대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 16 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 16, No. 2, 139-156. May 2006

컴퓨터 시뮬레이션을 통한 통계적 확률 지도에 대한 연구

신 보 미* · 이 경 화**

학교 수학에서 통계적 확률을 보다 의미 있게 지도하기 위한 방안으로 다수의 선행 연구들은 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 귀납적인 조작 활동을 들고 있다. 이 연구에서는 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 통계적 확률이 지도될 때 그 지식의 성격이 어떻게 변화될 수 있는지를 그 구체적인 수업 안을 제시하고 있는 선행 연구 결과를 검토함으로써 살펴보았다. 또한 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 통계적 확률 지도가 의미 있기 위해서는 현재 교육과정에 수학적 확률이 정의될 수 없는 사건에 대해 통계적 확률을 고려해 보는 확률적 상황의 첨가가 필요함을 제안하였다. 이러한 사실을 토대로 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도하는 방안을 구체적인 수업 자료를 예로 들어 제시하였다.

I. 서 론

현재 학교수학에서 확률 개념은 주로 고전적 관점(수학적 확률)에서 다루어지며 부분적으로 빈도적 관점(통계적 확률)과 공리적 관점이 도입되고 있다. 그러나 고전적 관점만으로는 확률 개념의 본질을 드러내는 데 부족함이 있으며, 고전적 관점을 보완하고 확률 개념의 다양한 측면을 부각시킬 수 있는 방안의 연구가 필요하다(이경화, 1996). 확률 개념의 여러 측면 중 빈도적 관점, 곧 통계적 확률 개념을 부각시키기 위해서는 실험적 접근이 필수적이다. 통계적 확률의 이론화에 주목한 Von Mises(1957)는 "기하에서 공간 현상을 연구하는 것처럼 확률에서는 반복적인 사건의 집합을 다룬다."라고 설명하였다. 그러나 수학 수업에서 실제로 충분히 많은 회수의 반복을 구현하는 것이 컴퓨터나 계산기의 도움이 없다면 불가능하다. 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 확률 지도를 이러한 배경에서 고려하고자 한다. 이를 위하여 우선 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도할 때 수학적 지식의 성격이 어떻게 변화될 수 있는지를 Brousseau (1997)의 교수학적 상황 이론에 비추어 검토한다. 두 번째로 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 통계적 확률을 도입하기 위해서는 확률 교육과정이 어떻게 재구성되는 것이 바람직한가에 대하여 알아본다. 마지막으로는 이를 근거로 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도하는 구체적인 수업 자료를 개발한다.

II. 이론적 배경

1. 학교 수학에서 통계적 확률과 큰 수의 법칙

우리나라의 초 · 중등 교육과정에서는 확률을

* 광주과학고, bomi0210@hanmail.net
** 한국교원대, khmath@knue.ac.kr

수학적 확률과 통계적 확률로 도입하며(교육인적자원부b, 1997: 145-146), 특히 확률 개념으로서 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 이해하게 하는 것이 수학 I 확률 교육과정 상의 학습 지도 유의점으로 명시되어 있다(교육인적자원부a, 1997: 103). 그러나 실제 고등학교 교과서에서는 통계적 확률을 직접 다루는 것이 어렵다는 이유로(임석훈 외b, 2002: 235), 이와 관련된 구체적인 탐구 활동은 생략한 채 간단히 그 정의만을 언급하고 있다. 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 설명해 주는 큰 수의 법칙(law of large numbers) 역시 실제 자료에 대한 학생들의 귀납적인 조작 활동 없이 연역적인 계산에 의한 설명 방식으로 지도되고 있다(박규홍 외, 2002; 박배훈 외, 2002; 이강섭 외, 2002; 임석훈 외, 2002; 임재훈 외, 2002).

> 주사위 한 개를 n번 던져서 1의 눈이 나오는 횟수를 X라고 할 때, 이항분포표를 이용하여 $|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}|<0.1$ 이 성립할 확률을 구해보자.…
>
> $n=10$ 일 때, $P(|\frac{X}{10}-\frac{1}{6}|<0.1)=0.614$,
>
> $n=30$ 일 때, $P(|\frac{X}{30}-\frac{1}{6}|<0.1)=0.784$,
>
> $n=50$ 일 때, $P(|\frac{X}{50}-\frac{1}{6}|<0.1)=0.946$ 이므로 $P(|\frac{X}{n}-\frac{1}{6}|<0.1)$ 의 값은 n의 값이 커짐에 따라 1에 가까워짐을 알 수 있다(박규홍 외, 2002: 289).

Quinn(2000)은 많은 학생들이 교과서에 제시된 큰 수의 법칙에 대한 설명[1] 중에서 '가까워지는 경향이 있다'는 부분을 잘못 해석한 결과, 시행 횟수가 증가할수록 실험적 확률은 이론적 확률에 항상 가까워진다거나 시행의 횟수가 충분히 크면 실험적 확률과 이론적 확률은 정확히 같다고 생각하는 등 큰 수의 법칙에 대해 잘못된 신념을 가지고 있다고 지적하였다. 그는 학생들이 큰 수의 법칙을 개념적으로 더 잘 이해하도록 하기 위해 실제 실험을 통해 큰 수의 법칙을 지도하는 수업 안을 작성하였다[2].

Shaughnessy et al. (2003)은 주사위를 실제 60번 던졌을 때 각 눈이 몇 번정도 나오겠는가하는 질문에서 1, 2, 3, 4, 5, 6의 눈이 각각 일정하게 10번씩 나온다고 응답한 학생이 7학년에서 29명중 21명이나 된다고 하였다. 이는 주사위를 한 번 던지는 시행에서 각 눈이 나오는 수학적 확률이 $\frac{1}{6}$ 이라는 사실만을 염두에 둔 것으로, 그는 학생들의 이러한 추론이 학교 수학에서 확률 지도가 한 번의 시행에서 어떤 사건이 출현할 확률을 이론적으로 구해보는 것에만 치중하기 때문이라고 지적하였다. 그는 확률 지도에서 반복 시행의 문제 상황이 다루어져야 하며 이 때 시행 결과의 변역을 고려해 보는 기회를 주어야 한다고 주장하였다.

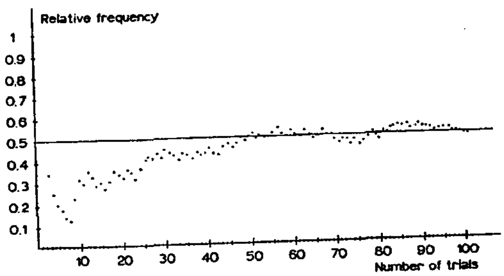
> 학생들은 반복 시행의 실험(experiment)을 통해 시행 결과가 각각 달라지기는 하지만 그 시행 결과들이 '존재할 것 같은 범위(likely range)'를 확인해 보는 경험을 가져야 한다(Shaughnessy et al., 2003: 164).

Freudenthal(1972)은 많은 교과서들이 동전을 100번 던졌을 때 앞면이 나오는 상대도수가 그 시행 횟수의 증가에 따라 연속적인 순서(sequential procedure)로 $\frac{1}{2}$ 에 빠르게 수렴함을

1) 큰 수의 법칙은 다음과 같이 설명 된다 : 시행이 반복될수록 성공할 확률은 한 번 시행에서 성공할 확률에 가까워지는 경향이 있다(Quinn, 2000: 25).

2) 앞뒤의 색이 다른 4개의 타일을 던졌을 때 앞면이 2개 나올 실험적 확률이 얼마인지 추측해 보라는 질문을 던진다. 그 다음, 실제로 4개의 타일을 던져 보는 실험을 충분히 반복하여 그 상대도수를 직접 계산하게 한다. 그 결과 초기 추측이 잘못되었음을 확인하게 한다.

다음과 같은 그림을 제시함으로서 보여주고 있는데 이러한 설명은 통계적으로 적절치 않다고 지적하였다.



