 물고기B가 매일 60개의 먹이를 먹는다면, 물고기A는 몇 개의 먹이를 먹겠는가?

네 번째 실험에서는 과제10으로 마술약 문제인 과제7을 한번 더 해결해보라고 하였으며, 과제11에서는 물고기의 길이를 상징하는 2개의 선을 통해 선형적 관계를 어떻게 해석하는가를 알아보고자 하였다. 이 과제에서 물고기의 길이는 연속량이지만 먹이는 이산량이다.

과제12: 승용차가 10분에 15km를 달린다면, 1시간 20분 동안에는 몇 km를 달리겠는가?

과제13: 가로가 12cm이고 세로가 8cm인 직사각형에는 가로가 3cm이고 세로가 2cm인 직사각형이 반복되지 않으면서 몇 개나 들어갈 수 있겠는가?

과제14: 12÷3으로 해결되는 문제를 만들어 보아라.

다섯 번째 실험은 경수가 비례추론 과제를 해결하기 위해 필요한 배경지식을 얼마나 알고 있는가를 탐구하고자 하였다. 곱셈과 나눗셈과 같은 그런 수 구조에 대해 어떻게 이해하고 있는가를 알아보았는데 이 지식은 경수가 비례추론을 학습하면서 비-단위 구성전략을 체계적으로 규명하는 전략을 개발하는데 필수적이었다.

Ⅳ. 결 과

1. 비형식적 전략에 대한 분석

<에피소드1(1월 17일)>

경수가 자신의 행위에 대한 수학적 의미에 초점을 두도록 하기 위해, 예비 실험에서 사용한 구체물을 치웠다. 구체물을 사용하지 않게 되면서 경수는 자신의 행위에 대한 목적을 반성할 수 있게 되었다. 시행착오도 더욱 조직적으로 변하였으며 동전의 수와 사탕의 수 사이에 일정하게 유지되는 비를 발견하려고 하였다.

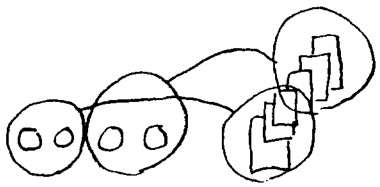
과제1: 백원짜리 동전 2개로 색종이 6장을 샀다. 그렇다면 백원짜리 동전 8개로는 색종이 몇 장을 살 수 있겠는가?

과제1에서 연구자는 경수가 동전 2개로 6장의 색종이를 계속 4번 반복하여 그린 다음, 색종이의 개수를 세어 답을 구할 것으로 예상했다. 그러나 경수는 연구자의 예상과는 달리 문제를 아주 간단하게 해결하였다. "이걸(색종이) 6장을 샀다면 이거(동전 2개)에 3을 곱하면 6이잖아요. 곱하면 되잖아요. 그러니까 3, (곱하기) 8, 24" 경수는 서로 다른 종류의 양을 비교하면서 연산자 '×3'을 함수의 계수로 사용하여 계산하면서 두 양 사이의 관계를 곱셈으로 보고 있었다. 경수가 함수 연산자 측면에서 생각한 과제1과는 달리 다음 과제2는 함수 연산자를 사용하기가 쉽지 않은 문제였다.

과제2: 백원짜리 동전 4개로 6장의 카드를 샀다. 그렇다면 백원짜리 동전 10개로 몇 장의 카드를 살 수 있겠는가?

계산하는 방법을 빨리 답한 과제1과는 달리 과제2에서 경수는 구체물을 사용하지 말라고 하자 먼저 그림을 그렸다(그림Ⅳ-1). 그림을 바르게 그릴 수 있다는 것은 문제의 상황을 이해하고 있다는 것을 말한다. 원 4개를 그리고 카드 6장을 그린 다음 원 2개와 카드 3장을 연결한 후, 경수는 "2개에 3개니까 10개는 30개"라고 말하였다. 비-단위로 '동전2개에 3장의 카드'를 발견하였으나, 동전 10개에 대해서 사탕 30개로 잘못된 답을 말하였다. 연구자가 "2개에 3장이니까 10개는?"이라며 다시 질문하자 잠시 생각한 뒤 자신의 답이 잘못되었다는 것을 인식하였다. 비-단위를 발견한 다음부터 경수는 "200원당 3개니까 이걸 200원에 사고, 그 다음에 또 200원을 사고, 그러니까 이걸(3장) 5번 사는 것이 되지!"라고 말하면서 전형적인 구성전략을 사용하여 동전 10개에 카드 15장이 대응된다는 것을 알 수 있었다. 과제1에서 함

수 연산자 측면에서 미지의 값을 구한 것이 경수의 전략이라면 과제2에서도 함수 연산자를 사용할 수 있었다. 그러나 과제2에서 연산자는 '$\frac{3}{2}$'이 되어야 하나 경수는 일차함수의 계수가 분수가 되는 함수 연산자를 사용하지 않았다. 결국 경수는 분수 연산자를 회피하였던 것이다.



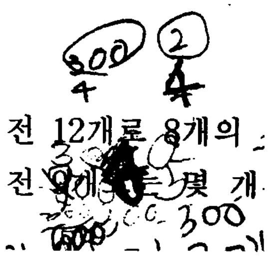
[그림Ⅳ-1]

과제3: 백원짜리 동전 12개로 8개의 사탕을 샀다. 그렇다면 백원짜리 동전 9개로는 몇 개의 사탕을 살 수 있겠는가?

과제3에서는 과제2에서 경수가 그림을 그리면서 비-단위 구성전략을 형성하였던 것을 참고하여 그림을 그리지 않고 머릿속으로 계산하면 어떤 일이 벌어지는가를 알아보고자 하였다. 그림을 그리지 않고 설명하라고 했을 때 경수는 더 많은 수학적 개념을 회상하였다. 다음의 대화를 살펴보자.

경수: 100원짜리 3개로 2개를 산다.
교사: 왜 그런데?
경수: 12는요, 3으로 나누면 4개잖아요?
교사: 응
경수: 그러면 300원이 4개잖아요. 이거(8개)는 또 2로 나누면 되잖아요? 아! 아니다. 4로!

위 대화에서 경수는 동전 12개와 사탕 8개를 각각 4묶음으로 만들었다. 이 과정에서 경수는 공약수의 필요성을 인식했다. 동전과 사탕에 각각 같은 묶음을 발견하기 위해 그 두 수 사이에 존재하는 공약수를 구하면 된다는 것을 알았다. 그러나 이 개념은 5학년에서 배우게 될 수학 내용이었다. 경수는 실험을 시작하기 1주일 전쯤 5학년 내용을 예습하면서 약수와 배수를 배웠다. 완전하지는 않지만 공약수의 존재를 인식하는 표현을 하였다. 그림Ⅳ-2는 경수가 과제2를 해결하면서 나타낸 표현이다. 여기서 경수는 동전 12개와 8개의 사탕 위에 각각 '300'과 '2'를 나타내었다. 이것은 비-단위를 나타내는 것이었으며 300과 2 아래에 적은 4는 12와 8의 공약수 4를 나타내는 것이다. 비록 경수가 '공약수'라는 표현과 '4묶음'이라는 표현을 직접적으로 사용하지는 않았지만 이런 표현에 대한 개념이 발달하고 있음을 알 수 있다.



