
전역통과 시스템에 대한 Deconvolution 필터링 기법

김성진*

Deconvolution Filtering Method for All-pass Systems

Sung-jin Kim*

요 약

본 논문에서는 FIR 근사를 기반으로 한 전역통과 시스템에 대한 deconvolution 필터링 기법을 제안한다. 제안한 기법은 안정적인 non-causal deconvolution 필터를 FIR 근사에 의해 안정적인 causal deconvolution 필터로 변환시키는 것이다. 본 논문에서 보인바와 같이 전역통과 시스템에 대한 deconvolution 필터의 임펄스 응답은 전역통과 시스템 자체의 임펄스 응답의 거울 영상(mirror image)임을 알 수 있다. 이와 같이 전역통과 시스템에 대한 임펄스 응답과 그 시스템의 deconvolution 필터에 대한 임펄스 응답의 대칭성 때문에, 제안한 기법은 전역통과 필터의 차수에 상관없이 동일하게 적용할 수 있다. 제안한 기법의 성능을 보이기 위하여 1차, 2차 및 400차의 전역통과 시스템에 대한 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 포함한다.

ABSTRACT

In this paper, a deconvolution filtering method for all-pass systems based on FIR approximation is proposed. The proposed method enables us to obtain a causal stable deconvolution filter by FIR approximating a non-causal stable deconvolution filter to a causal stable one. As we can see in this paper, the impulse response of the deconvolution filter for all-pass system is simply the mirror image of the impulse response for all-pass system itself. Due to this symmetric property between all-pass system itself and its deconvolution filter, this method can be applied to all-pass systems without special limitation of the system's order. In order to verify the performance of the proposed method, computer simulation results for 1st-, 2nd- and 400th-order all-pass systems are included

키워드

전역통과 시스템, Deconvolution 필터링, FIR 근사, 안전한 Non-causal Deconvolution 필터,
안전한 Causal Deconvolution 필터, 대칭성

I. 서 론

어떤 채널을 통해 전파된 신호를 효과적으로 deconvolving 하는 기법을 개발하는 일은 매우 중요하다. 왜냐하면, 이것은 그 채널의 원래의 입력을 예측할 수 있는 수단을 제공하기 때문이다. 일반적으로 채널을 통해 전파된 신호를

분석하기 위한 전체 과정 중에서 deconvolution 필터를 구하는 일은 매우 어려운 단계에 속한다. 그러나 역 시스템 (inverse system) 이라고도 일컫는 deconvolution 필터는 채널의 출력으로부터 그 채널의 입력을 예측하는 수단을 제공하므로 신호 해석에 아주 필요한 도구이다[1,2].

기존의 전통적인 방법에서 채널의 deconvolution 필터

를 얻기 위해서는 그 채널의 전달함수의 영점(zeros) 들에 해당되는 deconvolution 필터의 극점(poles) 들을 계산해야 한다. 만일 어떤 채널의 전달함수가 분모와 분자에 높은 차수의 다항식을 갖는다면 이 채널을 위한 역 시스템 또는 deconvolution 필터를 구하는 일은 거의 불가능하다고 볼 수 있다. 왜냐하면 높은 차수(예를 들어 수백 차수)의 영점을 구하는 것이 거의 불가능하여 실제적이지 못하기 때문이다.

본 논문에서는 전역통과 시스템(채널)에 대한 deconvolution 필터링 기법을 개발하고자 한다. 본 논문에서 언급한 바와 같이, 전역통과 시스템에서는 이러한 문제점을 해결할 수 있다. 즉, 전역통과 시스템이거만 하면 아무리 높은 차수의 경우라 할지라도 그 채널의 영점 또는 극점을 구하지 않고도 역 시스템을 얻을 수 있다. 왜냐하면 전역통과 시스템에서는 그 시스템 자체의 임펄스 응답과 그에 대한 역 시스템의 임펄스 응답이 서로 대칭성을 갖기 때문이다[3]. 본 논문에서는 이러한 특성을 이용하고 또한 FIR(finite impulse response) 근사를 통하여 안정한 non-causal deconvolution 필터를 안정한 causal deconvolution 필터 변환함으로써, 전역통과 시스템에 대한 deconvolution 필터링 기법을 제안한다.

