

곡선보의 자유진동해석을 위한 고차 혼합요소

A New Higher-Order Hybrid-Mixed Element for Curved Beam Vibrations

김진곤† 박용국*

Kim, Jin-Gon Park, Yong-Kuk

(논문접수일 : 2005년 8월 2일 ; 심사종료일 : 2006년 3월 20일)

요 지

본 연구에서는 균일단면 뿐만 아니라 불균일 단면을 갖는 곡선보의 동적해석을 효과적으로 수행할 수 있는 새로운 2절점 곡선보 요소를 제안하였다. 전단변형률을 고려한 본 요소는 Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕하여 유한요소정식화를 수행하였다. 또한, 변위장에 대해 무절점 자유도를 추가적으로 도입하여 요소의 수치적 성능을 크게 향상시켰다. 계산의 효율성을 위해, 요소정식화의 최종단계에서 정치조건으로부터 응력매개변수들을 제거하고, 동적축약을 통하여 무절점 자유도 성분들 또한 최종적인 유한요소방정식에서 제거되어 일반적인 변위기저 요소와 같은 자유도를 가지는 유한요소방정식을 얻을 수 있다. 몇 가지 수치예제들에 대한 해석을 통하여, 무절점 자유도와 변위장에 일치하는 적절한 응력매개변수가 혼합요소의 수치적 거동에 미치는 영향을 분석하였으며, 본 연구에서 제안된 2절점 혼합요소가 곡선보의 동적해석에서 매우 정확하고 효율적임을 확인할 수 있었다.

핵심용어 : 곡선보요소, 혼합 정식화, 무절점 자유도, 자유진동해석, 동적축약

Abstract

In this study, we propose a new efficient 2-noded hybrid-mixed element for curved beam vibrations having a uniform and non-uniform cross section. The present element considering transverse shear strain is based on Hellinger-Reissner variational principle and introduces additional nodeless degrees for displacement field interpolation in order to enhance the numerical performance. The stress parameters are eliminated by the stationary condition and then the nodeless degrees are condensed out by the Guyan reduction. In the performance evaluation process of the present field-consistent higher-order element, we carefully examine the effects of field consistency and the role of higher-order interpolation functions on the hybrid-mixed formulation. Several benchmark tests confirm the superior behavior of the present hybrid-mixed element for curved beam vibrations.

Keywords : 2-noded curved beam element, Hybrid-mixed formulation, Nodeless degrees, Free vibration analysis, Guyan reduction

1. 서 론

곡선보는 헬과 더불어 공학의 여러 분야에서 널리 사용되는 구조요소일뿐 아니라 곡선보 요소의 특성을 갖고 있는 헬과 같은 일반적인 곡선 요소 해석 시 발생하는 문제점을 해결하기 위한 전단계 요소로서 많은 관심의 대상이 되고 있다. 이중곡률에 의한 영향을 제외하면, 곡선 보의 축대칭 헬 요소가 가지는 신장-굽힘간 상호작용, 강제모드 구현의 어려

움, 그리고 막-전단 강성과잉현상(membrane and shear locking) 등의 중요한 특징들을 대부분 가진다.

이러한 일차 변형 이론(first deformation theory)에 바탕한 뛰어난 수치거동을 가지는 곡선보 요소의 개발을 위해 지금까지 다양한 변분 이론이 적용되었으며, 이 중 최소 퍼텐셜 에너지 이론에 바탕한 변위 모델이 가장 일반적으로 사용되어 왔다. 하지만, 3차 함수를 사용하는 C^1 곡선보 요소나 또는 전단 변형을 고려한 저차의 보간 함수를 사용하는

† 책임저자, 정회원 · 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부 조교수
전화: 053-850-2711 ; Fax: 053-850-2710
E-mail: kimjg1@cu.ac.kr

* 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

• 이 논문에 대한 토론을 2006년 9월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2006년 12월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

요소는 두께가 곡률의 반경에 비해 아주 작은 경우의 아치문제에서 가성구속이 발생하여 강성과잉현상이 발생한다. 강성과잉현상이 발생되면 변위는 실제보다 작게 계산되며 심각한 요동을 가지는 응력분포를 나타낸다. 이러한 강성과잉문제를 해결하기 위해 제시된 대표적인 방법들로는 감차/선택적분요소 (reduced/selective integration element), 장-일치요소(field consistent element), 비등매개변수 요소(aniso parametric element), 변형률 요소 등이 있다.

이러한 변위 모델에 대한 또 다른 대안으로서, Saleeb등과 Kim등은 Hellinger-Reissner 변분이론에 바탕한 혼합요소들(hybrid-mixed element)을 제안하였다. 그러나 제안된 혼합 요소들은 장-일치(field consistency) 개념을 도입하여 강성과잉과 같은 수치적인 문제점은 완화시켰지만, 저차의 보간함수를 사용하는 경우 효율성이 높지 않은 문제점을 가진다. 따라서, 저차 혼합요소의 효율성을 향상시키기 위해, Kim등은 혼합 곡선 보요소에 무절점 자유도(nodeless degrees)를 도입하여 곡선보요소의 수치적인 문제점들을 해결하고 해의 수렴성을 크게 향상시켰다.

본 논문에서는, 이러한 무절점 자유도를 도입한 고차 혼합 곡선보 요소의 정식화를 균일 단면뿐만 아니라 불균일 단면을 가지는 곡선보의 자유진동해석에 적용하였다. 무절점 자유도를 가지는 고차 변위함수에 대응되는 적절한 응력매개변수(stress parameter)들을 선정하기 위해 Prathap등의 장-일치 개념을 도입하였다. 응력매개변수들은 정지조건(stationary condition)을 통하여, 그리고 도입된 무절점 자유도들은 동적 축약(Guyan reduction)을 통하여 요소

정식화의 최종단계에서 제거함으로써, 일반적인 변위 요소와 크기가 같은 (6×6)의 강성행렬 및 질량행렬을 유도하였다. 몇 가지 수치예제들에 대한 해석을 통하여, 본 논문에서 제안한 혼합곡선보요소의 자유진동해석에서 무절점 자유도와 장-일치된 응력매개변수가 미치는 수치적인 영향을 분석하였다. 이로부터, 제안된 2절점 혼합요소의 곡선보의 동적해석에 대한 정확성과 효율성을 확인할 수 있었다.