[그림Ⅳ-2]

경수는 비-단위 구성 전략에서 새로운 방법을 사용하였다. "그렇다면 300원에 2개 산다고 했는데 9개로는?"하고 연구자가 동전 9개로 살 수 있는 사탕의 개수를 물었을 때 보통의 경우 비-단위를 더하여 결과를 얻을 것 같았는데 경수는 "아! 900에서 300을 빼잖아요. 그 대신 사탕 2개를 얻지요. 그리고 600원이 남잖아요. 600원에서 300원을 또 빼면 300원이 남잖아요. 그 대신 (사탕) 4개를 얻잖아요. 또 남은 300원을 또 사잖아요. 그러면 6이잖아요."라고 말하면서 900에서 300원에 해당하는 양을 사탕 2개씩 교환하면서 결과를 구했다.

과제2와 과제3을 해결하면서 경수는 계속하

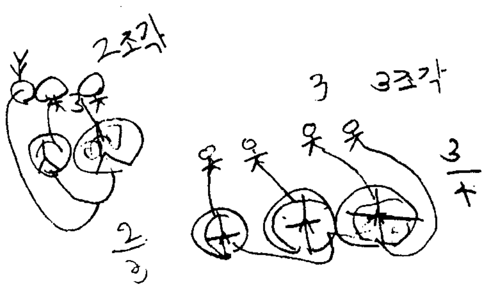
여 비-단위 구성전략을 사용하여 문제를 해결하였다. 그러나 단위-비율 구성전략, 즉 동전 1개에 해당하는 양을 구해서 미지의 값을 구하는 방법은 사용하지 않았음을 알 수 있다. 이것은 앞의 과제1에서 연산자가 자연수였을 때 함수 연산자 측면에서 과제를 해결하였으나 연산자가 분수가 되는 과제2에서는 이 방법을 회피하였다는 사실과 같은 맥락에서 해석할 수 있다. 과제2와 과제3은 단위-비율이 분수가 되는 어려움이 있기 때문에 사용을 회피했을 가능성이 있다.

<에피소드2(1월 18일)>

에피소드1에서 경수는 단위-비율 구성전략을 사용하지 않았다. 구성전략의 가장 기초가 되는 전략으로 생각했지만 정작 경수는 비-단위 구성전략을 사용하였다. 이것은 제시한 과제의 영향을 많이 받은 것으로 추측하였다. 에피소드1에서 제시한 과제는 모두 이산량을 사용하였으며, 과제1을 제외하면 단위-비율을 구하기 위해서는 분수 계산이 필요했다. 과제4는 다음과 같이 연속량을 사용하는 상황을 제시하였다. 상황이 바뀌자 경수의 반응은 여러 가지 점에서 변화가 일어났다.

과제4: A모둠은 여학생 3명이 케이크 2개를 나누어 먹었고, B모둠은 남학생 4명이 케이크 3개를 나누어 먹었다. 어느 모둠의 학생이 더 많은 케이크를 먹었다고 할 수 있나?

처음에 경수는 여학생과 남학생 각 1명이 먹는 양을 비교하지 않고 "여학생은 2개를 먹고, 남학생은 3개를 먹었으니까"라며 여학생 전체와 남학생 전체가 먹는 양을 비교하였다. 그러나 연구자가 한 명이 먹는 양을 비교하라고 했을 때, 경수는 그림Ⅳ-3과 같이 원으로 케이크를 나타내고 사람을 그렸다.



[그림Ⅳ-3]

남학생이 먹는 양을 각각 4등분해서 남학생 한 명이 먹는 양을 '3조각'이라고 표현하였다. 이것은 지금까지는 표현하지 않았던 분수 표현을 나타내고 있다. 그리고 분수 표현을 나타내는 동시에 단위-비율을 표현한 것이다. 연구자는 경수가 '3조각'과 '2조각'으로 말하면서 3조각인 남학생이 더 많이 먹는다고 말을 하여, 남학생의 조각수가 많기 때문에 남학생이 더 많이 먹는 것으로 경수가 이해하고 있다고 생각했다. 그러나 경수가 의미하는 그 조각 수는 서로 다른 분모를 가지는 분수에서 분자를 나타낸다는 것을 다음의 대화를 통해 알 수 있었다.

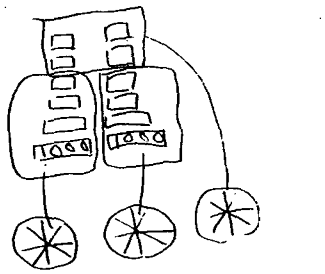
교사: 그러면 한 명이 먹었던 것을 분수로 나타낼 수 있나?
경수: $\frac{3}{4}$
교사: 여학생은?
경수: $\frac{2}{3}$, 3하고 4하고 틀리잖아요.
교사: 응?
경수: 통분해야 하잖아요
교사: 아, 이거는 $\frac{3}{4}$이고 이거는 $\frac{2}{3}$네. 그런데 아까는 2조각이고 3조각이었는데…
경수: 어느 게 큰지를 알려면 통분해야지요.
교사: 이거는 3조각이라서 큰 게 아니고?
경수: 그래. 그러니까 통분해야지요, 그래야 알지!
경수: 이거는 4분의 이거는 작은 조각이고 (3분

의) 이거는 큰 조각이잖아요.

상황이 연속량으로 달라지면서 단위-비율의 개념을 나타내었으며 그림을 통해 나눗셈 상황을 제시하였다. 비례 추론을 이해하기 위해 나눗셈을 분할의 상황으로 설명하였으며, 분수의 의미로는 몫의 의미를 표현하였다. 또한 중요한 수학적 개념으로 이 대화에서는 통분이라는 용어를 사용하였다. 4학년 교육과정에는 제시되어 있지 않지만 5-가 단계의 내용에는 약수, 배수와 함께 통분을 학습하게 되는데 경수는 이 상황에서 통분을 사용하여 서로 다른 비(3:4와 2:3)를 비교하고자 하였다. 실험 수업을 할 당시 경수는 5학년 수학을 사전 학습하면서 분수를 통분하는 방법을 배우고 있었다.

과제5: 피자 3판을 사는데 천원짜리 지폐 12개를 주었다. 천원짜리 지폐 20개를 주면 피자 몇 판을 살 수 있겠는가?

과제4가 단위-비율을 어떻게 표현하는가를 알아보는 과제라면, 과제5에서는 경수가 과연 비-단위와 단위-비율에서 어떤 전략을 더 선호하는가를 알아보고자 하였다. 처음에 경수는 그림([그림Ⅳ-4])을 그리면서 단위-비율 전략으로 피자 1판과 천원짜리 4장을 짝지었다.