[그림 II-1] 교과서의 예(Freudenthal, 1972: 484)

그는 동전을 750번 던지는 실제 실험을 통해 '도수의 안정성(stability of frequencies)'은 시행이 '오랫동안 지속되었을 때' 시행의 횟수가 커질수록 그 상대도수가 $\frac{1}{2}$에 '확률적으로 가까워진다'는 의미라고 설명하였다. 도수의 안정성을 적절하게 지도하기 위해서는 상대도수의 '평균'들이 $\frac{1}{2}$의 주변에서 변화하는 현상을 고려해야 한다고 지적하면서 다음과 같은 사례를 들어 확률에 대한 실험적 접근(empirical approach to probability)을 제안하였다. 20명의 학생들이 동전을 10번 던지는 시행을 10회 반복한다. 그 다음 각각의 시행에서 앞면이 나오는 상대도수를 구하여 이들의 평균을 계산한다. 이 값들은 $\frac{1}{2}$과 0.1 또는 0.2 정도의 차이가 있으며, 각 시행을 두 배로 늘렸을 때 이들은 $\frac{1}{2}$과 약 0.05 정도의 차이가 있음을 확인한다.

2. 컴퓨터 시뮬레이션과 통계적 확률

Ben-Zvi(2002)는 컴퓨터가 인지적 도구가 될 수 있음을 지적하면서 테크놀로지는 통계적 힘(statistical power)을 증폭시킬 수 있다고 하였다(Friel, 2003: 390-391에서 재인용). Shaughnessy(1992)는 확률에 대한 빈도적 정보를 수집하고 분석함으로서 학생들이 통계적 확률 개념을 인식할 수 있게 하는 교수법으로 시뮬레이션 방법을 제안하였다. NCTM(2000)은 확률을 수학적으로만 구할 수 있다고 지도하지 말고 시뮬레이션을 통해 통계적 확률과 수학적 확률이 모두 가치가 있으며 그 둘 사이의 차이 및 장단점을 이해하도록 하는 것이 중요하다고 하였다.

Dooren et al. (2002)은 주사위를 여러 번 던졌을 때 5의 눈이 6번 중 2번 나올 가능성과 3번 중 1번 나올 가능성이 같은지를 묻는 질문에서 대부분의 학생들이 '같다'는 잘못된 응답을 하였다고 지적하였는데, Shaughnessy(1997)는 비슷한 상황[3]에서 컴퓨터 시뮬레이션을 도입함으로서 각 사건이 일어날 가능성이 다름을 지도할 수 있다고 설명한 바 있다. Jardine(2000)은 역사적으로 수학자들이 큰 수의 법칙을 확인하기 위하여 실제 동전을 던져 구한 상대도수[4]를 소개하면서 학생들에게는 TI-83 계산기를 이용한 동전던지기 시뮬레이션을 통해 큰 수의 법칙을 보다 쉽게 확인하게 할 수 있다고 설명하였다.

Biehler(1991)는 확률 교육과 관련하여 컴퓨터 시뮬레이션의 장점을 세 가지로 요약하였다[5]. 그는 학생들이 큰 수의 법칙을 피상적으로

3) 아들이 10명중 7명 태어날 가능성과 100명중 70명 태어날 가능성은 같은가?(Shaughnessy, 1997: 12).
4) Buffon은 동전을 4040번 던져 앞면이 2048번, Kerrich는 10000번 던져 5067번, Pearson은 24000번 던져 12012번의 결과를 얻었다(Jardine, 2000: 51).
5) (1) 반복 횟수를 늘릴 수 있으므로 결과의 불확실성과 변화를 감소시킬 수 있으며 여러 종류의 패턴을 발견할 수 있다. (2) 모델의 가정을 바꾸고 실험을 세련시키고 구해진 자료를 다른 방법으로 분석함으로써 연구 영역을 확장할 수 있다. (3) 모델, 통계적 처리 과정, 그래프 등을 보다 효과적으로 제공함으로써 유연한 표현이 가능하다(Biehler. 1991: 181).

이해하는 경향이 있다고 지적하면서 컴퓨터의 지원 없이는 큰 수를 다루는 것이 어려울 뿐만 아니라 시행을 오랫동안 계속하였을 때 도수가 어떻게 되는가를 알 수 없는 상태로 남아있게 된다고 하였다.

> 큰 수의 법칙과 관련하여 많은 오개념이 존재한다. 학생들은 '작은 수의 법칙'이 있는 것처럼 생각한다. 즉, 도수에 대한 절대적인 안정성이 존재한다고 여긴다. 그들은 표본의 적절한 크기에 따라 변이성에 차등이 있음을 느끼지 못하며 중요한 법칙이나 개념과 관련된 실험적(empirical) 의미를 알지 못한다(Biehler, 1991: 194-195).

김상길(1999: 9)은 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 수학적 확률과 통계적 확률간의 상호 관련성을 보다 효과적으로 지도할 수 있다고 하였다. 강행고(1997: 67)에 의하면 현직 교사들 역시 효율적인 확률 교육을 위해 활용하기에 효과적인 교육 기자재를 묻는 설문에서 컴퓨터 시뮬레이션의 필요성을 지적한 바 있다.

이러한 선행 연구들에 의하면 컴퓨터 시뮬레이션 방법은 수학적 확률이 주로 다루어지는 현행 교육과정에서 통계적 확률을 보다 효과적으로 지도하는데 하나의 방안이 될 수 있다. 학생들은 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 구체적인 실험과 귀납적인 탐구 활동 과정에서 확률 개념의 다양한 측면을 이해할 수 있다(신동선 외, 2002: 57).

III. 연구 방법

이 연구의 목표는 통계적 확률을 지도함에 있어 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하는 방안을 모색하는 것이다. 이를 위하여 제기된 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도할 때 수학적 지식의 성격이 어떻게 변화될 수 있는지를 Brousseau(1997)의 교수학적 상황 이론에 비추어 검토한다. 둘째, 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 통계적 확률을 도입하기 위해서는 확률 교육과정이 어떻게 재구성되는 것이 바람직한가를 알아본다. 셋째, 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도하는 구체적인 수업 자료를 개발한다.

연구문제 1은, 현 교육과정 내에서 통계적 확률 지도에 컴퓨터 시뮬레이션이 활용되고 있는 예가 없기 때문에 그러한 지도 방안을 모색한 선행 연구 결과를 분석함으로써 해결한다. 이러한 분석의 과정에서 학문적 지식으로서 통계적 확률이 가지는 특성은 주요하면서도 직접적인 분석의 기준이 된다. 연구문제 2는 통계학 교재와 현 고등학교 교육과정, IMP (Integrated Mathematics Program) 교과서와 Key Curriculum Press의 교과서[6] 등에 대한 문헌 검토를 통하여 해결한다. 이러한 문헌 검토 결과로 부터 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 통계적 확률 지도가 가능하기 위해서는 현 교과서에 어떤 유형의 확률적 상황이 첨가되어야 할 것인지를 제안한다. 그리고 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 통계적으로 분석하는 과정과 관련될 만한 교육과정의 학습 요소를 밝힘으로서 통계적 확률 지도를 위해 이러한 학습 요소를 재구성하는 방안을 모색하기 위한 토대를 마련한다. 연구문제 3은, 연구문제 1과 2의

6) 박경미 외(2002: 320, 323)는 Key Curriculum Press의 교과서에 대하여 수학적 개념을 풍부한 맥락과 더불어 실생활과의 관련 속에서 제시하는데 주안점을 두면서 주제 중심 전개방식을 따르고 있는 교재로 설명하고 있다. 그는 이러한 경향의 교과서가 미국 NCTM 규준집의 아이디어를 구현하고자 한 Core-Plus, UCSMP, IMP, STEM 등 최근 이루어진 대형 프로젝트 결과 출시된 교과서들과 그 맥을 함께 하며 이와 같은 유형의 교과서들이 점차 미국 교과서들의 주류를 이루는 추세라고 하였다.