2. Hellinger-Reissner 변분이론

그림 1은 6개의 변위 자유도와 불균일 단면을 가지는 2절점 곡선보 요소의 기하학적 형상을 보여주고 있다. u 와 v 는 중립면에서 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향 변위를 나타내며, θ 는 z 방향 회전량을 나타내는 변위 성분이다. N 과 V 는 각각 접선 x 방향과 법선 y 방향의 내력들이며, M 은 모멘트 성분이다. 그림에서 하첨자 1과 2는 변위와 내력 성분들이 정의되는 절점을 의미한다. 고려된 곡선보 요소는 절점1에서 두께 h_1 과 절점2에서 두께 h_2 를 가지며, 초기 곡률 반경 R 과 요소 길이 l_0 를 가진다. 곡선보의 두께방향으로 수직변위가 일정하다고 가정하면, 중립면에서 두께방향으로 y 만큼 떨어진 지점에서의 접선과 법선방향의 변위성분 \bar{u} 와 \bar{v} 들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

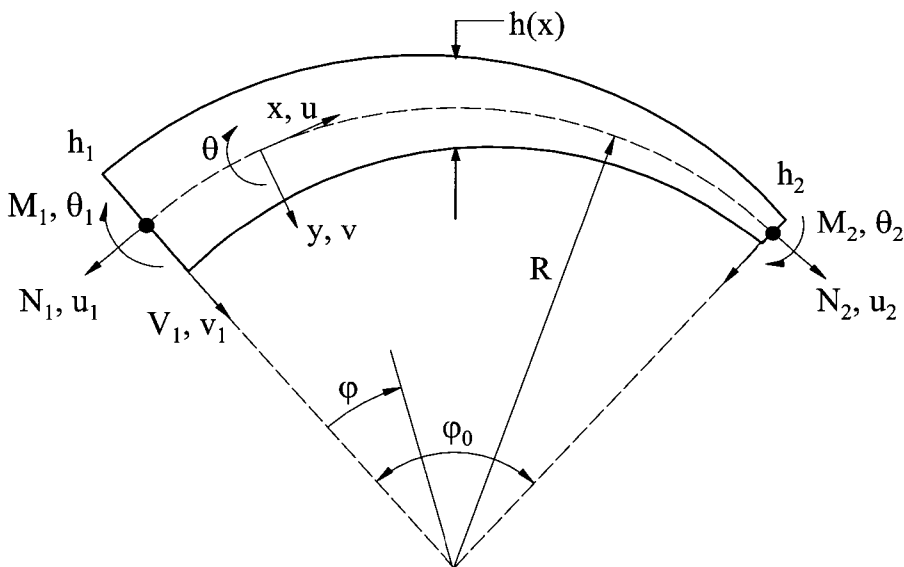


그림 1 불균일 단면을 가지는 2절점 곡선보의 형상 및 변위

고유진동수 ω 를 가지는 조화운동을 가정하고 고정된 시간에서 체적에 대한 운동에너지의 변동을 적분하면, 다음과 같이 곡선보에 대한 Hellinger-Reissner 복합수(functional)식으로 나타낼 수 있다.

$$\delta I_R = \delta \left\{ \int L_R dx - \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int \int_{h/2}^{h/2} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} dy dx \right\} = 0 \quad (2)$$

여기서, ρ 는 질량밀도를, 상첨자 T 는 전치행렬을 나타내며 L_R 은 에너지밀도(energy density)로서 다음과 같이 표현된다.

$$L_R = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{S} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3)$$

곡선보의 응력성분에 대한 합력(stress resultants) 벡터 $\boldsymbol{\sigma}$ 와 변형률 벡터 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 는 각각 $\boldsymbol{\sigma} = [N, V, M]^T$ 와 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_0, \gamma_0, \kappa]$ 이며, \mathbf{S} 는 응력 합력과 변형률 사이의 컴플라이언스 행렬을 나타낸다. Naghdi와 Reissner의 깊은 셸 이론(deep shell theory)으로부터 유도된 곡선 보 이론에 의해 중립면에서 y 만큼 떨어진 지점에서의 수직변형률 ε 과 전단변형률 γ 는 다음과 같다.

$$\varepsilon = \frac{1}{1-y/R} (\varepsilon_0 - y\kappa) \quad (4a)$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1-y/R} \quad (4b)$$

여기서, 중립면에서의 변형률과 변위에 대한 기하학적 관계식은 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \gamma_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} & -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{d}{d\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\Delta} \mathbf{u} \quad (5)$$

이 때, φ 는 원주방향 중심각을 나타낸다.

변형률 ε 과 γ 에 대응되는 응력 합력성분들은 다음과 같다.

$$N = \int_A \frac{E}{1-y/R} (\varepsilon_0 - y\kappa) dA \quad (6a)$$

$$V = \int_A \frac{kG\gamma_0}{1-y/R} dA \quad (6b)$$

$$M = - \int_A \frac{Ey}{1-y/R} (\varepsilon_0 - y\kappa) dA \quad (6c)$$

여기서, $(y/R) = 1$ 을 가정하면 응력에 대한 합력들을 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$N \approx EA(x) \left(1 + \frac{I_z(x)}{A(x)R^2} \right) \varepsilon_0 - \frac{EI_z(x)}{R} \kappa \quad (7a)$$

$$V \approx kGA(x)\gamma_0 \quad (7b)$$

$$M \approx EI_z(x)\kappa - \frac{EI_z(x)}{R} \varepsilon_0 \quad (7c)$$

이 때, E 는 탄성계수, G 는 전단계수, k 는 전단보정계수를, $A(x)$ 와 $I_z(x)$ 는 각각 요소내 임의의 위치에서 단면의 면적과 2차 관성 모우멘트를 나타낸다. 식 (7a)~(7c)로부터 다음과 같은 컴플라이언스(compliance) 행렬을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{EA(x)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{R} \\ 0 & \frac{E}{kG} & 0 \\ \frac{1}{R} & 0 & \frac{A(x)}{I_z(x)} + \frac{1}{R^2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. 변위 및 응력장의 가정

본 논문에서는 저차함수를 가지는 2절점 혼합 곡선보 요소의 고차의 진동모드에서의 수치적 효율성을 향상시키기 위해, 일반적인 선형의 Lagrange 보간함수에 $\xi(1-\xi)$, $\xi^2(1-\xi)$ 와 같은 무절점 자유도를 가지는 고차함수(bubble function)들을 도입하였다. 곡선보 요소의 굽힘 거동을 보다 정확하게 표현하기 위해 도입된 무차원 변수 $\xi = \varphi/\varphi_0 = x/l_0$ ($0 \leq \xi \leq 1$)로 표현되는 고차함수를 사용함으로써, 절점에서의 변위성분들은 다음과 같이 3차의 보간 함수를 가지게 된다.