[그림Ⅳ-4]

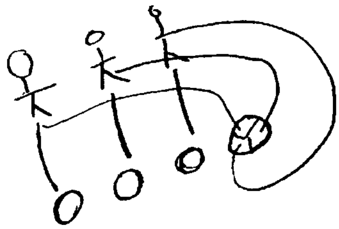
단위-비율(4:1)을 구한 다음 "4곱하기 5가 20이니까 5개"라고 말하면서 미지의 결과를 알기 위해 단위-비율에 어떤 수를 곱해서 이미 나와 있는 수 20을 만들었다. 경수는 과제4와 마찬가지로 연속량을 사용한 과제5에서 단위-비율 전략을 사용하였으며, 이 전략을 사용하여 문제를 해결하면서 곱셈 연산이 함께 사용되고 있음을 알 수 있다.

과제6: 12명의 학생이 16개의 케이크를 똑같이 나누어 가진다면, 3명의 학생은 얼마만큼의 케이크를 가지겠는가?

에피소드1에서 경수는 과제3을 해결하면서 공약수의 필요성을 언급하였다. 따라서 과제6에서는 5학년에서 배우게 되는 약수와 배수 개념이 어떻게 비례 추론과 연결되는가를 알아보고자 하였다. 또한 분수 개념을 더 깊이 연구하기 위해 과제에 사용하는 수를 변형하였다. 12명과 3명 사이의 분수 관계를 이해하고 있는가를 알아보고자 하였다.

몇 번의 시행착오 끝에 경수는 1명이 가지는 케이크의 양을 구하였다. 이것은 앞의 과제4와 과제5에서 해결한 전략에 영향을 받았던 것 같다. 그러나 1명이 가지는 양을 구하면서 경수는 분수의 의미를 표현하였다. 12명이 각자 1개씩 케이크를 먼저 가지고 남아있는 4개의 케이크를 다시 12명이 나누어 가지기 위해 4개의 케이크를 각각 3등분하여 모두 12등분을 만들었다. 그 중 1조각, 즉 $\frac{1}{3}$을 각자 가진다는 것을 알게 되었다. 그런 다음 3명이 가지는 양에 대해 "얘들이 처음에 하나씩 가지잖아요. 그러니까 얘가 하나 들고 오고, 얘 하나 들고 오고, 얘 하나 들고 오고, 또 얘가 3조각 난 거 1개를 가져오고, 얘가 이렇게 ($\frac{1}{3}$을) 가져오고, 얘가 이렇게 ($\frac{1}{3}$을) 가져오면, 모두 해서 4개가 되지

요"라고 설명했다([그림Ⅳ-5]).



[그림Ⅳ-5]

여기서 경수는 공약수나 곱셈을 사용하여 문제를 해결하지 않았다. 즉 단위-비율로 접근하는 전략을 사용할 때 분수의 의미를 표현하였지만 공약수의 필요성은 제기하지 않았다. 그러나 비-단위 전략에서는 공약수의 필요성을 언급하였다는 것을 생각하면, 사용하는 전략에 따라 포함되는 수학적 개념이 달라짐을 알 수 있다.

경수는 과제1과 달리 12명과 3명의 관계를 스칼라 연산자 '$\times \frac{1}{4}$'나 '÷4'를 사용하지 않았다. 이것은 경수가 연산자로서 분수를 사용하는 것과 나눗셈을 하는 것에 익숙하지 않아 심리적으로 이 방법을 사용하는 것을 회피하는 것으로 해석할 수 있다.

에피소드1과 에피소드2에서 각각 이산량과 연속량으로 과제를 제시하여 공교롭게도 사용한 전략이 서로 구분되었다. 연구자는 자료의 속성뿐만 아니라 과제에서 제시한 수가 증가하거나 감소하는 것에 영향을 받을 수 있다는 의심을 하게 되었다. 따라서 에피소드3에서는 과제에 제시하는 수를 증가와 감소의 상황으로 구분하였다.

<에피소드3(1월 20일)>

과제7: 마술을 부리는 마귀 할멈은 집을 크게 할 수도 있고 작게 할 수도 있다. 어느 날, 높이가 24cm이고 대문의 높이가 18cm인 집을, 마술을 부려서 높이가 12cm인 집으로 줄어들었다. 줄어든 집의 대문 높이는 몇 cm일까?

과제에서 제시한 양이 감소되는 경우이다. 경수는 문제를 보고 곧바로 "알겠다. 2(18에서 2를 나누어), 9"라고 답하면서 곱셈 관계로 해석하였다. 스칼라 연산자로서 '÷2'를 사용한 것이다. 비록 24:18=12:x라는 비례식을 사용하지는 않았지만 좌항과 우항을 비교하면 우항의 전항은 좌항 전항에 '$\times \frac{1}{2}$', 또는 '÷2'를 하여 구한다는 사실을 발견한 것이다.

경수에게 다시 설명해 보라고 했을 때 "이게(집그림의 높이)요 이렇게 (대문이) 붙어있잖아요. 그러면 (집의 높이가) 줄어들면 이것(대문)도 줄어들잖아요. 그러면 2배로 줄어들었잖아요. 그러니까 이것도 2배로 줄어들면 9잖아요"라고 하였다. 경수는 축소되기 전의 높이와 축소된 후의 높이 사이에 곱셈 관계가 있음을 이해하고 있었으며 집의 높이와 대문의 높이가 같은 비율로 축소되어야 한다는 것을 알고 있었다.

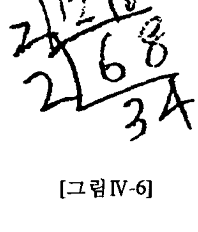
곱셈 관계를 제대로 파악하고 있는가를 다시 확인하기 위해 제시한 수를 바꾸었다. 줄어든 집의 높이를 16으로 바꾸었을 때 경수는 공약수를 사용할 것을 제안했다. 그러나 공약수가 정확하게 어떻게 사용되는가에 대해서 구체적으로 설명할 수 없었다. 집의 높이인 24와 16의 최대공약수 '8'과 최대공약수 8로 나누어지는 두수 '3과 2'가 어떤 의미를 가지는가를 이해한다는 것은 비례 추론 전체를 이해하는 것과 같은 뜻이기 때문에, 연구자는 경수에게 이런 의미를 찾도록 도전을 주고 싶었다.

과제8: 12명의 학생이 16개의 빵을 가진다면, 15명의 학생은 몇 개의 빵을 가져야 하겠는가?