결과를 토대로 통계적 확률을 지도하는데 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하는 구체적인 수업 자료를 개발하여 이를 예시로 보임으로서 해결한다.

IV. 연구 결과

1. 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 통계적 확률의 교수학적 변환 방식

확률 교육에서 시뮬레이션 활동의 필요성을 역설한 여러 선행 연구들(우정호, 1998; Coburn, 1985; Hawkins et al., 1992; NCTM, 2000; Rade, 1983; Shaughnessy, 1981)로 인해 확률 교육에 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하는 실제적인 수업안을 개발하는 다수의 연구들이 수행되었다(강행고, 1999; 김상길, 1999; 박종수, 2003; 조성윤, 2004). 이 연구들은 수학적 확률이 중점적으로 지도되는 현 교육과정의 전개 방식을 개선하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도하고자 할 때 교수학적인 시사점을 줄 수 있다.

김상길(1999)은 Interactive Probability를, 조성윤(2004)과 박종수(2003)는 Fathom을 활용하여 통계적 확률과 큰 수의 법칙을 지도하는 구체적인 수업 안을 작성하였다. 김상길의 수업 안은 확률 추측하기, 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 통계적 확률 구하기, 수학적 확률 구하기, 이상의 결과를 비교하여 느낀 점 적기의 네 단계로 구성되어 있다. 네 번째 단계는 큰 수의 법칙이 성립함을 보여주는 핵심적인 부분으로, 다음과 같은 표가 제시된다.

> 4단계에서 이제까지 한 것을 상호 비교하고 느낀 점을 적도록 하는 것은 시행 횟수가 커짐에 따라 통계적 확률이 수학적 확률에 근접함(큰 수의 법칙)을 깨닫게 하기 위해서이다(김상길, 1999: 30).

<표 IV-1>

	추측	통계적 확률		수학적 확률
		1,000회	10,000회	
만나는 회수				

(김상길, 1999: 51)

조성윤(2004) 역시 동전과 주사위를 던지는 시뮬레이션을 실행하기 위해 Fathom의 여러 명령어들을 사용하는 방법을 설명한 후 김상길(1999)의 연구에서와 같이 실제 시뮬레이션의 결과로부터 얻어진 상대도수가 시행 횟수의 증가에 따라 수학적 확률에 가까워짐을 확인하도록 표[7]를 제시하고 있다.

박종수(2003)는 Fathom의 random함수를 이용하여 주사위를 120번, 1200번 던지는 시뮬레이션을 실시한 후 그 결과 중 어떤 것이 수학적 확률인 $\frac{1}{6}$에 더 가까운지를 표가 아닌 [그림 IV-1]과 [그림 IV-2]를 통해 보여주는 수업 안을 구안하였다.

---

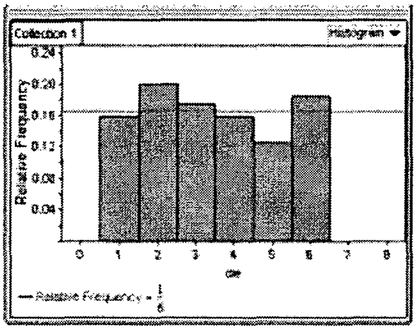
7) <표 IV-2>

시행횟수	20	50	100	1000	2000
앞면이 나오는 횟수					
상대도수					

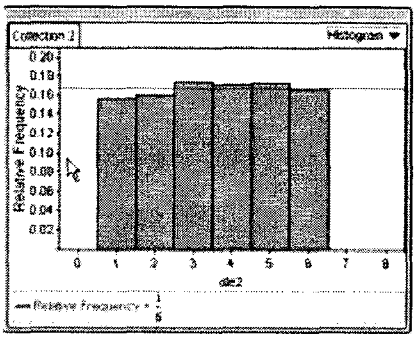
(조성윤, 2004: 82)

이들 연구에서 개발한 수업 안은 대부분 컴퓨터를 사용하기 위한 기능 학습 단계, 컴퓨터 시뮬레이션 실행 단계, 상대도수 계산 단계, 큰 수의 법칙을 확인하는 단계의 네 부분으로 구성되어 있다. 특히 네 번째 단계에서 학생들은 큰 수의 법칙을 시뮬레이션 결과로부터 얻어진 실제 자료를 다룸으로서 확인하게 된다. 김상길과 조성윤은 시뮬레이션 결과를 시행 횟수별로 표로서 정리하여 큰 수의 법칙이 성립함을 확인하게 하고 있으며, 박종수는 앞서 살펴본 [그림 Ⅳ-1]과 [그림 Ⅳ-2] 등을 통해 큰 수의 법칙이 성립하려는 전체적인 경향이 존재함을 시각적으로 확인할 수 있도록 한다. 이러한 과정을 통해 학생들은 도수에 대한 절대적인 안정성이 존재하는 것이 아니라 시행 횟수가 커짐에 따라 상대도수가 안정되어 가는 경향이 있음을 경험할 수 있게 된다[8].

이들 선행 연구는 연역적 계산을 통해 큰 수의 법칙을 설명적으로 제시하는 현 교과서의 접근 방법에 비해 시행을 계속하였을 때 도수가 어떻게 변화하는지를 학생들이 확인할 수 있게 한다는 측면에서 큰 수의 법칙에 대한 구체적인 이해에 도움을 준다. 이는 큰 수의 법칙에 대한 실험적 의미를 학생들이 파악할 수 있게 함으로서 지식의 성격을 통계적 확률을 강조하는 방향으로 이동시킨 것으로 볼 수 있다. Brousseau(1997)에 의하면, 이러한 조치는 어떤 개념이 발생되는 것이 가능하도록 상황을 설정하고, 그 안에서 교사와 학생이 다양한 의미를 부여함으로써 교수학적 논쟁이 이루어 질 수 있게 하려는 의도를 가지고 있다. 그러나 통계적 확률에 들어있는 실험적 의미를 보다



[그림 Ⅳ-1] 주사위를 120번 던진 시뮬레이션 결과



[그림 Ⅳ-2] 주사위를 1200번 던진 시뮬레이션 결과

(박종수, 2003: 56)

8) 학생들은 '작은 수의 법칙(law of small numbers)'이 있는 것처럼 생각하는 경향이 있다(Tversky, 1971; Biehler, 1991). 시행횟수가 충분히 크면 상대도수는 시행횟수가 작을 때보다 수학적 확률에 가까워지는 상대적인 안정성을 보임에도 불구하고 학생들은 시행횟수가 작은 경우에도 상대도수가 수학적 확률과 같은 값을 가질 것으로 여긴다. 예를 들면, 동전을 10번 던졌을 때 앞면이 나오는 횟수는 정확히 5번일 것으로 생각하는 경우가 있는데 이는 그 상대도수가 수학적 확률인 $\frac{1}{2}$ 과 항상 같을 것이라고 판단하기 때문이다. Biehler(1991: 195)는 이를 학생들이 표본의 적절한 크기에 따라 변이성에 차등이 있음을 느끼지 못하고 도수에 대한 절대적인 안정성(stabilization of absolute frequencies)이 존재하는 것으로 생각하는 경향이 있다고 설명하였다. 이 논문에서 시행횟수가 커짐에 따라 상대도수가 안정되어 가는 경향이 있다는 것은 시행횟수가 커질수록 상대도수가 수학적 확률에 가까워지는 경향이 있다는 의미이다.