$$u = (1-\xi)u_1 + \xi u_2 + \xi(1-\xi)a_1 + \xi^2(1-\xi)a_2 \quad (9a)$$

$$v = (1-\xi)v_1 + \xi v_2 + \xi(1-\xi)b_1 + \xi^2(1-\xi)b_2 \quad (9b)$$

$$\theta = (1-\xi)\theta_1 + \xi\theta_2 + \xi(1-\xi)c_1 + \xi^2(1-\xi)c_2 \quad (9c)$$

식 (9)를 다음과 같이 행렬식으로 나타내면

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{d} = [\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_h] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c \\ \mathbf{d}_h \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서, $\mathbf{d}_h = \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}^t$ 는 고차함수에 대응되는 요소 내부의 무절점 자유도들이며, $\mathbf{d}_c = \{\theta_1, \dots, \theta_2\}^t$ 는 일반적인 형태의 등매개 곡선 보요소 가지는 절점에서의 자유도 성분들을 나타낸다. \mathbf{N} 은 변위장에 대한 보간함수 행렬을 나타내며, \mathbf{N}_c 와 \mathbf{N}_h 는 각각 절점에서의 자유도와 요소내부의 무절점 자유도에 대응하는 변위함수 행렬을 나타낸다.

혼합유한요소정식화에서, 변위의 근사함수에 대응되는 적절한 응력매개변수를 선정하기 위해, 먼저 식 (5)의 전단 변형률에 대한 극한 거동을 살펴보고자 한다. 보가 거의 직선에 가깝고($R \rightarrow \infty$) 두께가 아주 얇아지는 경우($h/l_0 \rightarrow 0$), 전단 변형률이 무시할 정도로 작아진다. 따라서, 식 (5)와 (9)로부터 전단 변형률을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\gamma_0 = \frac{u}{R} + \frac{dv}{Rd\varphi} - \theta = \frac{dv}{l_0 d\xi} - \theta = \left(\frac{v_2 - v_1 + b_1}{l_0} - \theta_1\right) + (\theta_1 - \theta_2 - c_1 - 2\frac{b_1 - b_2}{l_0})\xi + (c_1 - c_2 - 3\frac{b_2}{l_0})\xi^2 + c_2\xi^3 \quad (11)$$

식 (11)에서, 전단 변형률 γ_0 이 0이 되면서, $c_2 \rightarrow 0$ 을 포함한 4개의 구속조건이 발생하게 된다. 이 중에서, 특히 c_2 가 0이 되는 구속조건은 불필요한 구속조건으로서, 요소 단위에서는 $d^3\theta/d\xi^3 \rightarrow 0$ 와 같은 가상구속조건(spurious constraint)을 발생시키게 된다. 이러한 가상구속조건은 존재하지 않은 전단에 대한 가상에너지를 정식화 과정에 도입하게 되어, 전단 강성과잉이나 전단력 계산에 심각한 편차를 발생시킨다. 따라서, 상기한 보의 극한적 거동에서 발생하는 가상구속을 제거하기 위하여, 전단 변형률이나 응력 합력에 대한 근사함수는 2차 함수로 가정해야 한다.

유사한 방법으로, 비신장 굽힘(inextensional bending)과 같은 극한조건에서, 식 (5)의 축방향 변형률을 살펴보면 b_2 가 0이 되는 가상구속조건이 발생함을 알 수 있다.

$$\epsilon_0 = \frac{du}{Rd\varphi} - \frac{v}{R} = \frac{du}{l_0 d\xi} - \frac{v}{R} = \left(-\frac{u_1}{l_0} + \frac{u_2}{l_0} + \frac{a_1}{l_0} - \frac{v_1}{R}\right) + \left(-2\frac{a_1}{l_0} + 2\frac{a_2}{l_0} + \frac{v_1}{R} - \frac{v_2}{R} - \frac{b_1}{R}\right)\xi + \left(-3\frac{a_2}{l_0} + \frac{b_1 - b_2}{R}\right)\xi^2 + \frac{b_2}{R}\xi^3 \quad (12)$$

따라서, 일반적인 응력장에서 발생하는 가상구속조건들을 제거하기 위해, 응력장의 근사를 위해서는 3차의 변위함수보다 한 차수 낮은 2차의 응력함수를 가지는 다음과 같은 응력매개변수들로 가정해야 한다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}(1, \xi, \xi^2) \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (13)$$

여기서, $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_1, \dots, \beta_9\}$ 는 응력매개변수를 나타내며, \mathbf{P} 는 응력에 대한 근사함수의 행렬을 나타낸다. 이상과 같이 3차의 변위함수와 2차의 응력함수를 사용하여 정식화한 본 논문에서 제안하고자 하는 2절점 혼합요소를 DCSQ2요소라 명명하였다.

DCSQ2요소와 같이 변위보간함수와 일관성을 가지는 적절한 응력함수로 가정하지 않고 변위장과 동차의 근사함수를 가지는 응력장을 가정하는 경우 곡선보의 정적해석에서 강성 과잉이나 응력요동과 같은 수치적인 문제점을 가지며, 일반적인 변위요소와 등가의 강성행렬을 가진다는 것이 Kim등(14)에 의해 보고된 바 있다. 이와 같이 3차의 변위함수와 동차인 다음과 같은 3차의 응력함수를 사용하여 정식화한 2절점 혼합요소를 DCSC2요소라 명명하였다.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{P}(1, \xi, \xi^2, \xi^3) \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (14)$$

또한, 혼합곡선보요소의 자유진동해석에서 무절점자유도의 도입에 의한 수치적 영향을 살펴보기 위하여 변위장에 대해서 일반적인 1차의 Lagrange 다항함수를 보간함수로 가지는 \mathbf{N}_c 만으로 근사화하는 경우, 가상구속조건이 발생하지 않는 변위장에 대한 적절한 응력함수는 상수로 가정하여야 하며 이러한 2절점 혼합요소를 DLSC2요소라 명명하였다. 이 경우 곡선보의 정적해석에서 비록 강성과잉현상은 완화시키지만 수치적 수렴성은 뛰어나지 않은 것으로 알려져 있다. 본 논문에서 정식화하여 살펴보고자 하는 혼합유한요소들의 특징을 정리하면 표 1과 같다.