과제8은 제시한 수가 증가하는 경우이다. 과제7에서 경수는 공약수의 필요성을 언급하였다. 그래서 연구자는 공약수가 어떻게 비례 추론과 연결되는가를 탐구하고 싶었다. 경수는 처음에 15명이 16개의 빵을 나누는 상황으로 이해하고 있었다. 에피소드2에서 나타난 바와 같이 경수는 연속량으로 제시된 문제에서 단위-비율 전략을 선호하였다. 연구자는 문제의 표현이 어느 정도 이런 오해를 불러일으키고 있다는 것을 알아차리고 문제의 원래 뜻을 경수에게 설명하였다. 참고로 문제해결의 과제 변인을 다루는 것은 본 연구의 목적을 벗어나는 것이기 때문에 이에 대해서는 상세하게 논하지 않는다. 그러나 문제의 진술에 수정이 필요한 것을 인정하면서 다음과 같이 문제를 수정하였다.

수정한 과제: 동전 12개로 16개의 사탕을 샀다면, 동전 15개로는 몇 개의 사탕을 사겠는가?

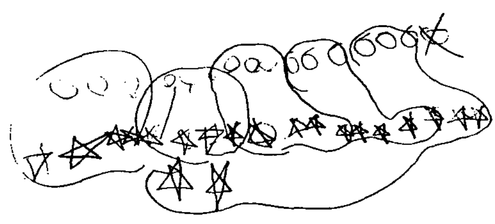
이산량을 사용하는 문제로 수정하자 경수의 해결 전략은 금방 달라졌다. 경수는 약수와 배수, 최대공약수와 최소공배수를 개인 과외를 통해 막 배우고 있었다. 그래서 그런지 경수는 이 문제를 최대공약수로 해결하고자 하는 의지가 강했다. 문제를 보더니 공약수를 구해야 한다면서 최대공약수를 구하는 알고리즘을 적었다([그림Ⅳ-6])



[그림Ⅳ-6]

12와 16의 최대공약수를 구해서 이 최대공약수 4와 이것의 곱 3, 4를 어떻게 해석하는가는 사실 연구자에게도 처음에는 쉽지 않은 문제였다. 여기서 최대공약수 4는 묶음의 수, 즉 3, 4가 '비-단위'로서 작용한다면 최대공약수 4는 각 양의 같은 묶음을 의미하는 것이다. 그리고 3과 4는 비-단위로 3명당 4개의 사탕을 의미한다. 이러한 실제적인 상황적 의미를 경수는 계속하여 연산의 의미로 설명하였다. "얘(15명)는 5로 곱하면 3이고 20으로 하면은 4"에서 5는 역시 묶음의 수가 5가 된다는 것을 나타내지만 경수는 최대공약수로서 5를 인식하였으며 역시 3과 4는 15와 20을 최대공약수 5로 나누는 두 수로 인식하여 문제를 계산하였다. 경수는 15명이 될 때 20개의 사탕을 가져야 한다는 것을 계산을 통해 알 수 있었다. 그러나 이것은 상황과 연결되지 않았으며 비-단위 구성 전략과 의미 있게 연결되지 않았다. 그래서 연구자는 비-단위 구성전략과 연결짓기 위해 다시 질문하였다.

"3, 4 이거는 뭘 나타내겠노?"라는 연구자의 질문에 경수는 자신 없는 목소리로 "3명이 4개?"라고 하였다. 이것이 뭘 말하는지 그림으로 나타내도록 했을 때 경수는 [그림Ⅳ-7]에서 맨 왼쪽 묶음을 제외한 그림을 그렸다. 여기서 원은 사람을, 별은 사탕을 나타내었다. 경수의 이전 그림과 비교해보면 그림이 더욱 단순화되었다는 것을 알 수 있다.

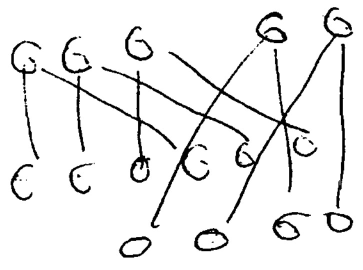


[그림Ⅳ-7]

계속하여 연구자는 15명이면 어떻게 되는가를 물었다. 경수는 3명을 더 그려야 한다면서 [그림Ⅳ-7]의 맨 왼쪽 묶음을 추가하여 그림 전체를 완성하였다. 경수는 3명과 4개의 사탕을 묶으면서 재그룹(regrouping)을 성공시킬 수 있었다. 그리고 12명에서 15명으로 인원이 늘어나면서 비-단위 구성전략으로 '3명에 사탕 4개'를 원래의 그림에 더하여 20개의 별을 구할 수 있었다. 결국 최대공약수를 통해 구한 값 3, 4를 비-단위 구성전략과 연결시키는데 성공한 것이다.

과제9: 3명이 6개의 빵을 먹는다면, 5명은 몇 개의 빵을 먹겠는가?

과제9를 보자마자 경수는 곧바로 10이라고 답하였다. 즉 함수 연산자를 사용하여 3곱하기 2는 6이기 때문에 5곱하기 2는 10이라는 것이다. 그림을 그려보라고 했을 때 다음 그림과 같이 설명하였다([그림Ⅳ-8]).

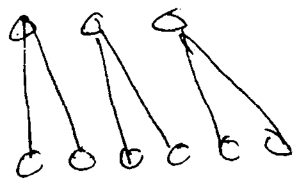


[그림Ⅳ-8]

머릿속으로는 함수 연산자를 사용하였고 그림은 단위-비율 전략으로 설명한 것 같다. 그러나 그림을 자세히 보면 경수는 함수 연산자로 구한 10을 그림으로 설명하면서 정확한 단위-비율 '1명당 2개의 빵'을 구해서 구성전략을 사용한 것이 아니다. 먼저 빵 6개를 3명에 연결시키고 그런 다음 4개의 빵을 2명에 연결시켰다. 그리고 과제8과 같이 경수는 이 문제도 공약수로 구할 수 있다고 하였다. 다음의 대화를 살펴보자.

경수: 아씨 계속 햇갈린다. (과제9를 가리키며) 이것도 공약수로 구하면 되지
교사: 한번 구해봐라
경수: (최대공약수 구하는 알고리즘을 적는다) 3으로 하면 1, 2
교사: 그게 뭘 뜻하는데
경수: 얘(3명)는 3으로 1을 곱했고, 얘(6개)는 3으로 2를 곱했다.
교사: 그러면 얘(5명)는?
경수: 얘는 자기로 1을 곱했다. 그리고 얘(몇 개)는 10은 5로 2를 곱했다.

경수는 계속해서 공약수와의 관계에 집착하고 있었다. 두 수 1과 2가 비-단위가 된다는 상황을 이해하기보다는 1과 2가 공약수와 어떤 관계를 가지는가에 집착하고 있었다. 연구자는 계속적인 탐구의 기회를 제공하였다. 과제8에서 계속되는 최대공약수와 최대공약수로 나눈 서로소인 두 수가 무엇을 의미하는가를 경수가 더 자세히 알도록 계속 질문하였다. 3명이 6개의 빵을 가질 때 최대공약수 3을 구했는데 3은 뭘 말하는가를 질문했다. 경수는 한참 동안 대답이 없었다. 그래서 그림을 다시 그려보라고 하였다. 처음에는 그림Ⅳ-8과 같은 그림을 그렸다. 연구자는 경수에게 한 사람이 몇 개의 빵을 가지는가를 선으로 이어보라고 하고 이미 구한 최대공약수를 구하는 알고리즘과 비교하라고 하였다. 경수는 그림을 다시 그렸고([그림Ⅳ-9]) 한참을 생각하더니(약 15분) 알고리즘에서 구한 1과 2가 1명이 2개의 빵을 가진다는 것과 같음을 발견하였으며 최대공약수 3은 사람 수라는 것도 발견할 수 있었다.