II. LTI 역 시스템의 해석

어떤 응용분야에서 입력신호가 시스템을 통과함으로써 그 시스템의 고유한 특성에 의해 변화된 출력을 생성하고, 또한 이 출력으로부터 다시 원래의 입력신호를 복원하기를 원하는 경우가 있다. 예를 들어, 디지털 통신 시스템에서 전송채널(transmission channel)은 디지털 신호를 전송하는 동안 여러 요인에 의해 왜곡을 야기시킬 수 있다. 이 때 우리는 전송 시에 발생한 왜곡을 제거하여 원래의 디지털 신호를 복원하기 원하며 이러한 과정은 매우 유용할 것이다.

이를 위해서는, 원래의 시스템에 종속 연결하여 원래의 입력과 똑같은 출력을 발생하는 일종의 교정시스템(corrective system)을 설계해야한다. 이러한 교정시스템을 원래의 시스템의 역(inverse) 또는 역 시스템이라 부른다. 원 시스템과 그 역 시스템이 종속 연결되어 원래의 입력과 일치하는 출력을 내기 위해서는, 종속 연결된 전체 임펄스 응답이 단위 표본함수(unit sample function) $\delta(n)$

이 되어야한다[4]. 그림 1에 보인바와 같이, 이산시간 LTI(linear time invariant) 시스템에서 원 시스템 $h(n)$ 에 종속 연결함으로써 첫 번째 시스템의 입력 $x(n)$ 과 같은 출력 $z(n)$ 을 발생하는 역 시스템 $h_i(n)$ 을 구성할 수 있다. 그림 1과 같이, 종속 연결된 전체 시스템의 입-출력 관계식은 identity 시스템의 입-출력 관계식과 같다. 그림 1의 전체 임펄스 응답은 $h(n)*h_i(n)$ 이므로, 역 시스템의 임펄스 응답 $h_i(n)$ 은 아래의 식(1)의 관계식을 만족해야한다.

$$h(n) * h_i(n) = \delta(n) \tag{1}$$

대개의 안정한 시스템은 임펄스 응답이 고려되는 어느 정도의 시간 간격 밖에서는 무시할 정도로 작기 때문에 FIR 시스템으로 근사할 수 있다[5]. 그러므로 이후로는 실제적인 목적을 위해 FIR 시스템의 경우로 고려하여 다루기로 한다.

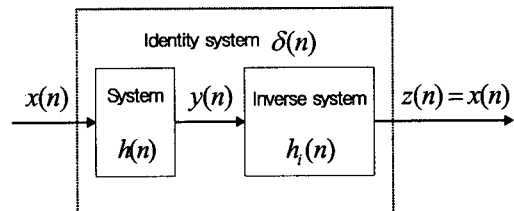


그림 1. 이산시간 LTI 시스템에 대한 역 시스템의 개념
Fig. 1 Concept of the inverse system for discrete-time LTI system

III. 전역통과 시스템을 위한 Deconvolution 필터링 기법

전역통과 시스템의 전달함수는 모든 극점과 영점들이 서로 상반적인 쥘레복소수쌍(complex conjugate reciprocal pairs)에 위치함을 알 수 있다[2,3,6]. 즉 인과적(causal)이며 안정한 전역통과 시스템의 전달함수는 모든 극점이 z 평면의 단위원 내부에 있고, 그리고 모든 영점은 단위원 외부(극점과 쥘레복소수쌍이 되는 위치)에 있게 된다. 그러므로 인과적이며 안정한 전역통과 시스템에 대한 deconvolution 필터는 모든 극점이 z 평면의 단위원 밖에 위치하고 또한 모든 영점은 단위원 안쪽에 위치하게 된다. 따라서 이러한 deconvolution 필터는 안정한 non-

causal IIR(infinite impulse response) 필터이거나 또는 불안정한 causal IIR 필터가 되어 실현 불가능하게 된다[7-9].