드러내고자 하는 이러한 조치는 학생의 직관적 경험과 부적절하게 연결되어 큰 수의 법칙이라는 수학적 개념의 이해를 방해할 수도 있다. 예를 들어, 시행 횟수별로 그 상대도수를 표로 정리하여 비교하는 과정은 학생들이 큰 수의 법칙을 $N>n$ 인 시행 횟수 N과 n에 대하여 $\left|\frac{X}{N}-p\right|<\left|\frac{X}{n}-p\right|$ 과 같이 시행 횟수의 증가에 따라 상대도수가 연속적인 순서(sequential procedure)[9]에 따라 p에 수렴하는 것처럼 생각하게 만들 수도 있다. 이러한 맥락에서 학생들은 큰 수의 법칙이 $\lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}=p$ 을 설명하는 것으로 오해할 가능성이 있는데 이는 큰 수의 법칙에 대한 현 교과서의 다음과 같은 서술로 더욱 강화될 여지가 있다.

> 큰 수의 법칙은 시행 횟수 n을 크게 할수록, 통계적 확률이 수학적 확률에 가까워짐을 뜻한다(박규홍 외, 2002: 289).
>
> 큰 수의 법칙에 의하면 시행 횟수 n을 충분히 크게 했을 때, 상대도수 $\frac{X}{n}$의 값은 수학적 확률 p와 같아짐을 알 수 있다(이강섭 외, 2002: 255).

통계학적으로 볼 때, 큰 수의 법칙은 상대도수의 극한으로 정의된 통계적 확률에 이론적 정당성을 부여하는 정리(신양우, 2004: 361)로서 어떤 사건의 상대도수 $\frac{X}{n}$은 n이 커질수록 모비율 p에 가까운 값을 취하는 경향이 있음을 보여준다.

> 모비율 p인 모집단에서 추출한 크기 n인 임의 표본에 대하여 표본비율(또는 상대도수)을 $\overline{P}=\frac{X}{n}$ 라 하면 $n\to\infty$일 때, $\overline{P}$는 p에 확률적으로 수렴한다. 즉 임의의 $\varepsilon>0$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}P(|\overline{P}-p|<\varepsilon)=1$ 이다(정영진, 1992: 185).

그러나 여기에서 '확률적으로 수렴한다(converge in probability)'는 것은 $\lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}=p$ 와는 그 의미가 다르다(정영진, 1992: 184). $\lim_{n\to\infty}\frac{X}{n}=p$ 은 임의의 양수 ε을 아무리 작게 잡아도 적당히 큰 양수 N이 존재하여

$n>N$인 모든 n에 대하여 $\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon \cdots ①$

이 반드시 성립함을 가리키나,

$\lim_{n\to\infty}P(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon)=1$은 n을 아무리 크게 잡아도 ①이 성립하지 않을 가능성을 배제하지 않으며, 다만 ①이 성립할 확률이 커진다는 것을 의미한다. 큰 수의 법칙이 갖는 학문적 지식으로서의 이러한 특성에 비추어볼 때, 교수학적 지식으로서 큰 수의 법칙 역시 시행 횟수 n이 충분히 클 때 상대도수가 모비율이 된다는 뜻이라기보다는 시행을 충분히 반복하였을 때 상대도수와 모비율의 차이가 작아질 가능성이 '확률적으로' 커진다는 뜻으로 해석되는 것이 바람직하다.

Key Curriculum Press의 Statistics in Action에서는 큰 수의 법칙을 식이 아닌 서술로 기술함으로써, 표본의 크기가 충분히 클 때 상대도수와 모비율의 차이가 작아질 가능성이 확률적으로 커진다는 의미를 보다 명시적으로 설명하고 있다.

> 다음과 같은 성질을 큰 수의 **법칙**이라고 한다. 어떤 시행에서 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 X라고 하면, 아무리 작은 양수 h를 택하여도 다음이 성립한다.

9) Freudenthal, 1972: 487

$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{X}{n} - p| < h) = 1$ (임재훈 외, 2002: 297).

큰 수의 법칙은 임의 표본에서 표본의 크기가 커질수록 표본의 비율이 모비율에 가까워지는 경향이 있다는 것을 설명해 준다. 즉, 표본의 크기가 커질수록(몇 가지 드문 경우를 제외하면) 표본 비율과 모비율의 차이는 작아진다 (Watkins et al., 2005: 334).

또한, 이 교과서에서는 실제 동전을 던져서 그 결과를 그래프로 표현해 보는 활동을 통해 큰 수의 법칙을 시각적으로 확인할 수 있게 한다.

동전을 20번 던져 각각의 시행에서 동전의 앞면이 나온 횟수의 상대도수를 누가하여, 앞면이 나온 상대도수와 동전을 던진 횟수 사이의 관계를 하나의 그래프에 나타내어라. 그런 다음 그래프의 점을 연결하여라. 이러한 과정을 5번 반복하여 5개의 그래프에 나타난 차이점에 대하여 논의하여라(Watkins et al., 2005: 335).

결론적으로, 통계적 확률을 지도하는데 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하는 방법은 통계적 확률의 실험적 성격을 학생들이 구체적으로 확인하게 할 수 있어 현 교과서의 연역적 접근 방법에 비해 보다 바람직하다고 볼 수 있다. 그러나 통계적 확률에 대한 선행 연구의 교수학적 변환 방식은 큰 수의 법칙과 관련하여 학생들의 이해가 직관적인 수준에 머물러 있게 할 가능성이 있다. 큰 수의 법칙과 관련하여 일어날 수 있는 이러한 오해는 통계학 교재 등에서 이미 지적되고 있는 바, 통계적 확률을 지도하는데 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하는 방법을 고안할 때 학생들이 가질 수 있는 이러한 오해의 가능성에 대해 보다 주의 깊은 고려가 필요하다. 학문적 지식으로서 큰 수의 법칙은 모비율과 표본비율인 상대도수의 관계를 설명해주는 주요한 정리임을 감안해 볼 때, 큰 수의 법칙에 대한 교수학적 고려에서 모비율, 표본비율 등의 내용 요소가 적극적으로 반영되어 다루어져야 할 것으로 보인다.

2. 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도하기 위한 교육과정 재구성 방안

윷을 던져 곡면이 있는 부분이 나올 확률과 같이 그 수학적 확률을 정의할 수 없는 사건들에 대해서는 통계적 확률을 고려해야 한다. 실제 통계적 확률은 사회 현상이나 자연 현상에 있어서 수학적 확률을 구하는 것이 쉽지 않을 때 확률에 대한 귀중한 정보를 제공한다 (마츠자카 가즈오, 1995: 835). Bramald(1994)는 확률 교육의 정당성을 실생활과의 관계에서 찾으면서도, 실생활의 확률적 상황 대부분이 각 근원사건이 동등하게 일어날 것이라는 수학적 확률의 전제를 보장하지 않기 때문에 실제로는 통계적 확률이 보다 의미 있게 사용됨에도 불구하고 학교에서 지도되는 확률적 상황에서는 이러한 특성이 사라져 있다고 비판하였다. 그는 예비수학교사들 역시 어떤 사건의 확률을 재빠르게 추측해보게 하였을 때 수학적 확률의 전제를 가정하는 경향이 있다고 하면서 압정을 던져서 침이 있는 확률을 고려해 보는 것과 같이 이론적인 확률을 구하기 어려운 과제가 학교 수학에서 다루어져야 한다고 제안하였다. 7차 교육과정 역시 수학적 확률이 존재하는 사건만을 주로 다루고 이런 사건들에 대해서만 실제 시행 결과 얻어진 상대도수를 고려해 보기 때문에 통계적 확률의 가치가 드러내어 지도되고 있지 못한 점이 있다. 따라서 수학적 확률을 정의할 수 없는 사건들에 대해서는 통계적 확률을 어떻게 구할

수 있는지, 무한 번의 시행을 전제로 하는 통계적 확률을 추정하기 위하여 유한 번의 실제 시행으로부터 얻어진 상대도수를 어떻게 다루어야 하는지 등이 충분히 설명되고 있지 못하다.