[그림Ⅳ-9]

연구자는 경수가 과제8에 대해서도 단위-비율 전략으로 문제를 해결할 수 있도록 유도하였다[3]. 다음의 대화를 보자.

교사: 그러면 여기(과제8)는 한 명이 몇 개 먹는지 구할 수 있나?
경수: 한 명이 3개. 아니다. 3명이 4개.
교사: 그러면 한 명은?
경수: 한 명이(사람 3 빵 4을 그려서 연결한다)…, 한 명이 이렇게 $\frac{1}{3}$을 탁 먹는거다.
교사: 한 명이 $\frac{1}{3}$만?
경수: 1개하고 $\frac{1}{3}$
교사: 한 사람이 이만큼 먹으면 15명은 어떻게 해야 하지?
경수: 한 개 곱하기 $\frac{1}{3}$(1과 $\frac{1}{3}$을 다르게 표현했음)
교사: 15명인데?
경수: 아, 그러니까 15곱하기 1과 $\frac{1}{3}$

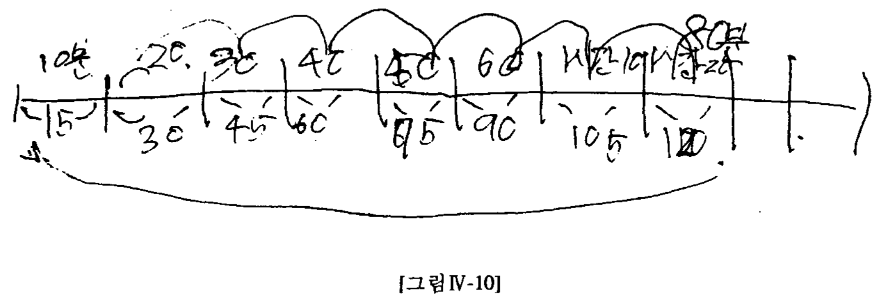
경수는 나눗셈의 분할 모델로 한 사람이 가지는 몫을 구하였으며, 이 몫은 대분수로 자연수와 분수의 합으로 표현하였다. 그리고 15명이 가지는 빵의 양을 구하면서 자연스럽게 자연수와 대분수의 곱셈 연산을 유도하였다. 분수의 곱셈은 경수가 아직 학습하지 않은 5학년 수학의 내용이었지만 경수는 이 실험이 끝난 그 다음 주에 과외 학습을 하면서 더 자세히 공부하였다.

<에피소드4(1월 27일)>

과제12: 승용차가 10분에 15km를 달린다면, 1시간 20분 동안에는 몇 km를 달리겠는가?

에피소드 4에서는 경수가 비례 추론 과제를 해결하기 위해 필요한 배경지식을 얼마나 알고 있는가를 탐구하고자 하였다. 과제12는 그 앞의 과제에서 계속해서 경수가 주장한 방법인 공약수로 해결할 수 있는 문제였다. 그러나 경수는 공약수를 사용하는 것은 전혀 관심이 없었으며 [그림Ⅳ-10]을 그리면서 다시 구성전략에 의존하였다. 구성전략이 경수에게는 편한 방법이었던 것이다.

경수는 "10분이 하나고, 두 개고, 세 개고, 네 개고, 다섯 개고, 6개고, 7개고, 8개고 이거



[그림Ⅳ-10]

2) 사실 여기서는 과제8의 원래 문제 상황, 즉 수정한 과제가 아닌 빵문제로 다시 돌아가서 설명하였다.

는 8개니까 곱해서"라고 설명하였으며, 1시간 20분이 80분이라는 사실을 인식하고 15를 8번 더한 값은 15 곱하기 8과 같다는 것을 알았다. 경수는 반복되는 덧셈은 곱셈이라는 곱셈의 상황을 분명히 알고 있었다.

과제13: 가로가 12cm이고 세로가 8cm인 직사각형에는 가로가 3cm이고 세로가 2cm인 직사각형이 반복되지 않으면서 몇 개나 들어갈 수 있겠는가?

경수는 과제13을 해결하는 그 주에 도형의 둘레와 넓이라는 5-가 단계의 내용을 배우고 있었다. 5-가 단계에서는 단위넓이로 1cm×1cm를 사용하였지만 이 문제는 단위 넓이가 3cm×2cm로 달랐다. 새로운 단위는 비-단위 구성전략의 확장으로 넓이 문제에 적용된 것이다. 경수는 곱셈과 나눗셈으로 이 문제를 해결할 수 있었다.

처음에 경수는 문제를 잘 이해하지 못했다. "이게 8이잖아요. 이게 2잖아요? 그러면 2가 이렇게 (8에) 4개가 채워지니까. 이것도 마찬가지로 4개, 3센티, 3센티, 3센티, 3센티해서 4!"라고 말했다. 작은 직사각형이 모두 몇 개 들어가는가를 가로, 세로 각각 따로 계산하였다. 즉 큰 직사각형 전체에 들어가는 작은 직사각형의 개수를 보지 않았던 것이다. 경수는 8을 2로 나누면 4라는 것과 3의 4배가 12라는 것에 기초하여 가로, 세로에 각각 4개씩 채운다고 하였다.

과제14: 12÷3으로 해결되는 문제를 만들어 보아라.

과제14에서는 나눗셈의 여러 가지 상황을 경수가 정확하게 알고 있는가를 탐구하였다. 경수는 아주 자연스럽게 나눗셈의 분할과 측정상황을 제시할 수 있었다. 경수가 제시한 상황은 다음과 같다.

"지구에서 외계행성으로 양말 12개를 보낸다. 그런데 외계인들은 다리가 3개다. 그러면 몇 짝을 주는가?"

"사탕을 누가 누구에게 사탕 12개를 줬는데 받은 사람이 또 나눠서 선물하려고 하는데 12개를 3개씩 포장해서 줄려고 하는데 몇 사람에게 줄 수 있는가?"

"3명이서 피자 12조각을 먹을려고 하는데 몇 개씩 먹으면 되는가?"

2. 비형식적 전략 개발 과정에서 직면한 도전에 관한 분석

위의 4 에피소드로부터 경수가 자신의 비형식적 전략을 개발하면서 어떤 도전에 직면했는가를 알 수 있다.