이러한 문제를 해결하기 위하여, 본 논문에서는 전역통과 시스템에 대하여 실현 가능하고 안정한 FIR deconvolution 필터를 설계하는 방법을 제안하고자 한다. 실제로, 이 FIR deconvolution 필터는 안정한 non-causal IIR deconvolution 필터의 임펄스 응답을 안정한 causal FIR deconvolution 필터의 임펄스 응답으로 근사(변환)함으로써 실현할 수 있음을 제안한다. 이는 앞서 언급한 바와 같이 대개의 안정한 IIR 필터는 FIR 필터로 근사할 수 있기 때문에 가능하다.

전역통과 시스템은 일종의 IIR 시스템 또는 필터이다. 그러므로 전역통과 시스템을 그 임펄스 응답이 N_0 샘플(samples)을 갖는 FIR 필터로 근사할 수 있으며, 여기서 N_0 는 전역통과 필터의 임펄스 응답이 어느 시간 간격 밖에서 무시할 수 있을 정도로 작게 되는 점에 해당하는 값으로 항상 선택할 수 있다. 제4장 컴퓨터시뮬레이션에서 관찰할 수 있듯이, 전역통과 필터(시스템) 자체의 임펄스 응답과 그 역 필터(inverse filter) 또는 deconvolution 필터의 임펄스 응답은 수직축에 대하여 대칭임을 알 수 있다. 이때 deconvolution 필터는 안정한 non-causal IIR 필터로서 그 임펄스 응답이 $n < 0$ 인 구간에서 나타나므로 실현 불가능하다.

본 논문에서는 이러한 문제를 해결하여 전역통과 필터에 대한 실현 가능한 역 필터를 구현할 수 있는 deconvolution 필터링 기법을 그림 2와 같은 방식으로 제안한다.

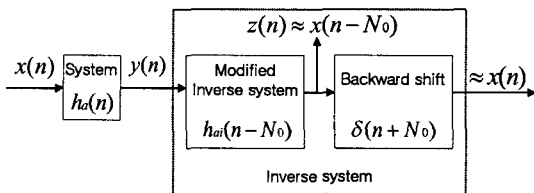


그림 2. 전역통과 시스템을 위해 제안한 deconvolution 필터링 방식

Fig. 2 Proposed deconvolution filtering scheme for all-pass systems

그림 2에서와 같이, 제안한 deconvolution 필터링 방식은 FIR 근사를 기초로 하고, non-causal 문제를 해결하기 위해 (N_0 만큼의) 시간천이를 적용하고 나중에 다시 천이

된 시간만큼 되돌려 원래의 신호를 복원하는 기법이다. 전역통과 시스템의 역 시스템을 위하여 제안한 기법은 그림 2의 상자 테두리 내부와 같이 두 단계로 구성한다. 첫 번째 단계에서는, 주어진 전역통과 시스템에 대한 역 필터(IIR 필터)의 임펄스 응답 $h_{ai}(n)$ 을 구하고 그것을 N_0 샘플을 갖는 FIR 필터로 근사한 후 N_0 샘플만큼 시간천이시킨다. 즉 제안한 역 시스템인 $h_{ai}(n - N_0)$ 을 구성한다. 이때 역 시스템 $h_{ai}(n - N_0)$ 의 출력은 $z(n) \approx x(n - N_0)$ 이 된다. 두 번째 단계에서는, N_0 샘플만큼 천이된 시간을 다시 되돌린다. 즉 $\delta(n + N_0)$ 을 구성하여, 시간 천이된 입력 $x(n - N_0)$ 을 다시 N_0 샘플만큼 뒤로 천이시켜 전체 역 시스템의 최종 출력이 원래의 입력 $x(n)$ 과 같도록 한다. 제안한 기법을 요약한 흐름도를 그림 3에 나타내었다.