4. 유한요소 정식화

본 논문에서 제안하고자 하는 DCSQ2 요소의 강성행렬을 유도하기 위해, 변위와 응력 합력에 대한 식 (10)과 (13)을 식 (2)에 대입하면 다음과 같은 식으로 나타낸다.

$$\Pi_R = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G} \mathbf{d} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} - \frac{1}{2} \omega^2 \mathbf{d}^T \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (15)$$

여기서,

$$\mathbf{H} = \int_V \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dV \quad (16)$$

표 1 본 논문에서 정식화된 혼합유한요소들의 특징

| Displacement Approximation | Stress Approximation | Designation | Consistency |
|----------------------------|----------------------|-----------------|--------------|
| Linear | Constant | DLSC2 | Consistent |
| Cubic | Cubic | DCSC2 | Inconsistent |
| Cubic | Quadratic | DCSQ2 (present) | Consistent |

$$\mathbf{G} = \int_c \mathbf{P}^T \Delta \mathbf{N} dx = \int_c \mathbf{P}^T \Delta [\mathbf{N}_c : \mathbf{N}_h] dx = [\mathbf{G}_c : \mathbf{G}_h] \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = \int_c \mathbf{N}^T \Delta \mathbf{N} dx \quad (18)$$

이 때, 질량행렬 \mathbf{M} 은 강성행렬에서 사용되는 변위장과 일치하는 변위함수를 사용한 일관 질량행렬(consistent mass matrix)이며, 행렬 Δ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta = \begin{bmatrix} \rho A(x) & 0 & 0 \\ 0 & \rho A(x) & 0 \\ 0 & 0 & \rho I_z(x) \end{bmatrix} \quad (19)$$

벡터 \mathbf{d} 와 $\boldsymbol{\beta}$ 에 대해 범함수(functional)의 평형조건을 식 (15)에 적용하면 다음과 같은 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc} & \mathbf{K}_{ch} \\ \mathbf{K}_{hc} & \mathbf{K}_{hh} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{cc} & \mathbf{M}_{ch} \\ \mathbf{M}_{hc} & \mathbf{M}_{hh} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_c \\ \mathbf{d}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

여기서 성분 \mathbf{K}_{ij} 와 \mathbf{M}_{ij} 는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{G}_i^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}_j \quad (i \text{ and } j = c, h) \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_c \mathbf{N}_i^T \Delta \mathbf{N}_j dx \quad (i \text{ and } j = c, h) \quad (22)$$

무절점 자유도 \mathbf{d}_h 는 요소 운동방정식의 정식화단계에서 자유도를 증가시키므로, 동적축약(kinematic condensation 또는 Guyan reduction)을 통하여 요소 최종 방정식에서 제거하였다. 동적축약과 정지조건(stationary condition)을 통하여 무절점 자유도 \mathbf{d}_h 와 응력매개변수 $\boldsymbol{\beta}$ 를 제거하면, 최종적인 요소의 운동방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$[\mathbf{K}_e - \omega^2 \mathbf{M}_e] \mathbf{d}_c = \mathbf{0} \quad (23)$$

여기서, 축약된 요소 강성행렬 \mathbf{K}_e 와 질량행렬 \mathbf{M}_e 는 다

음과 같다.

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_{cc} - \mathbf{K}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{K}_{hc} \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_{cc} + \mathbf{K}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hh} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{K}_{hc} - \mathbf{K}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{M}_{hc} - \mathbf{M}_{ch} \mathbf{K}_{hh}^{-1} \mathbf{K}_{hc} \quad (25)$$

따라서, 요소는 이제 절점에서의 변위에 대한 자유도성분만을 변수로 갖는 강성행렬과 질량행렬형태의 고유치문제로 다룰 수 있게 된다.

4. 수치 예제

본 절에서는, 제안하고자 하는 고차 혼합요소인 DCSQ2 요소의 곡선보의 자유진동해석에 대한 수치적 성능을 평가하고자 한다. 이를 위해 여러 문헌들에 보고된 수치예제들에 대해서 해석을 수행한 후 그 결과를 비교하고자 한다.

4.1 단순지지 직선보

$R/L=100$ 이고 $R\phi_0=L$ 인, 단순지지된 직선보(nearly straight simply-supported beam)에서 전단강성과잉현상을 살펴 보기 위하여, 보의 길이가 L , 두께가 h , 그리고 단면의 폭이 b 인 단순지지보의 3번째까지 고유진동수에 대한 수치해석결과를 다음과 같은 이론해와 비교하였다.

$$\frac{\rho r_1^2}{kG} \omega_n^4 - \omega_n^2 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2 r_1^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2 r_1^2}{L^2} \frac{E}{kG} \right) + \frac{\alpha^2 n^4 \pi^4}{L^4} = 0 \quad (26)$$

여기서,

$$\alpha^2 = \frac{EI_z}{\rho A} \quad r_1^2 = \frac{I_z}{A}$$

수치계산을 위하여 단면의 폭 $b=1\text{in}$, 길이 $L=10\text{in}$, 물성치는 $E=3 \times 10^7 \text{psi}$, $\nu=0.3$, $k=0.8497$, $\rho=0.02736$

slugs ft/in⁴를 사용하였다.

그림 2와 3은 단순지지된 아주 얇은($L/h=1000$) 직선보의 1차 및 2차 고유진동수에 대한 본 논문에서 정식화한 혼합요소들의 수렴성을 각각 보여주고 있다. 제안된 혼합요소의 수치적 신뢰성을 확인하기 위해 유하상등에 의해 제안된 3차의 변위장을 가지는 2절점 변형률 요소인 LCCS(CO)와 수렴성을 비교하였다. 이론해에 수렴하는 경향은 1차 모드에서는 DCSQ2, LCCS(CO), DCSC2, DLSC2의 순이었으며, 2차 모드에서는 DCSQ2, DCSC2, LCCS(CO), DLSC2의 순으로 나타났다. 저차 혼합요소인 DLSC2요소는 비록 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 가지지만 동적해석에서 해의 수렴성이 매우 떨어짐을 알 수 있었으며, 고차 혼합요소인 DCSC2요소는 비록 부적절한 응력매개변

수를 가지지만 2차모드에서 LCCS(CO) 요소보다 뛰어난 수렴성을 보여주었다. 그림 4는 6차의 고차진동모드에서 혼합요소에서 무절점 자유도의 도입과 장-일치된 적절한 응력매개변수가 미치는 수치적 영향을 보의 두께를 변화시키면서 살펴보았다. 해석결과로부터 혼합요소를 이용한 곡선보의 자유진동해석에서 적절한 응력매개변수의 사용보다 고차함수의 사용이 훨씬 큰 영향을 미치는 것을 알 수 있다.