강행고(1997: 116-121)는 각 근원사건이 일어날 가능성이 같지 않은 시행(unequally likely event)이 존재하며 이러한 경우에는 통계적 확률이 중요한 역할을 한다는 것을 지도하기 위하여 압정을 이용한 물리적 실험과 컴퓨터 실험을 실시하였다. 그는 우선 압정을 실제로 던져보는 물리적 실험 활동으로부터 침이 있는 부분과 그렇지 않은 부분이 나올 가능성이 다름을 학생들이 인식하도록 하였다. 그런 다음, 압정을 1000번 던지는 컴퓨터 실험을 실시하여 침이 있는 부분이 594번, 그렇지 않은 부분이 406번 출현하는 결과를 얻었다. 이로부터 학생들이 각 사건의 실험적 확률이 각각 59%와 41%라는 사실을 유도하도록 하였다. 이러한 일련의 활동은 수학적 확률이 존재하지 않은 상황이 존재하며 이러한 경우에는 통계적 확률이 의미 있는 확률적 도구가 될 수 있음을 학생들이 인식하는데 도움을 주었다고 볼 수 있다.

S8 : 아니오. 일어날 가능성이 달라요. 압정던지기는 동전던지기와는 다르네요.

:

S8 : 동전은 그냥 알 수 있지만, 압정은 알 수 없어요.

R : 그러면 어떻게 알아내죠?

S8 : 직접 던져 봐야 되요(강행고, 1997: 119-120).

학교 수학에서 통계적 확률의 가치가 보다 드러나기 위해서는 강행고(1997)의 연구에서와 같이 수학적 확률이 정의되지 않은 사건에 대해 통계적 확률을 구해 보는 상황이 제시되어야 할 필요가 있다. 그러나 통계적 확률은 시행의 횟수를 '무한히' 반복하였을 때 그 사건이 출현한 상대도수의 '극한'으로 정의되기 때문에 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 시행의 횟수를 아무리 크게 한다고 하더라도 실제로 통계적 확률 값을 구하는 것은 불가능하다. 컴퓨터 시뮬레이션 결과 얻어진 값은 통계적 확률이라기보다는 통계적 확률의 근사 값으로, 무한 번의 시행을 전제로 하는 통계적 확률은 유한 번의 컴퓨터 시뮬레이션 결과 얻어진 상대도수에 의하여 추정될 수 있을 뿐이다. 이러한 추정을 위해서는 상대도수의 값(측정값)이 통계적 확률(이론적인 평균값)의 주변에서 변하는 현상을 통계적으로 고려해 볼 필요가 있다(Freudenthal, 1972: 489). IMP 교과서 Integrated Mathematics Course I 에서는 상대도수로부터 통계적 확률을 추정하는 데 유한 번의 실험에서 얻어진 상대도수들 사이의 평균을 이용하기도 한다.

Step6. 원판을 20번 떨어뜨리는 실험을 통해 각 그룹별로 구한 상대도수의 값을 수집하여 이 값들의 평균을 계산하여라. Step7. …이론적 확률을 구하여라. 이를 Step6.의 결과와 비교하여라(Rubenstein et al., 1998: 501).

한편, 이 교과서는 다음과 같은 예제를 통해 통계적 확률을 추정하는 상황이 표본비율로 모비율을 추정하는 상황과 비슷하다는 점을 암묵적으로 드러내어 지도하기도 한다.

예제1. 미국에 거주하는 25세 이상 성인 중에서 고등학교 4년 과정을 마친 사람 한 명을 무작위로 뽑을 경우 그 사람이 여성일 통계적 확률을 다음 표를 활용하여 추정(estimate)하여라.

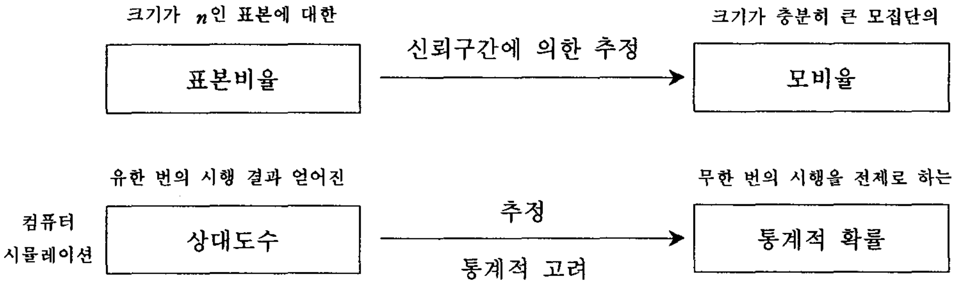
문제 풀이 전략 : 주어진 표로부터 고등학교 4년 과정을 마친 사람의 수는 61,272명

이고 고등학교 4년 과정을 마친 여성의 수는 34,083명이므로 구하고자 하는 확률은 $\frac{34,083}{61,272} \fallingdotseq 0.556$ 으로 약 56% 이다 (Rubenstein et al, 1998: 308-309).

수학적 확률을 구하기 곤란한 자연 현상 등에 대해 통계적 확률을 생각하는 것은 현실적으로 모집단에서 그 현상이 출현할 비율, 즉 모비율을 고려하는 상황과 같다고 볼 수 있다. 통계학적으로 볼 때, 모집단에서 어떤 사건이 출현할 비율을 실제로 계산하는 것은 거의 불가능하므로, 모비율은 그 모집단에서 임의 추출한 표본의 표본비율을 사용하여 추정하는 것이 일반적이다. 현재 고등학교 교육과정의 '확률과 통계'에서는 표본비율을 통해 모비율을 신뢰구간으로 추정하는 방법을 다루고 있다.

모집단에서 크기 n인 표본으로부터 구한 표본비율의 실제 값을 p이라고 하면 n이 충분히 클 때 모비율 P에 대한 신뢰구간은 신뢰도 95% 에서
$[p-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}]$ 이다
(교육인적자원부, 2004: 147).

결과적으로, 동전을 던져 앞면이 나오는 상황과 같이 그 수학적 확률이 정의되는 사건에 대해서는 시행횟수가 커질수록 통계적 확률이 수학적 확률인 $\frac{1}{2}$ 에 확률적으로 가까워 질 것이기 때문에 통계적 확률 값을 추정하는 방법 등에 대한 연구가 필수적이지는 않다. 선행연구들은 실생활의 확률적 문제 상황에서는 수학적 확률이 정의되지 않는 경우가 대부분이기 때문에 이러한 경우 통계적 확률이 주요한 문제 해결의 도구가 될 수 있음을 주장하면서 이 때 상대도수를 활용하여 통계적 확률을 추정하는 방법에 대한 통계적 고려 역시 필요함을 지적하고 있다. 이러한 관점에서 학교 수학의 확률 교육과정에는 수학적 확률이 정의되지 않는 사건에 대해 통계적 확률을 고려해 보는 확률적 상황이 첨가되어야 하며, 상대도수로부터 통계적 확률을 추정하는 방법에 대한 교수학적인 지도 방안 역시 구체적으로 모색되어야 한다. 유한번의 시행 결과 얻어진 상대도수로서 무한번의 시행을 전제로 하는 통계적 확률을 추정하는 과정은 표본비율을 활용하여 모비율을 추정하는 상황과 동일하다고 볼 수 있다[10]. 표본비율을 활용하여 모비율을 신뢰구간으로 추정하는



[그림 IV-3] 모비율의 구간 추정과 통계적 확률 추정 사이의 관계

10) 김미경(1994)은 표본비율을 통하여 모비율을 신뢰구간으로 추정하는 방법을 사용하여, 윷을 던졌을 때 곡면이 나올 통계적 확률을 상대도수를 활용하여 신뢰구간으로 추정하였다.

방법은 수학적 확률을 정의할 수 없는 사건들에 대해 컴퓨터 시뮬레이션 결과 얻어진 상대도수로 부터 통계적 확률을 추측해 보는 상황을 다루는 하나의 통계적 모델이 될 수 있다.