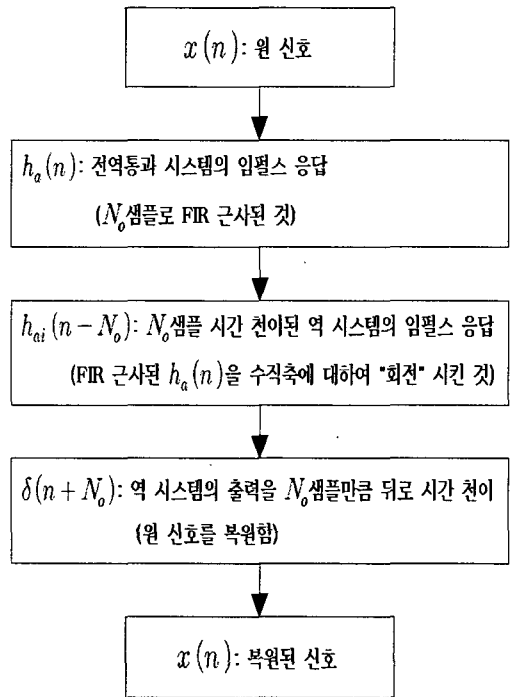


그림 3. 제안한 기법의 흐름도
Fig. 3 Flow chart for the proposed method

IV. 컴퓨터 시뮬레이션

제3장에서 제안한 기법을 컴퓨터시뮬레이션을 통하여 실현하고 그 성능을 증명하기 위하여 아래와 같이 세

가지 경우(1차, 2차 및 400차 전역통과 시스템)에 대하여 실험을 한다.

4.1 실험1 (1차 전역통과 시스템 경우)

일반적으로 1차 전역통과 필터의 전달함수는 다음 식으로 표현된다[3,6].

$$H_a(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}} = \frac{-a(z - a^{-1})}{z - a} \quad (2)$$

여기서 $|a| < 1$ 이며, 이 필터가 인과적이며 안정한 필터가 되기 위해서는 그 수렴영역이 $|z| > |a|$ 이어야한다. 이 필터에 대한 임펄스 응답을 구하기 위해 나머지 정리(residue theorem)를 적용하면 다음과 같다.

$$h_a(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint H_a(z) z^{n-1} dz = \begin{cases} -a & , n=0 \\ (a^{-1} - a)a^n & , n \geq 1 \end{cases} \quad (3)$$

또한 역 필터의 전달함수 $H_{ai}(z)$ 는 $H_a(z)$ 의 역수로서 아래와 같다.

$$H_{ai}(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a} = \frac{z - a}{-a(z - a^{-1})} \quad (4)$$

이 역 필터가 비인과적(non-causal)이며 안정한 필터가 되기 위해서는 그 수렴영역이 $|z| < |a^{-1}|$ 이어야한다. 같은 방법으로 역 필터에 대한 임펄스 응답을 구하면 아래와 같다.

$$h_{ai}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint H_{ai}\left(\frac{1}{p}\right) p^{-n-1} dp = \begin{cases} -a & , n=0 \\ (a^{-1} - a)a^{-n} & , n \leq -1 \end{cases} \quad (5)$$

여기서 $p = 1/z$ 이다. 식(3)과 (5)로부터, 원래의 전역통과 필터의 임펄스 응답 $h_a(n)$ 과 그 역 필터의 임펄스 응답 $h_{ai}(n)$ 은 수직축에 대하여 대칭임을 알 수 있다. 일반적으로 이러한 특성은 사실이다. 왜냐하면 전역통과 필터의 전달함수는 모든 극점과 영점들이 서로 상반적인 결레복

소수쌍 형태로 나타나기 때문이다. 그림 2와 3으로 제한한 기법을 시뮬레이션 하기위해, 전역통과 필터에서 $a = 0.66635$ 로 하고 아래 식으로 주어진 입력 $x(n)$ 을 적용한다.

$$x(n) = \sin(2\pi \cdot 110 \cdot nT) + \cos(2\pi \cdot 390 \cdot nT) \quad (6)$$

여기서 표본간격 $T = 1/1000$ (sec)이며, 시뮬레이션 결과를 그림 4에 나타내었다.