4.2 양단 고정 아치

다음으로 그림 5와 같은 양단이 고정된 90° 아치에 대하여 전단효과와 회전관성을 고려하여 고유진동수를 구하였다. 그림 6과 7은 각각 2차 진동모드와 5차 진동모드에 대한 고

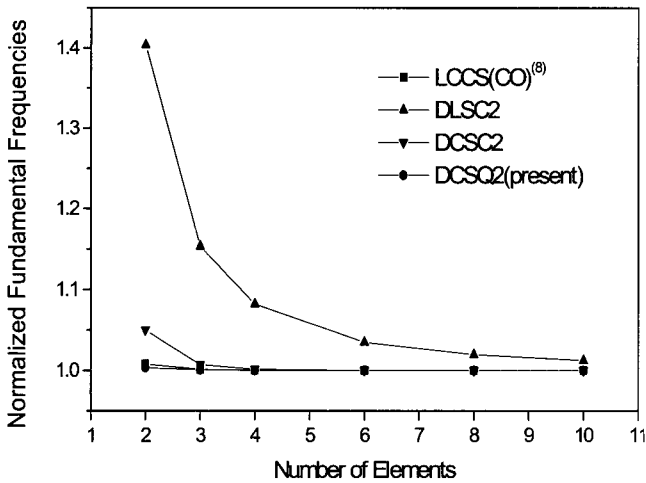


그림 2 단순지지된 직선보의 1차 고유진동수의 수렴성($L/h=1000$)

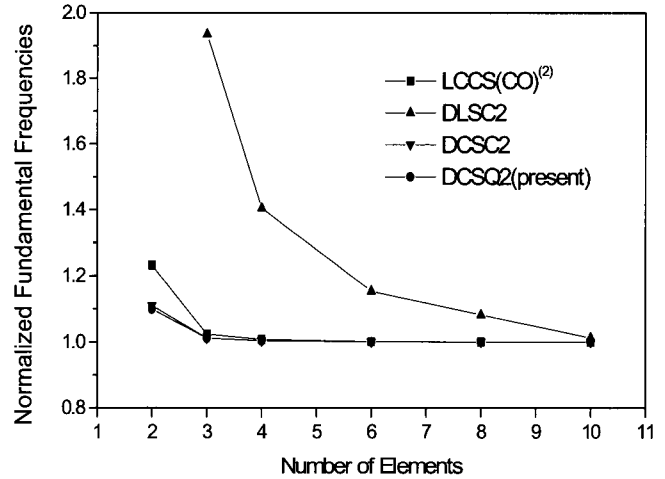


그림 3 단순지지된 직선보의 2차 고유진동수의 수렴성 ($L/h = 1000$)

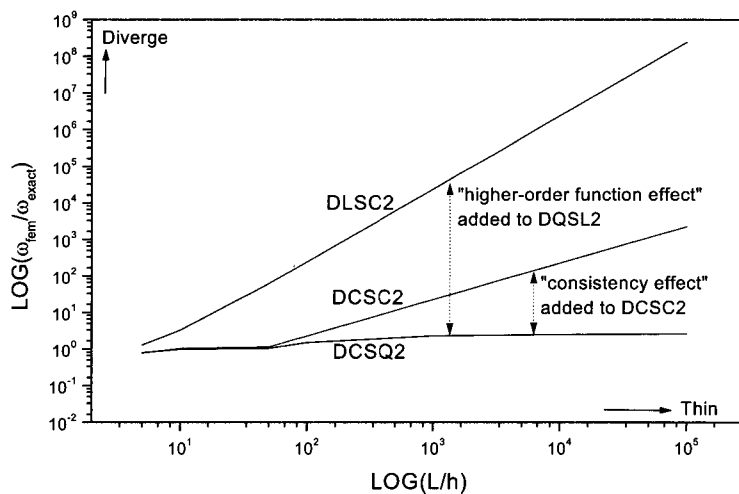


그림 4 고차보간함수 및 장-일치된 응력매개변수가 혼합요소의 자유진동해석에 미치는 영향(6차 고유진동수)