3. 컴퓨터 시뮬레이션을 활용하여 통계적 확률을 지도하는 수업 자료 예시

가. 큰 수의 법칙 수업 자료

임의의 양수 ε에 대하여 $\lim_{n\to\infty} P(|\frac{X}{n}-p|<\varepsilon)=1$ 이 성립한다는 큰 수의 법칙은 $N>n$ 인 유한 번의 시행 횟수 N과 n에 대하여 $|\frac{X}{N}-p|<|\frac{X}{n}-p|$ 이 성립하는 것으로 이해되기 보다는 $P(|\frac{X}{N}-p|<\varepsilon)>P(|\frac{X}{n}-p|<\varepsilon)$ 이 성립함을 확인하는 것으로 설명되는 것이 바람직하다. 이를 설명하는 방법에는 크게 두 가지 방안이 있을 수 있다. 1차적으로는 박종수(2003)의 연구에서와 같이 시각적인 접근을 통해 시행 횟수가 커짐에 따라 상대도수가 안정되어 가는 경향을 보여줌으로서 설명될 수 있다. $N>n$ 인 시행횟수 N과 n에 대한 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 그림으로 정리하여 이를 수학적 확률과 비교해 봄으로서 큰 수의 법칙이 성립하려는 전체적인 경향을 직관적으로 확인하게 할 수 있다. 다음으로는 N번의 시행과 n번의 시행을 일정한 횟수만큼 반복하였을 때 $|\frac{X}{N}-p|<\varepsilon$ 인 경우가 $|\frac{X}{n}-p|<\varepsilon$ 인 경우보다 더 많음을 확인하는 것으로 설명될 수 있다.

예를 들어, 주사위를 던져 3의 눈이 나오는 사건에서 큰 수의 법칙이 성립함을 확인하는 상황을 고려해 보자. 주사위를 12번 던지는 시뮬레이션을 5번 실시하고 120번 던지는 시뮬레이션 역시 5번 실시한다. 그런 다음 임의의 양수 $\varepsilon=0.05$ 에 대하여, 주사위를 12번 던진 시뮬레이션과 120번 던진 시뮬레이션 각각에서 3의 눈이 나온 상대도수와 수학적 확률인 $\frac{1}{6}$의 차가 0.05 보다 작은 경우가 어느 쪽이 더 많은지 비교한다. 다음 [그림 Ⅳ-4]와 [그림 Ⅳ-5]는 주사위를 12번 던지는 시뮬레이션과 120번 던지는 시뮬레이션을 각각 5번씩 반복하는 과정에서 $|\frac{X}{12}-\frac{1}{6}|<0.05$ 인 경우는 1번, $|\frac{X}{120}-\frac{1}{6}|<0.05$ 인 경우는 5번 나타남을 보여주고 있다[11].

나. 상대도수로 통계적 확률을 추정하는 수업 자료

학교 수학에서 통계적 확률의 가치가 보다 드러나기 위해서는 수학적 확률이 정의되지 않은 사건에 대해 통계적 확률을 구해보는 상황이 제시될 필요가 있다. 이 때 무한 번의 시행을 전제로 하는 통계적 확률을 어떻게 구할 것인지, 이를 추정하기 위하여 유한 번의 시행 결과 얻어진 상대도수를 어떻게 다룰 것인지를 지도할 수 있다. 이 절에서는 표본비율을 활용하여 모비율을 신뢰구간으로 추정하는 방법을 모델로 하여 컴퓨터 시뮬레이션 결과 얻어진 상대도수로서 통계적 확률을 추정하는 방법을 윷의 곡면이 출현할 통계적 확률을 구하는 과정을 예로 들어 설명하고자 한다.

김미경(1994)은 윷을 실제 던져 보는 물리적 실험을 1000회 실시하여 곡면이 589번 평면이 411번 나오는 결과를 얻었으며, 이로부터 윷의 곡면이 출현할 통계적 확률을 다음과 같이

11) 여기서 시뮬레이션의 반복 횟수를 5번으로 한 것은 이 연구에서 설명하고자 하는 방법을 예로서 보여주기 위함으로, 실제 큰 수의 법칙이 성립함을 확인하기 위해서는 시뮬레이션의 반복 횟수를 수십 번 정도로 크게 할 필요가 있다.

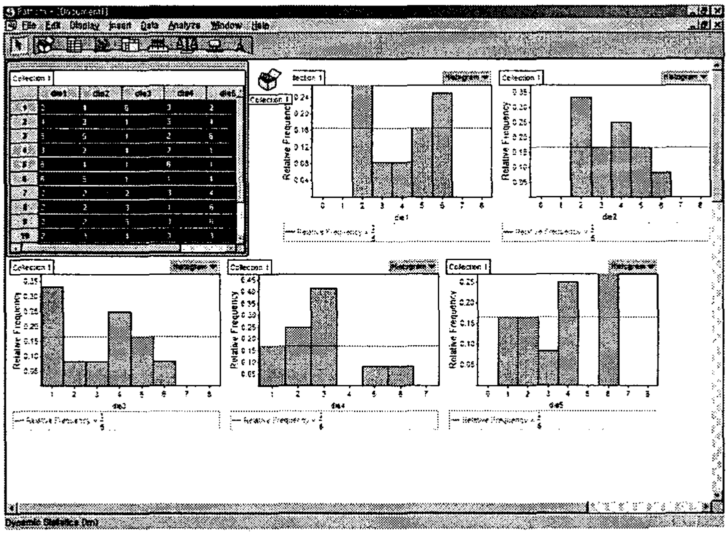
95% 신뢰구간으로 추정하였다.

$$(0.589-2\sqrt{\frac{0.589\cdot 0.411}{1000}},\ 0.589+2\sqrt{\frac{0.589\cdot 0.411}{1000}})$$

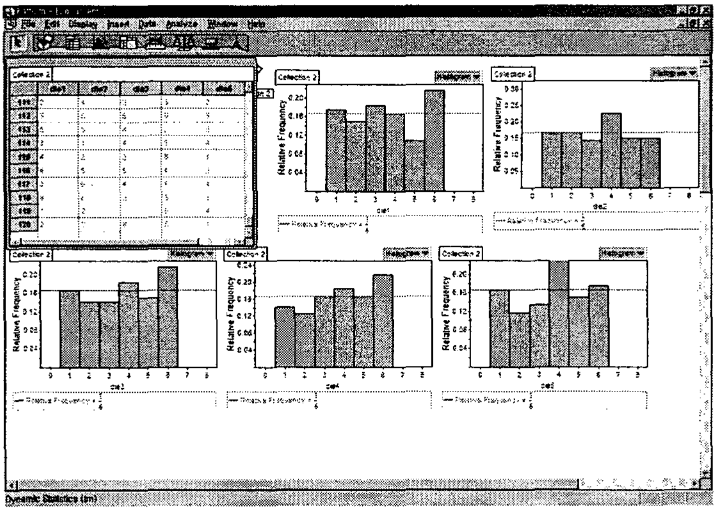
$=(0.5578,\ 0.6201)$ (김미경, 1994: 12)

그는 물리적 실험 결과 얻어진 상대도수가 윷의 곡면이 나올 이론적 확률로 자신이 구한 값인 0.5897와 거의 같은 값임을 지적하면서 이 상대도수 값이 통계적 확률의 추정값으로 의미가 있음을 암묵적으로 평가하고 있다.