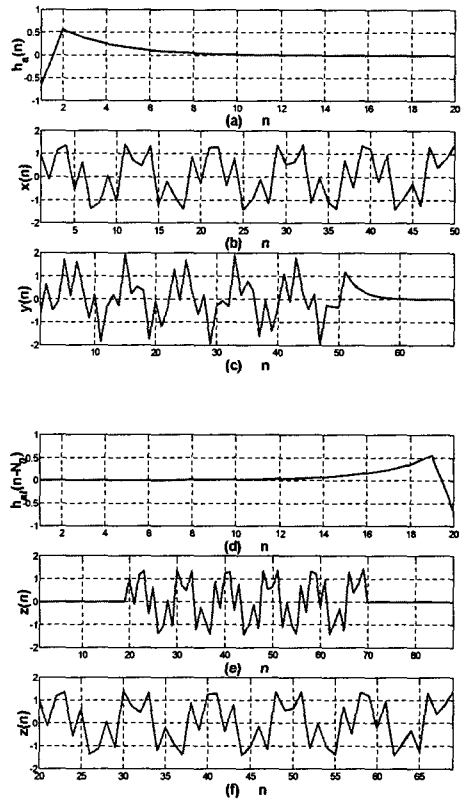


그림 4. 실험1의 1차 전역통과 필터에 대한 시뮬레이션 결과

Fig. 4 Simulation results for 1st-order all-pass filter in Experiment 1

그림 4로부터 10 샘플 이후에서의 $h_a(n)$ 값은 무시할 수 있을 정도로 작음을 관찰할 수 있고, 따라서 $h_a(n) = 0, n \geq 21$ 로 가정한다. 즉 $N_0 = 20$ 이며 $h_a(n)$ 과 $h_{ai}(n - N_0)$ 를 20개의 계수를 갖는 FIR 필터의 임펄스 응답으로 근사하여 간주할 수 있다.

그림 4에서 (a)는 전역통과 필터의 임펄스 응답, (b)는 인가된 입력, (c)는 전역통과 필터의 출력, (d)는 시간 전이된 역 필터의 임펄스 응답, (e)는 역 필터의 시간 전이된 응답, (f)는 역 필터의 시간 전이된 출력을 다시 뒤로 시간 전이시킨 응답으로 복원된 입력에 해당한다. 그림 4의 결과로부터 원래의 입력이 제안한 deconvolution 필터링 기법으로 복원되어 제안한 기법이 잘 동작함을 알 수 있다. 실제로, 복원된 입력은 원래의 입력과 거의 같은 근사적인 것이며, 이는 IIR 필터를 유한 샘플을 갖는 FIR 필터로 근사함에 기인한 것이다.

4.2 실험2 (2차 전역통과 시스템 경우)

2차 전역통과 필터의 전달함수는 다음 식으로 쓸 수 있다[3].

$$H_a(z) = \frac{a^2 - 2az^{-1} \cos bT + z^{-2}}{1 - 2az^{-1} \cos bT + a^2z^{-2}} \quad (7)$$

여기서 $|a| < 1$ 이고 $bT \leq \pi$ 이며, 이 필터가 인과적이며 안정한 필터가 되기 위해서는 그 수렴영역이 $|z| > |a|$ 이어야 한다. 앞에서와 같은 방법으로 이 필터에 대한 임펄스 응답을 구하면 다음과 같다.