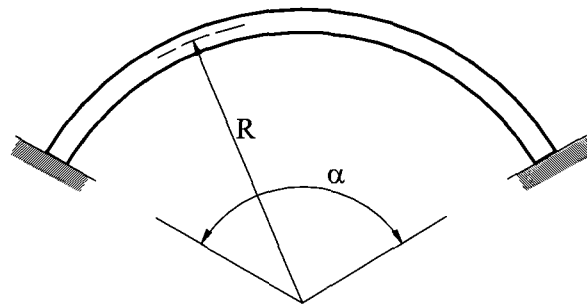


그림 5 양단 고정 아치의 기하학적 모양

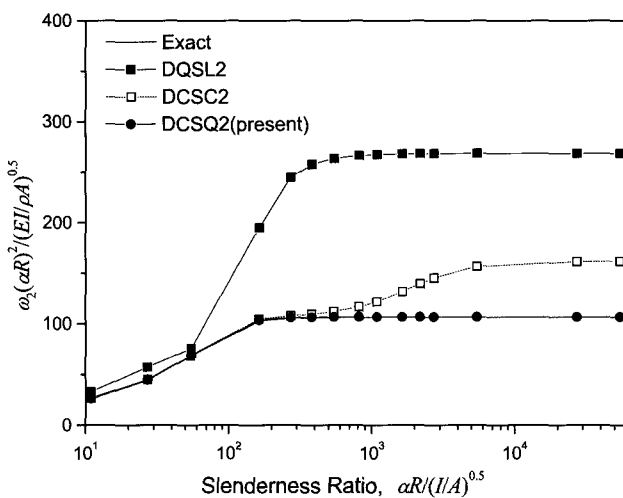


그림 6 양단 고정 아치의 두께에 따른 2차 고유진동수의 변화

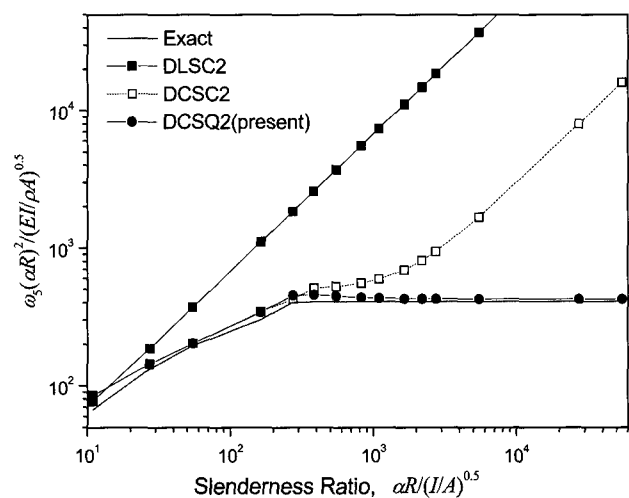


그림 7 양단 고정 아치의 두께에 따른 5차 고유진동수의 변화

유진동수의 두께에 대한 변화를 보여주고 있다. 저차 혼합 요소는 2차 고유진동수보다 5차 고유진동수에서 보의 두께가 얇아짐에 따라 오차가 급격하게 증가함을 알 수 있다. 이로부터 가상에너지를 제거할 수 있는 적절한 응력매개변수를 사용하였다고 하더라도, 저차의 보간함수를 사용하는 혼합요소인 DQSL2 요소는 고차 진동모드의 예측에 상당한 문제점을 가짐을 다시 한 번 확인할 수 있다. DCSC2 요소는 비록 고차함수를 사용하고 있지만 부적절한 응력매개변수로 인하여 발생하는 가상에너지로 인하여 두께가 $R/h > 70$ 로 얇아지는 경우에는 급격하게 오차가 증가함을 알 수 있다. 하지만, 무절점 자유도를 도입하고 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 사용한 DCSQ2 요소는 보의 두께가 아주 얇아지더라도 고차 굽힘모드를 잘 나타내고 있다.

4.3 ힹ지 아치

그림 8은 양단이 단순지지된 아치(hinged arch)를 보여주고 있다. 그림 6은 이러한 양단 단순지지된 아치에서 α 가

10도부터 350도까지 변하는 경우 본 논문에서 제안된 혼합 요소 3개(12 d.o.f.)만을 사용하여 얻은 1차 고유진동수(rad/s)의 변화를 보여주고 있다. 본 해석을 통하여 곡선보의 곡률 변화에 대한 요소의 수치적 거동과 곡선보의 진동특성에 곡률이 미치는 영향 등을 살펴볼 수 있다. 수치해석에 사용된 기하학적 치수와 물성치들은 $R=12\text{in}$, $E=3.04 \times 10^7 \text{psi}$, $\rho = 0.02736 \text{ slugs ft/in}^4$, $A=0.1563 \text{in}^2$, $I_z = 8.138 \times 10^{-4} \text{in}^4$, $h=0.25\text{in}$, $\nu=0.3$, $k=0.8497$ 이다.

그림 9에서 기준값은 3차의 다항함수와 5개의 푸리에급수를 사용한 Leung 등의 푸리에 p -요소(Fourier p -element) 1개를 사용하여 구한 결과를 사용하였다. 본 논문의 DCSQ2 요소는 비록 깊은 셸 이론(deep shell theory)에 바탕하여 정식화하였지만 얇은 곡선보부터 깊은 곡선보까지 전 각도에서 Leung 등의 결과와 비슷한 해석결과를 보여주고 있다. 하지만, 깊은 셸 이론에 바탕하고 해석에서 본 DCSQ2 요소와 동일한 개수의 자유도를 사용한 Raveendranath 등의 2절점 곡선보요소인 MFE는 비록 깊은 셸 이론에 바탕하였지만 각도가 100도 이상 커질수록 그 차이가 조금씩 커지는 경

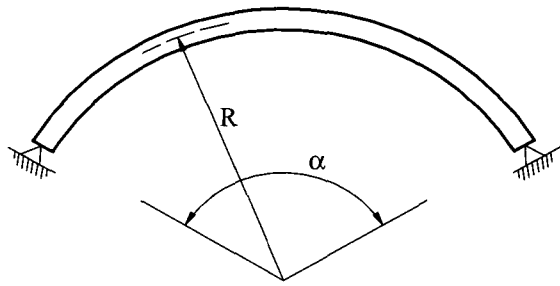


그림 8 현저 아치의 기하학적 모양

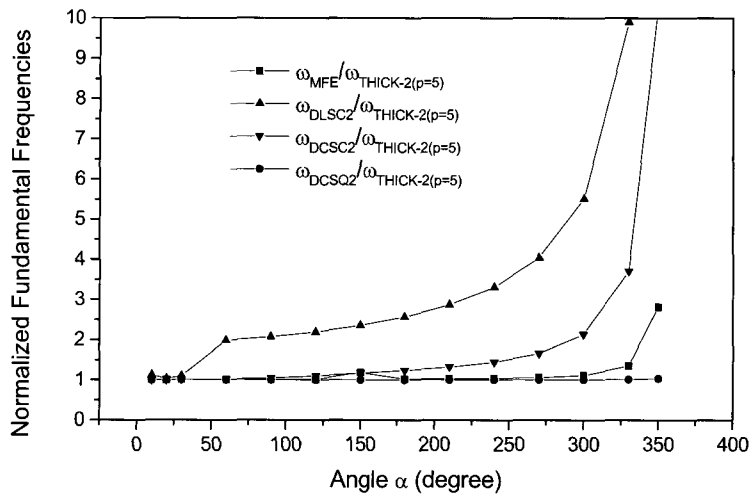


그림 9 현저 아치의 1차 고유진동수에 대한 곡률의 영향

향을 보이고 있다. 3차의 변위함수와 3차의 응력함수를 가지는 DCSC2요소는 100도 이후부터, 선형의 변위함수와 일정한 응력함수를 가지는 저차의 DLSC2요소는 30도 이후부터 오차가 급격하게 증가하는 경향을 보이고 있다. 이로부터 본 논문에서 제안된 3차의 변위함수와 2차의 적절한 응력함수를 가지는 DCSQ2요소의 수치적 효율성과 정확성을 다시 한 번 확인할 수 있었다.