첫 번째 도전은 문제에 대한 이해이다. 경수가 처음에 맞이한 도전은 문제에 대한 바른 이해였다. 문장제로 제시된 과제를 대하면서 경수는 과제가 무엇을 질문하는가를 이해하는 데 어려움을 가졌다. 예비실험에서 경수가 문제를 이해하지 못하자 연구자는 말로써 문제 상황을 설명해 주었다. 본 실험에서 경수는 스스로 문제를 이해하여 해결 전략을 찾아야 했다. 과제4를 해결하면서 경수는 "어느 모둠의 학생이 더 많은 케이크를 먹었다고 할 수 있는가?"를 덧셈적 비교를 묻는 문제로 해석하였다. 문제에서 요구하는 것은 비례 관계로서 곱셈적 비교를 요구한다는 것을 이해할 필요가 있었다. 그러나 경수는 많은 과제를 해결하면서 자신이 해결하는 과제가 곱셈적 비교에 바탕을 두고 있는 비례 관계임을 알아차리게 되었다. 과제

11(1월 21일)에서 "물고기 A는 18cm이고 물고기 B는 12cm이다. 만일 물고기 B가 매일 60개의 먹이를 먹는다면 물고기 A는 몇 개의 먹이를 먹겠는가?"라고 했을 때, 경수는 "작으면 작게 먹나? 아닌데, 이상하다. 그러면 이 녀석(물고기A)이 먹는 것을 구하는 거죠?"라며 문제에 주어진 상황을 해석하면서 문제에서 구하고자 하는 것이 무엇인지를 탐구하게 되었다.

두 번째 도전은 자신의 행위로부터 거리를 두면서, 자신의 사고에 대해 반성하는 것이다. 예비실험에서 경수는 비-단위를 구하기 위해 많은 시행착오를 거쳤다. 시간도 많이 걸렸다. 구체물을 사용하여 동전의 묶음과 사탕의 묶음을 새로 정의하는 과정을 반복하였다. 이와 같은 시행착오의 과정을 거치면서 경수는 구체물을 사용하는 것에서 그림을 그리는 것으로 사고의 표현을 변경하였으며([그림Ⅳ-1]), 비-단위를 규명한 후 구성과정을 구축할 수 있었다. 비-단위를 구하기 위해, 즉 묶음을 만들기 위해 그림을 그리는 것에서 나아가 나눗셈을 통해 서로 같은 묶음의 수를 구하기 시작하고 공약수의 필요성을 느끼게 된다(과제3). 이러한 일련의 과정은 점진적으로 이루어지며 자신의 사고를 반성하면서 점차 고차원적인 수학 개념으로 발달하면서 도식이라고 표현할 수 있을 정도로 가깝게 되었다.

세 번째 도전은 나눗셈 상황에서 분할과 측정의 상황으로 이동하는 것이다. 경수는 나눗셈 상황에서 분할과 측정의 상황을 구별해서 어느 나눗셈이 유용한가를 결정해야 했다. 예비실험에서 경수는 처음에 자신이 원래 알고 있던 나눗셈 방식인 분할의 방법을 시도하였다. 분할의 방법은 단위-비율 구성전략과 연결되어 일반적인 구성전략의 시초가 된다. 그러나 분할 전략이 소용되지 않는다는 것을 점차적으로 인식하게 되면서 동전과 사탕을 몇 개의 묶음으로 나눌 필요성을 느꼈다. 이것은 나눗셈의 측정 상황과 연결되었고 또한 비-단위 구성 전략을 유도할 수 있었다. 비-단위 구성 전략을 구성하기 위해 경수는 서로 다른 양을 같은 집단으로 나눌 필요성을 느꼈으며 이것은 계속하여 경수에게 분할의 나눗셈보다는 측정의 나눗셈으로 해결하도록 도전을 가하였다. 예를 들면, 과제5에서 경수는 피자 3판을 사는데 천원짜리 12개를 준다는 것에서 피자 1판은 천원짜리 4개라는 사실을 유도하여 천원짜리가 20개면 1판에 4개가 필요하기 때문에 "5판이면 천원짜리 4개가 5번 곱해져서 20개의 천원짜리가 필요하다는 것"으로 이해하였다. 그러나 반대의 상황도 있다. 측정의 상황에서 분할의 상황으로 이동을 요구하는 도전이 있었다. 비-단위 구성 전략을 형성하기 위해 실제적으로 먼저 요구된 상황은 분할의 상황이다. 수정된 과제8에서 동전 12개와 사탕 16개를 같은 묶음으로 나누기 이전에 경수는 동전을 3개씩 이루어진 4묶음을 만들었다(측정). 그 다음은 이렇게 4묶음으로 나누어진 그룹에 똑같은 사탕을 나누어주는 활동이었다(분할). 결국 경수는 측정의 상황에서 분할의 상황으로 이동하는 도전이 필요했던 것이다.

네 번째 도전은 공약수와의 관계 규명이다. 비례 관계를 탐구하면서 경수는 공약수의 규명이 요구된다는 것을 느끼기 시작했다. 과제3에서 비-단위를 구하면서 12와 8을 똑같이 4로 나누었다. 과제8을 변형한 문제에서 경수는 12와 16 사이의 관계를 공약수로 해결하고자 하였다. 비록 이 공약수가 '같은 묶음'이라는 사실과 같다는 것을 연결하지는 못했지만 계속되는 과제9와 과제11에서 공약수로 문제를 해결하고자 하였다. 공약수 가운데서도 최대공약수를 구하여 최대공약수와 곱해지는 약수가 어떤 의미를 가지는가를 탐구하고자 하였다. 비록

시간이 오래 걸렸지만 경수는 계속적인 탐구로 최대공약수가 서로 다른 두 양에 함께 존재하는 '같은 묶음'이라는 것과 최대공약수로 나누어지는 서로소인 두 수는 더욱 간결한 비-단위가 된다는 것을 알 수 있었다.

3. 비와 비례 개념을 전개하는데 필요한 수학적 지식에 대한 분석

비와 비례 개념을 발달시키기 위해 경수에게는 여러 가지 수학적 지식이 필요하였다. 곱셈 상황, 나눗셈 상황, 나눗셈의 분수 표현, 분수의 의미에서 공평성의 개념, 약수와 배수, 통분, 변환기하에서 확대와 축소, 공약수와 공배수 구하는 알고리즘, 시간과 거리 개념, 분수의 덧셈과 뺄셈, 자연수와 분수의 곱셈, 단위 개념 등 다양하다.

곱셈적 추론을 요구하는 비례추론에서 곱셈에 대한 이해는 기본 사항이었다. 과제1에서 경수는 동전 2개와 색종이 6장 사이에 함수 연산자로 '×3'을 사용하였다. 과제9에서는 함수 연산자 '×2'를 사용하였다. 두 양 사이에 곱셈적 관계를 인식하면서 곱셈에 대한 이해가 필요했다. 뿐만 아니라 경수에게 있어서 곱셈은 동수누가의 개념도 포함할 것을 요구하였다. 과제2를 해결하면서 동전 2개에 3장의 카드를 살 수 있다는 비-단위를 구하여 "200원당 3개니까 이걸 200원에 사고, 그 다음에 또 200원을 사고, 그러니까 이게(3장) 5번 사는 것이 되지"는 동전 10개에 해당하는 양을 구할 때 구성 전략으로 사용한 것은 새로운 기본단위인 (동전)2:(카드)3을 동전10이 될 때까지 반복적으로 더하는 것이었다. 과제8을 해결하면서도 단위-비율을 구한 다음 최종적으로 15명을 구하기 위해서 원래의 12명에 3명을 더하는 과정을 보여주었다.