박진경 외(1996)는 윷의 확률이 윷의 종류나 던지는 방법 등에 영향을 받는 확률이므로 이론적 확률로서 이를 다루는 것은 적지 않은 문제가 있음을 지적하였다. 그는 윷을 100번 던

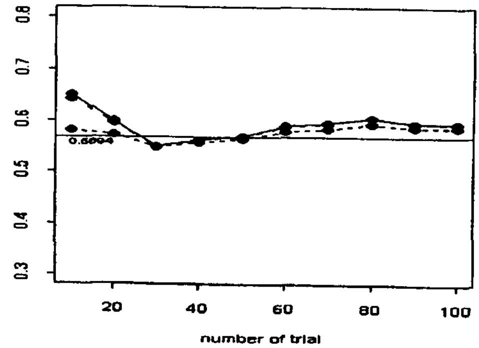


[그림 Ⅳ-4] 주사위를 12번 던진 시뮬레이션을 5번 실시한 결과



[그림 Ⅳ-5] 주사위를 120번 던지는 시뮬레이션을 5번 실시한 결과

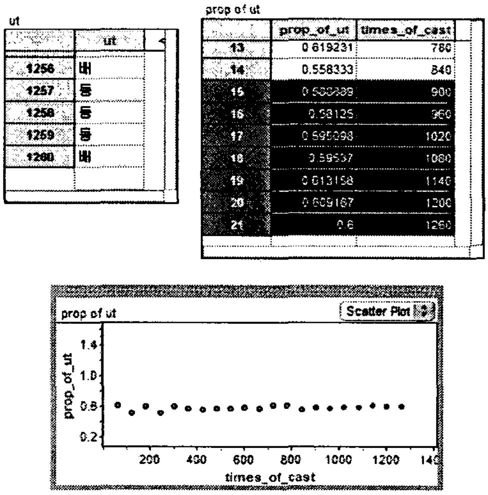
지는 물리적 실험으로부터 구한 상대도수 p를 이용하여 경험적 추정법인 최우추정량과 베이즈 추정량을 통해 윷의 확률을 추정하였다 (p.306). 이러한 경험적 추정법에 사용될 상대도수 p는 윷을 100번 던지는 과정에서 다음 그림과 같이 20번씩 시행 횟수가 누적될 때마다 상대도수를 각각 계산하여 시행 횟수가 증가함에 따라 윷의 상대도수가 변화하는 추이를 관찰함으로서 구하였다.



[그림 IV-6] 윷에 대한 상대도수 변화 추이 (박진경 외, 1996: 302)

윷의 곡면이 출현할 확률을 분석한 이러한 선행 연구의 결과를 바탕으로 컴퓨터 시뮬레이션 결과 얻어진 윷의 상대도수를 활용하여 윷의 통계적 확률을 추정해보자.

우선 윷의 곡면이 출현할 통계적 확률을 추정하기 위해서는 유한 번의 컴퓨터 시뮬레이션을 실시한 후 이로부터 적절한 상대도수를 얻을 필요가 있다. 상대도수의 극한으로 정의되는 통계적 확률의 추정에 사용될 의미 있는 상대도수를 구하기 위해서는 시행 횟수가 충분히 큰 것도 중요하지만 박진경 외(1996)의 연구에서처럼 그 상대도수가 시행 횟수의 누적적 증가에 따라 어떻게 변화하는지도 함께 고려되어야 할 것으로 보인다. 이런 맥락에서 Fathom을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션 과정에서 윷을 던지는 시행을 1260번 실시하는 동안 각 시행 횟수가 60번씩 누적될 때마다 윷의 곡면이 나오는 상대도수를 구하여 이를 하나의 그래프에 점으로 표시하도록 시뮬레이션을 고안하였다[12]. 이러한 컴퓨터 시뮬레이션 결과 학생들은 윷의 곡면이 나오는 상대도수는 시행 횟수가 누적될수록 약 0.59 정도의 값이 주로 나타남을 관찰할 수 있다[13].



[그림 IV-7] 윷의 곡면이 나오는 상대도수를 구하기 위한 컴퓨터 시뮬레이션 결과

12) 이 때 윷을 한 번 던져 곡면이 나올 확률은 김미경(1994)이 물리적 실험에서 구한 상대도수인 0.5897를 사용하였다. Fathom의 random함수에 의해 생성되는 0부터 1사이의 난수가 0.5897보다 작으면 윷의 곡면이, 그렇지 않으면 윷의 평면이 나오도록 설정하였다.

13) 컴퓨터 시뮬레이션 결과 윷의 곡면이 나오는 상대도수로 간주된 약 0.59는 물리적 실험 결과에서 얻어진 0.5897와 다소간의 차이가 있을 수 있다. 이 값은 통계적 확률인 모비율의 추정에 사용될 일종의 표본비율로서 표본비율의 값은 표본을 택하는 방법에 따라 다소간 차이가 있을 수 있으나 그 차이는 무시할 수 있을 정도로 작다.

14) 그림에서 '등'은 윷의 곡면을, '배'는 윷의 평면을 나타낸다.

이렇게 구한 상대도수를 사용하여 표본의 크기가 1260이고 표본비율이 0.59인 경우 모비율의 95% 신뢰구간을 구하면

$$[0.59-1.96\sqrt{\frac{0.59\cdot0.41}{1260}},\ 0.59+1.96\sqrt{\frac{0.59\cdot0.41}{1260}}]$$

$\fallingdotseq[0.562,\ 0.617]$과 같다. 이를 활용하여 윷의 곡면이 출현할 통계적 확률은 0.592부터 0.617 사이에 존재하는 값이라고 설명할 수 있다.

다음으로 상대도수를 활용하여 통계적 확률을 신뢰구간으로 추정하지 않고, 상대도수 0.59가 윷을 1260번이나 던지는 컴퓨터 시뮬레이션 결과 얻은 값으로 그 시행 횟수가 충분히 크기 때문에 윷의 곡면이 나올 통계적 확률을 간단히 0.59로 추정한 경우를 생각해 보자. 이와 같이 통계적 확률(모비율)을 0.59라고 하게 되면, 같은 방식으로 고안된 컴퓨터 시뮬레이션에서 윷을 1260번 던지는 컴퓨터 시뮬레이션을 다시 한 번 실시한 결과 윷의 곡면에 대한 상대도수가 0.59와 다를 때 이를 통계적으로 어떻게 다룰 것인지, 윷의 곡면이 출현하는 상대도수가 0.53처럼 통계적 확률 0.59와 다소 동떨어져 보이는 경우는 어느 정도로 나타나게 되는 것인지 등에 대해서 의미 있는 설명이 필요하다. 모비율 p가 알려져 있을 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$에 대하여

$$P(p-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\le\hat{p}\le p+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})=0.95$$

이 성립하므로[15], 통계적 확률(모비율) p를 0.59로 보는 경우 윷을 1260번 던지는 컴퓨터 시뮬레이션에서 윷의 곡면이 출현할 상대도수 $\hat{p}$가 다음 구간 ②에 속할 확률은 95%이다.

$$[0.59-1.96\sqrt{\frac{0.59\cdot0.41}{1260}},\ 0.59+1.96\sqrt{\frac{0.59\cdot0.41}{1260}}]$$

$\fallingdotseq[0.562,\ 0.617]\cdots$ ②

구간 ②로부터, Fathom의 random함수를 기반으로 하여 앞서 제시한 방식으로 고안된 컴퓨터 시뮬레이션에서 윷을 1260번 던지는 컴퓨터 시뮬레이션을 100번 실시할 경우 윷의 곡면이 출현하는 상대도수의 값 100개 중 대략 95개 정도는 0.562부터 0.617사이의 값이 되며, 0.53과 같이 0.59와 다소 동떨어져 보이는 상대도수는 약 5개 정도 나타날 수 있음을 설명할 수 있다.

V. 결 론

이 연구는 학교 수학에서 통계적 확률을 보다 의미 있게 지도하기 위한 구체적인 방안 탐색을 목적으로 하였다. 다수의 선행 연구들은 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 귀납적인 조작 활동을 통해 통계적 확률에 대한 효율적인 지도가 가능하다고 설명하고 있다.

이에 이 연구는 우선 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 통계적 확률이 지도될 때 그 지식의 성격이 어떻게 변화될 수 있는지를 그 구체적인 수업 안을 제시하고 있는 선행 연구 결과를 검토함으로서 살펴보았다. 이 과정에서 통계적 확률과 수학적 확률의 관계를 설명해 주는 큰 수의 법칙이 원래의 의미와는 다르게 교수학적으로 변화될 가능성이 있음을 발견하였으며, 학문적 지식으로서 큰 수의 법칙의 특성에 비추어 볼 때 이러한 가능성을 피하기 위해서는 모비율, 표본비율 등의 내용 요소가 함께 다루어져야 함을 확인하였다.