4.3 테이퍼진 외팔보 아치

다음으로 본 논문에서 제안된 혼합요소인 DCSQ2 요소를 이용하여, 그림 10과 같이 불균일한 단면을 가지는 테이퍼진 외팔보 아치(tapered cantilever arches)를 해석하였다. 불균일한 단면에서, 두께는 고정단에서 h_1 을 자유단에서 $h_2 = h_1/2$ 로 보의 길이를 따라 선형적으로 변한다. 전단보정 계수 $k=0.83$ 이고 프와송 비 $\nu=0.3$ 을 가진다. 단면적의 회전반경(radius of gyration)은 $r_1 = \sqrt{I_x/A}$ 이고, $\alpha R/r_1$ 이 10과 20을 가지는 두가지 형태의 아치를 5개의 DCSQ2요

소를 이용하여 해석하였다. 테이퍼진 외팔보 아치들의 1차부터 3차까지의 고유진동수 계수값 ($C_n = \omega_n L^2 \sqrt{\rho A_1 / EI_{z1}}$)들을 기존의 문헌들에 발표된 해석결과들과 함께 표 2에 비교 제시하였다. 본 논문의 DCSQ2요소를 사용하여 구한 변위계를 가지는 외팔보 아치의 자유진동해석결과도 Leung등의 THICK-1요소, Raveendranath등의 MFE요소 그리고

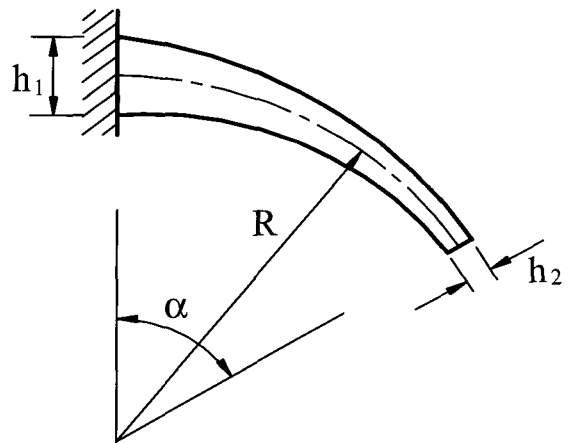


그림 10 테이퍼진 외팔보 아치의 기하학적 형상

표 2 테이퍼진 외팔보아치의 3차까지의 고유진동수 계수 C_n ($n=1, 2, 3$)

| α | $\frac{h_2}{h_1}$ | Methods | $\alpha R / r_1 = 10$ | | | $\alpha R / r_1 = 20$ | | |
|----------|-------------------|--------------|-----------------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|
| | | | C_1 | C_2 | C_3 | C_1 | C_2 | C_3 |
| 10 | 0.5 | DCSQ2 | 3.563 | 13.731 | 29.195 | 3.757 | 16.729 | 39.658 |
| | | THICK-1 [17] | 3.562 | 13.700 | 28.920 | 3.757 | 16.720 | 39.490 |
| | | MFE [18] | 3.575 | 13.650 | 28.620 | 3.766 | 16.710 | 39.320 |
| | | Rossi [19] | 3.552 | 13.690 | 29.050 | 3.743 | 16.660 | 39.470 |
| | 1 | DCSQ2 | 3.229 | 14.283 | 31.817 | 3.437 | 19.024 | 46.889 |
| | | THICK-1 | 3.231 | 14.210 | 31.490 | 3.442 | 19.030 | 46.660 |
| Rossi | | 3.229 | 14.280 | 31.740 | 3.437 | 19.020 | 46.820 | |
| 20 | 0.5 | DCSQ2 | 3.569 | 13.525 | 29.176 | 3.763 | 16.576 | 39.980 |
| | | THICK-1 | 3.569 | 13.470 | 28.880 | 3.764 | 16.560 | 39.810 |
| | | MFE | 3.581 | 13.430 | 28.600 | 3.772 | 16.560 | 39.660 |
| | | Rossi | 3.557 | 13.480 | 29.030 | 3.749 | 16.510 | 39.800 |
| | 1 | DCSQ2 | 3.234 | 13.865 | 31.789 | 3.444 | 18.755 | 46.912 |
| | | THICK-1 | 3.238 | 13.710 | 31.400 | 3.449 | 18.740 | 46.650 |
| Rossi | | 3.233 | 13.860 | 31.710 | 3.443 | 18.750 | 46.840 | |
| 40 | 0.5 | DCSQ2 | 3.593 | 12.886 | 29.122 | 3.789 | 16.025 | 41.293 |
| | | THICK-1 | 3.596 | 12.770 | 28.750 | 3.792 | 16.000 | 41.110 |
| | | Rossi | 3.579 | 12.840 | 28.980 | 3.775 | 15.960 | 41.130 |
| | | DCSQ2 | 3.256 | 12.950 | 31.693 | 3.469 | 17.850 | 47.068 |
| | 1 | THICK-1 | 3.267 | 12.650 | 31.080 | 3.477 | 17.780 | 46.700 |
| | | Rossi | 3.251 | 12.940 | 31.620 | 3.467 | 17.840 | 46.990 |
| 60 | | 0.5 | DCSQ2 | 3.633 | 12.153 | 29.112 | 3.832 | 15.267 |
| | THICK-1 | | 3.642 | 11.990 | 28.640 | 3.837 | 15.230 | 43.170 |
| | MFE | | 3.648 | 12.010 | 28.480 | 3.842 | 15.230 | 43.130 |
| | Rossi | | 3.616 | 12.100 | 28.970 | 3.817 | 15.200 | 43.230 |
| | 1 | DCSQ2 | 3.293 | 12.091 | 31.595 | 3.511 | 16.726 | 47.567 |
| | | THICK-1 | 3.315 | 11.690 | 30.680 | 3.523 | 16.600 | 47.050 |
| Rossi | | 3.280 | 12.060 | 31.510 | 3.507 | 16.710 | 47.460 | |
| 80 | 0.5 | DCSQ2 | 3.689 | 11.444 | 29.278 | 3.894 | 14.437 | 46.019 |
| | | THICK-1 | 3.705 | 11.240 | 28.710 | 3.901 | 14.390 | 45.720 |
| | | Rossi | 3.667 | 11.380 | 29.110 | 3.877 | 14.370 | 45.810 |
| | | DCSQ2 | 3.346 | 11.324 | 31.587 | 3.571 | 15.595 | 48.729 |
| | 1 | THICK-1 | 3.382 | 10.840 | 30.360 | 3.587 | 15.430 | 48.080 |
| | | Rossi | 3.322 | 11.280 | 31.460 | 3.563 | 15.570 | 48.580 |
| 90 | | 0.5 | DCSQ2 | 3.723 | 11.113 | 29.479 | 3.931 | 14.024 |
| | THICK-1 | | 3.744 | 10.890 | 28.870 | 3.940 | 13.970 | 47.060 |
| | MFE | | 3.743 | 10.950 | 28.830 | 3.942 | 13.970 | 47.060 |
| | Rossi | | 3.699 | 11.040 | 29.300 | 3.913 | 13.950 | 47.190 |
| | 1 | DCSQ2 | 3.378 | 10.976 | 31.657 | 3.608 | 15.061 | 49.627 |
| | | THICK-1 | 3.422 | 10.470 | 30.290 | 3.626 | 14.880 | 48.920 |
| Rossi | | 3.347 | 10.920 | 31.500 | 3.598 | 15.030 | 49.440 | |