나눗셈에 대한 지식은 비-단위 구성전략을 위해 중요한 연산이었다. 곱셈과 마찬가지로 나눗셈은 계산하는 나눗셈과 상황으로서의 나눗셈에 대한 이해가 필요하였다. 과제3에서 동전 12개와 사탕 8개를 같은 묶음으로 만들기 위해 경수는 12와 8을 각각 4로 나누었다. 이와 같은 나눗셈의 계산을 위해서는 암묵적으로 측정과 분할의 나눗셈 상황에 대한 이해가 필요했다. 과제3에서 "12는요, 3으로 나누면 4개 잖아요?"는 먼저 동전 12개를 3개씩 나누면 4 묶음이 된다는 측정의 상황이었다. 그리고 이 4묶음에 사탕 8개를 똑같이 나누어주는 것은 분할의 상황이었다. 그리고 과제4에서 1명이 가지는 케이크의 양을 구하기 위해서 경수는 분할의 분명한 상황을 이해하고 있어야 했다. 이처럼 경수에게 있어서 나눗셈은 계산과 함께 상황에 대한 이해를 요구하였다. 그리고 곱셈이 동수누가였다면 나눗셈은 동수누감의 상황도 표현하였다. 과제3을 해결하면서 백원짜리 9개로 몇 개의 사탕을 살 수 있는가에 대해 경수는 9개에서 먼저 300을 주면 사탕 2개, 또 300을 주면 사탕 2개, 또 300을 주고 사탕 2개를 얻는 방법을 택했다. 이것은 9개의 백원을 동수누감한 상황과 같은 것으로 이해할 수 있다. 나눗셈에 대한 이해는 표현에 대한 이해를 요구하였다. 과제14를 해결하면서 경수는 말로써 나눗셈 상황을 표현할 수 있었다. 언어적 표현으로 나눗셈의 측정과 분할 상황을 표현할 수 있었다. 그리고 여러 과제에서 상황을 그림으로 표현하면서 시각적 표현에 대한 이해를 하고 있었으며 이런 상황을 기호로 나타냄으로 기호적 표현을 사용하였다.

나눗셈 상황에 대한 이해는 자연적으로 분수에 대한 이해를 동반하였다. 과제4를 해결하면서 1명이 가지는 몫은 분수로 표현하도록 했다. 분수의 여러 가지 의미 가운데 몫의 의미

에 대한 이해가 필요했다. 분수로 표현하는 활동을 하면서 자연스럽게 분수의 대소를 비교하는 활동이 필요하였고 이 과정에서 통분의 지식이 필요하였다. $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{4}$중 어느 것이 더 큰가를 이해하기 위해 통분을 하게 되고 통분을 하기 위해 경수는 3의 배수와 4의 배수를 찾아 이들 두 수의 공배수를 발견해야 했다. 다행스럽게 실험을 수행하는 기간에 경수는 약수와 배수를 학습하였으며 공약수와 공배수의 개념을 학습하였는데 이런 지식적 배경이 비례 추론을 더욱 가능하도록 만든 것 같다. 분수의 연산을 확장하면서 과제9에서는 대분수와 자연수의 곱셈을 이해해야 했다. 물론 실험에서는 대분수와 자연수의 곱셈을 실행하지는 않았지만 비례 문제를 해결하는데 요구되는 연산이었다. 그리고 이것은 분수의 곱셈은 실험이 끝난 다음에 경수가 과외 학습을 받으면서 학습하였는데 경수는 과외 학습을 하면서 실험에서 다룬 내용과 연결할 수 있었으며 더 쉽게 분수의 곱셈을 이해할 수 있었다.

경수가 비례추론에 해당하는 과제를 더 많이 해결할수록 경수는 공약수와 공배수의 개념이 필요하였으며 이를 구하는 알고리즘을 과제 해결에 사용하고자 하였다. 과제8을 해결하면서 문제 상황을 변형하였을 때 경수는 공약수를 사용하고자 하였으며 이를 위해 공약수 구하는 알고리즘을 사용하였다. 그러나 이것이 만약 경수가 이 당시 약수와 배수와 그리고 공약수와 공배수에 대한 과외학습을 하지 않았다면 이런 개념을 사용할 수 있었는지에 대해서는 확신할 수 없다. 다만 12와 16의 최대공약수로서 4와 최대공약수로 나눈 서로소인 두 수 3과 4가 어떤 의미를 가지는가를 연결시키기 위해 최대공약수 구하는 알고리즘을 사용하였다는 것은 분명하다.

비례 추론 개념을 발달시키기 위해 경수에게는 위에서 설명한 것과 같은 많은 수학적 지식이 필요하였다. 그러나 가장 중요한 개념은 단위에 대한 개념이었다. 단위에 대한 개념을 가지고 있는가를 알아보기 위해 과제13을 사용하였다. 기하학적 모형에서 작은 직사각형은 새로운 단위가 되었으며 이 단위를 통해 큰 직사각형에서 단위가 몇 개인가를 확인할 수 있었다. 경수가 원래 교과서에서 배운 단위는 가로, 세로가 각각 1cm인 표준 단위였다. 그러나 경수는 이 문제를 해결하기 위해 단위를 재설정할 필요가 있었으며 표준단위가 아닌 조정단위를 사용할 수 있어야 했다. 이런 재조정 단위는 비-단위 구성전략을 해결하는 기본적인 개념이었다. 과제 12에서 10분은 단위-비율로서 기본단위가 되었으며, 동전 12개로 16개의 사탕을 살 수 있는 것은 동전 3개로 4개의 사탕으로 단위가 재설정되어야 했다. 재설정된 단위는 구성전략을 수립하는데 사용될 수 있었다. 새로운 단위를 조정하는 수학적 지식은 비례추론을 해결하는데 핵심 개념이 될 수 있었다.