15) 모비율 p에 대하여 표본비율 $\hat{p}$는 표본의 크기 n이 클 때, 정규분포 $N(p,\ \frac{p(1-p)}{n})$에 가까워진다(교육인적자원부, 2004: 136).

두 번째로는 컴퓨터 시뮬레이션을 활용한 통계적 확률 지도가 가능하기 위해서는 교육과정에 수학적 확률이 정의될 수 없는 사건에 대해 통계적 확률을 고려해 보는 확률적 상황의 첨가가 필요함을 제안하였다. 또한, 유한 번의 시행 결과 얻어진 상대도수를 활용하여 무한 번의 시행을 전제로 하는 통계적 확률을 추정하는 과정이 현재 교육과정에서 다루어지고 있는 모비율의 추정이라는 학습 요소와 관련될 수 있음을 설명하였다. 이러한 사실을 토대로 수학적 확률을 정의할 수 없는 윷의 곡면이 출현할 통계적 확률을 Fathom을 통한 컴퓨터 시뮬레이션 결과 얻어진 상대도수를 활용하여 추정하는 방안을 수업 자료 예시로 제시하였다.

통계적 확률 등과 관련하여 발생할 수 있는 학생들의 오개념 유형을 구체적으로 확인하고 이를 타당하게 처치하기 위해 실제적인 확률지도 자료를 개발한 후 개발된 자료를 실제 수업에 투입하여 그 결과를 분석함으로서 현장의 확률 교수 학습 과정에 직접적으로 기여할 수 있는 연구는 이 연구 결과의 토대 위에서 후속 연구로서 진행하고자 한다.

참고문헌

교육인적자원부(1997a). **수학과 교육과정**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(1997b). **고등학교 교육과정 해설(수학)**. 서울: 대한교과서주식회사.

__________(2004). **고등학교 확률과 통계**. 서울: (주) 천재교육.

김미경(1994). **윷의 확률**. 고려대학교 대학원 석사학위 논문.

강병욱(1997). **고등학교 확률 교육에 관한 연구-교과서 분석을 중심으로-**. 창원대학교 교육대학원 교육학석사학위 논문.

강행고(1997). **PET를 이용한 확률개념의 교수·학습에 관한 연구**. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

김상길(1999). **컴퓨터 시뮬레이션 프로그램을 이용한 확률 및 기대값 지도에 대한 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

김해경 · 윤진희(2004). **확률과 통계: 이론적 기초**. 서울: 경문사.

마츠차카 가즈오(1995). **수학독본 4**. 서울 : 한길사.

박경미 · 임재훈(2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학 교과서 비교. **학교수학, 4**(2), 317-331.

박규홍 외(2002). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: (주) 교학사.

박배훈 외(2002). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: 법문사.

박종수(2003). **Fathom을 활용한 확률 및 통계 학습자료 개발 연구**. 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

박진경 · 박홍선(1996). 윷의 확률 추정에 대하여. **응용통계연구, 9**(2), 83-94.

신동선 · 류희찬(2002). **수학교육과 컴퓨터**. 서울: 경문사.

신양우(2004). **기초확률론**. 서울: 경문사.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

이강섭 외(2002). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: (주) 지학사.

이경화(1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

임석훈 외(2002a). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: (주) 천재교육.

임석훈 외(2002b). **고등학교 수학Ⅰ 교사용 지**

도서. 서울: (주) 천재교육.

임재훈 외(2002). **고등학교 수학 I**. 서울: (주) 두산.

정영진(1992). **수리통계학**. 서울: 희중당.

조성윤(2004). **Fathom을 활용한 고등학교 확률과 통계의 학습자료 개발 및 효과 분석**. 한국기술교육대학교 대학원 석사학위 논문.

Biehler, R. (1991). Computers in probability education. In R. Kapadia & M. Borovcnik (Eds.), *Chance encounters : Probability in education* (pp. 169-211). London: Kluwer Academic Publisher.

Bramald, R. (1994). Teaching probability. *Teaching Statistics, 16*(3), 85-89.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics.* London: Kluwer Academic Publishers.

Coburn, P. (1985). *Practical guide to computers in education*(2nd ed). Boston, MA: Addison-wesley.

Drier, S. H. (2000). *Children's probabilistic reasoning with a computer microworld.* Doctoral dissertation, University of Virginia.

Dooren, V. W., Bock, D. D., Depaepe, F., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002). Secondary school students' illusion of linearity: Expanding the evidence towards probabilistic reasoning. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 305-312. Norwich England: University of East Anglia.

Friel, S. N. (2003). Identifying a research agenda: The interaction of technology with the teaching and learning of data analysis and statistics. In A. D. Pateman, N. A. Dougherty, & B. J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education), 2,* 389-396. Honolulu, USA.

Freudenthal, H. (1972). The "Empirical law of large numbers" or "The stability of frequencies". *Educational Studies in Mathematics 4*(4), 484-490.

Hawkins, A., Jollife, F., & Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concept.* New York: Longman Publishing.

Jardine, D. (2000). Looking at probability through a historical lens. *Mathematics Teaching in the Middle School, 6*(1), 50-54.

Mises, R. V. (1957). *Probability, Statistics, and Truth,* George Allen and Unwin LTD., Great Britain.

NCTM(2000). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Quinn, R. J. (2000). Developing an understanding of the law of large numbers. *Australian Mathematics Teacher, 56*(1), 25-28.

Rade, L. (1983). Stochastics at school level in the computer. In D. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the 1st International Conference on Teaching Statistics, 1,* 19-33. UK: Teaching Statistics Trust.

Rubenstein, N. R., Craine, V. T., & Butts, R. T. (1998). *Integrated mathematics :*

Course I. Boston, EI: McDougal Littell.

Shaughnessy, J. M. (1981). Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions. In R. Schulte (Eds.), *Teaching Statistics and Probability.* Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics : Reflections and Directions. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Publishing company.

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Biddulph, & K. Carr (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 1*, 6-22. Rotorua, NZ: University of Waikato.

Shaughnessy, J. M., Canada, D., & Ciancetta, M. (2003). Middle school students' thinking about variability in repeated trials: A cross-task comparison. In A. D. Pateman, N. A., Dougherty, B. J., & Zilliox, J.(Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 159-165. Hawaii: University of Hawaii.

Tversky, A., & Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin, 76*(2), 105-110.

Watkins, E. A, Scheaffer, L. R., & Cobb, W. G. (2005). *Statistics in Action.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

A Study on the Statistical Probability Instruction through Computer Simulation

Shin, Bo Mi (Gwangju Science High School)
Lee, Kyung Hwa (Korea National University of Education)

The concept of probability in current school mathematics has been dealt with in the classic viewpoint (mathematical probability) and part of the frequency viewpoint and axiomatic viewpoint have been introduced. However, since the exact understanding of the probability concepts is not possible only with the classic viewpoint, we need to research further on methods to complement classic viewpoint and emphasize various aspects of probability concepts(Lee, Kyung Hwa, 1996). Therefore, this study is to find out optimal computer simulation plans in teaching statistical probability. For the purpose, it examines how the nature of mathematical knowledge may be changed when statistical probability is taught with a use of computer simulation based on the Theory of Didactical Situation presented by Brousseau(1997). Next, it identifies how probability curriculum should be reconstituted for introducing statistical probability through computer simulation. Finally, it develops specific teaching materials that introduce statistical probability using computer simulation based on the results obtained.

* **Key words** : probability education(확률 교육), statistical probability(통계적 확률), law of large numbers(큰 수의 법칙), computer simulation(컴퓨터 시뮬레이션)

논문접수 : 2006. 3. 29
심사완료 : 2006. 5. 6