Rossi등의 유한요소 해석결과들과 잘 일치하고 있음을 확인할 수 있다. $\alpha R/r_1=10$ 인 경우 $h_2/h_1=1$ 인 균일한 단면을 가지는 아치보다 $h_2/h_1=0.5$ 인 불균일한 단면을 가지는 아치의 1차 고유진동수가 모든 경우 10% 이상 증가하고 있음을 알 수 있다. 하지만, 2차 고유진동수는 $\alpha=10^\circ$ 에서는 약 4% 감소하지만 각도가 커질수록 차이가 감소해지면서 $\alpha=90^\circ$ 에서는 약간 증가하는 흥미로운 경향을 보이고 있다. 해석을 통하여 $h_2/h_1=0.5$ 의 불균일 단면을 가지는 아치는

$h_2/h_1=1$ 인 균일 단면보의 경우보다 중량은 25% 정도 감소시키면서 1차 고유진동수는 10% 이상 증가되는 동적 강성이 증대되는 효과를 가짐을 알 수 있다.

5. 결 론

본 연구에서는 균일단면 뿐만 아니라 불균일단면을 가지는 곡선보의 동적해석을 효과적으로 수행할 수 있는 새로운

고차 혼합요소를 제안하였다. 본 논문에 기술된 수치예제뿐만 아니라 다양한 여러 수치예제들에 대한 동적 해석을 통하여 제안된 요소의 효율성과 정확성을 검증할 수 있었다. 제안된 요소는 다음과 같은 특징을 가지고 있다.

첫째, 강성과잉과 수치적인 문제점을 제거하기 위하여 장일치 개념을 적용하여 변위장에 대응하는 적절한 응력매개변수를 선정하였다.

둘째, 곡선보의 고차진동모드 예측의 정확성과 수렴성을 높이기 위하여 변위함수에 무절점 자유도를 도입하였다.

셋째, 동적축약과 정치조건을 이용하여 일반적인 형태의 요소강성행렬을 최종적으로 구하여 수치계산상의 효율성을 높였으며, 이로 인한 정확도의 손상은 무시할 수준이었다. 또한, 혼합 곡선보요소에서 장일치 개념을 적용한 응력매개변수와 무절점 자유도의 도입이 동적해석에 미치는 수치적 영향을 고찰하였으며, 본 논문에서 제안한 3차의 변위함수와 이에 대응하는 2차의 응력함수를 가지는 DCSQ2요소의 곡선보의 동적해석에 대한 뛰어난 수치적 정확성을 확인할 수 있었다.

참 고 문 헌

- 이병구, 오상진 (1996) 원호형 곡선보의 면외 자유진동에 관한 수치해석적 연구, 한국전산구조공학회논문집, 8 (1), pp.133~139.
- 유하상, 신호철 (1997) 곡선보 요소의 고유치 해석에서 질량 행렬의 영향, 대한기계학회논문집, 21(2), pp.288~296.
- 이병구, 박광규, 모정만, 이재만 (1998) 변단면 수평 곡선보의 자유진동에 관한 연구, 한국전산구조공학회논문집, 11(3), pp.155~164.
- 서광진, 민병철, 김문영 (2000) 곡률이 변하는 박벽 곡선보의 3차원 자유진동 및 좌굴해석, 한국전산구조공학회논문집, 13(3), pp.321~328.
- 김진곤, 노병국 (2003) 혼합 유한요소를 이용한 축대칭 쉘의 정동적해석, 한국전산구조공학회논문집, 16(2), pp.165~172.
- Dawe, D.J. (1974) Numerical Studies Using Circular Arch Finite Elements, *Computers and Structures.*, 4, pp.729~740.
- Stolarski, H., Belytschko, T. (1983) Shear and Membrane Locking in Curved C^0 Elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41, pp.279-296.
- Noor, A.K., Peters, J.M. (1981) Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Analysis of Curved Beams, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 17, pp.615~631.
- Stolarski, H., Belytschko, T. (1982) Membrane Locking and Reduced Integration for Curved Elements, *Journal of Applied Mechanics*, 49, pp.172~176.
- Babu, C.R., Prathap, G. (1986) A Linear Thick Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 23, pp.1313~1328.
- Prathap, G., Babu, C.R. (1986) An Isoparametric Quadratic Thick Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 23, pp.1583~1600.
- Tessler, A., Spiridigliozzi, L. (1986) Curved Beam Elements with Penalty Relaxation, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 23, pp.2245~2262.
- Saleeb, A.F., Chang, T.Y. (1987) On the Hybrid-Mixed Formulation C^0 Curved Beam Elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 60, pp.95~121.
- Kim, J.G., Kim, Y.Y. (1998) A New Higher-Order Hybrid-Mixed Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 43, pp.925~940.
- Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. (1989) *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, p.630
- Rao, S.S. (2004) *Mechanical Vibrations*, 4th Edition, Pearson Prentice Hall, p.1078
- Leung, A.Y.T., Zhu, B. (2004) Fourier p-Elements for Curved Beam Vibrations, *Thin-Walled Structures*, 42, pp.39~57.
- Raveendranath, P., Singh, G., Pradhan, B. (1999) A Two-Noded Locking-Free Shear Flexible Curved Beam Element, *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 44, pp.265~280.
- Rossi, R.E., Laura, P.A.A. (1990) Dynamic Stiffening of an Arch Clamped at One End Free at the Other, *Journal of Sound and Vibration*, 160, pp.190~192.