V. 논 의

Kaput와 West(1994)의 이전의 결과와 비교해 볼 때, 경수가 선택한 방법은 세 가지 주요한 요인들에 영향을 받는 것 같았다. 물론 이 연구는 문제해결에서의 과제변인에 대한 연구가 아니기 때문에 제한적으로 논의할 뿐이다. 1)과제 상황, 2)주어진 수, 3)비의 유형에 따라 영향을 받았다. 과제상황은 나눗셈 상황과 관련되는 것으로 "A모둠은 여학생 3명이 케이크 2개를 나누어 먹었고, B모둠은 남학생 4명이 케이크 3개를 나누어 먹었다. 어느 모둠의 학생이 더 많이 먹었다고 할 수 있는가?"라는 문제에서 경수는 자연스럽게 단위-비율을 구하는 전

략을 구사하였으며 "12명의 학생이 16개의 케이크를 똑같이 나누어 가진다면, 3명의 학생은 얼마만큼의 케이크를 가지겠는가?"과제에서도 단위-비율 전략을 구사하였다. 이것은 상황도 그렇지만 주어진 자료의 양의 형태에 영향을 받는 것 같았다. 두 문제 모두 연속량으로 주어졌다. 그러나 "백원짜리 동전 4개로 6장의 카드를 샀다. 백원짜리 동전 10개로는 몇 장의 카드를 살 수 있는가?"라고 했을 때 경수는 비-단위 전략을 사용하였다. 비의 유형에 따라, 즉 비가 1:K또는 K:1로 간단하게 되지 않을 때 비-단위 구성전략을 더 좋아하였다. 주어진 수와 관련하여 "백원짜리 동전 2개로 색종이 6장을 샀다. 그렇다면 백원짜리 동전 8개로 색종이 몇 장을 살 수 있겠는가?"와 같이 전항과 후항이 서로 곱셈관계가 될 때 함수 연산자를 곱하여 문제를 해결하였으며 마술 문제와 같이 좌항과 우항의 전항이 곱셈 관계가 될 때 스칼라 연산자를 사용하였다. 경수는 결국 문제에 따라 자기에게 가장 편한 방법을 사용하였던 것이다.

이 연구에서 우리는 비와 비례 개념을 개발하는 데 있어서 경수가 필요한 지식을 곱셈과 나눗셈, 분수의 의미, 분수의 연산, 약수와 배수, 공약수, 단위라는 것을 밝혔다. 그러나 이러한 모든 사전 개념을 학습한 다음에 비로소 비를 학습해야하는가에 대해서는 '아니오'라고 답한다. 지금까지의 분석은 비례 추론을 학습하는 것은 결코 중학생 단계에서 도입해야한다는 것이 아니라, 그 이전의 초등학교 저학년 아동에게도 충분히 각색하여 도입할 수 있다는 것을 증명하였다(Van den Brink & Streefland, 1979; Schorn, 1989). 나아가 비례 추론에 대한 실험을 통해 알게 된 것은 이러한 학습이 여러 관련 개념을 시험할 수 있게 하며 아직 충분히 학습하지 않은 내용, 여기서는 최대공약수, 확대와 축소, 분수의 곱셈, 비와 비례식과 같은 오히려 새로운 개념을 학습하는 데 도움이 된다는 것이다.

지금까지의 연구는 비와 비례에 관한 개념의 발달은 곱셈 개념장의 발달 내에 깊이 뿌리박고 있다는 것이다. 곱셈 개념장 내에서 각 개념들은 상호관련성을 가지면서 서로 의존적으로 발달한다는 것이다. 경수의 비와 비례 개념은 곱셈과 나눗셈, 분수, 분수의 연산, 약수와 배수와 같은 개념에 영향을 받는다. 그러나 비와 비례에 관한 경수의 경험은 또한 이들 개념을 더욱 깊이 이해할 수 있는 상황을 제공하여 더욱 복잡한 이해를 경험하도록 하였다.

실험은 주로 수와 연산 영역에 한정되어 이루어졌다. 그러나 수학적으로 풍부한 영역에서 주어지는 경험은 비와 비례 개념의 발달을 위해 새로운 경험을 제공할 수 있을 것이다. 특히 기하와 측정 영역을 바탕으로 한 경험은 그 영역의 개념 발달과 관련시킬 수 있다. 예를 들어, 기하 영역에서 변환기하를 통해 마술 문제와 같은 상황을 제공한다면 비례 개념뿐 아니라 변환기하에서 닮음의 상황을 이해하는 데 도움이 될 것이다. 측정 영역에서 과제13과 같은 상황이나 길이, 시간, 거리, 각, 무게의 도입은 타 영역의 발달을 심화시킬 것이다.

아울러 National Council of Teachers of Mathematics (2000)에서 말하는 과정규준은 비와 비율 개념의 확장에 새로운 방법을 제공할 것이다. 언어적으로 표현하는 것과 시각적으로 표현하는 능력을 통해 학생이 가지는 잠재성을 계발하고 반성할 수 있는 기회를 제공할 것이다. 이런 표현은 자신의 의견을 정당화시키는 증명활동과 관련될 것이고 궁극적으로는 문제해결로 연결되어 비례추론의 원래 목적인 추론을 가능하게 할 것으로 본다.

참고문헌

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 26,* 66-86.

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1991). Variables affecting proportionality. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the fifteenth annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education, 2* (pp. 125-132). Assisi, Italy: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics.* London: John Murray.

Hart, K. M. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors.* Windsor, England: NFER-Nelson.

Hart, K. M. (1988). Ratio and proportion. In M. Behr and J. Hiebert (Eds.), *Number concept and operation in the middle grades* (pp. 198-219). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J., & West, M. (1994). Missing value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 61-85). Albany, NY: State University of New York Press.

Karplus, R., Karplus, E., Formisano, M., & Paulsen, A. (1979). Proportional reasoning and control of variables in seven countries. In J. Lochhead, & J. Clement (Eds.), *Cognitive process instruction* (pp. 47-103). Philadelphia: Franklin Institute.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). Orlando, FL: Academic Press.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* 41-61.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part Ⅱ-problem structure at successive stages, problems solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11,* 331-363.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). The origin of the idea of chance in chance in children. NY: W. W. Norton.

Resnick, L. B., & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In P. Carpenter & T. A. Romberg (Eds.), *Rational number: An integration of research.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schorn, A. C. (1989). *Proportional reasoning by young children.* Unpublished master's thesis, Cornell University, Ithaca, NY.

Van den Brink, J., & Streefland, L. (1979). Young children(6-8)-ratio and proportion.

Educational Studies in Mathematics, 10, 403-420.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Analysis on Ratio and Proportion Concepts: A Story of a Fourth Grader

Lee, Jong Euk (Gaepo Elementary School)

The concepts of ratio and proportion do not develop in isolation. Rather, they are part of the individual's multiplicative conceptual field, which includes other concepts such as multiplication, division, and rational numbers. The current study attempted to clarify the beginning of this development process. One fourth student, Kyungsu, was encourage to schematize his trial-and-error-based method, which was effective in solving so-called missing-value tasks. This study describes several advancements Kyungsu made during the teaching experiment and analyzes the challenges Kyungsu faced in attempting to schematize his method. Finally, the mathematical knowledge Kyungsu needed to further develop his ratio and proportion concepts is identified. The findings provide additional support for the view that the development of ratio and proportion concepts is embedded within the development of the multiplicative conceptual field.

* **Key words** : ratio and proportion(비와 비례), multiplicative conceptual field(곱셈적 개념장), ratio-unit/build-up method(비-단위 구성 전략)

논문접수 : 2006. 3. 14
심사완료 : 2006. 5. 6