$$h_a(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint H_a(z) z^{n-1} dz = \begin{cases} a^2 & , n=0 \\ \frac{a^{n-2}}{\sin bT} h_0(n) & , n \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

여기서,

$h_0(n) = a^4 \sin [(n+1)bT] - 2\beta a \sin bT + \sin [(n-1)bT]$ 이며 $\beta = a \cos bT$ 이다. 또한 1차 전역통과 필터의 경우와 마찬가지로 역 필터 $H_{ai}(z) = 1/H_a(z)$ 가 비인과적이며 안정한 필터가 되기 위해서는 그 수렴영역이 $|z| < |a^{-1}|$ 이어야 한다.

전역통과 필터와 그 역 필터의 대칭성 때문에, $h_{ai}(n)$ 을 별도로 구할 필요 없이 $h_a(n)$ 을 수직축에 대하여 대칭적으로 회전(turning around)하면 $h_{ai}(n)$ 를 얻을 수 있고, 또한 $h_{ai}(n - N_0)$ 은 이것을 N_0 샘플만큼 시간 전이하면 얻을 수 있다. 즉 $h_{ai}(n - N_0)$ 는 N_0 샘플로 FIR 근사된 $h_a(n)$

을 단지 "turning around" 시킴으로서 얻을 수 있다. 1차 전역통과 필터의 경우와 같은 방법으로, $a = 0.6635$, $bT = 0.5408$, $N_0 = 20$ 으로 하고 식(6)의 입력을 적용하여 실험한 결과가 그림 5에 나타나 있다. 그림 5로부터 2차 전역통과 필터의 경우도 1차의 경우와 같이 제안한 기법이 잘 동작함을 알 수 있다.

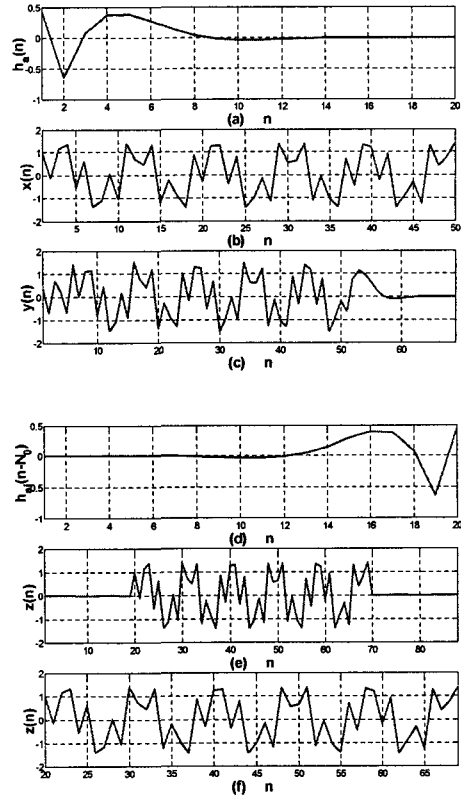


그림 5. 실험2의 2차 전역통과 필터에 대한 시뮬레이션 결과
Fig. 5 Simulation results for 2nd-order all-pass filter in Experiment 2

4.3 실험3 (400차 전역통과 시스템 경우)

2차 전역통과 필터를 200 단(sections) 중속(직렬) 연결하여 구성된 고차(400차) 전역통과 필터를 고려해보자. 일반적으로 고차의 전역통과 필터는 이와 같은 방법으로 구성한다. 이러한 400차 전역통과 필터의 임펄스 응답 $h_a(n)$ 은 2차 전역통과 필터를 200번 반복적으로 컨볼루션(convolution) 함으로서 구할 수 있다. 앞에서와 같이 이

필터가 인과적이며 안정한 필터가 되기 위해서는 그 수렴 영역이 $|z| > |a|$ 이어야 한다. 마찬가지로 대칭성 때문에 $h_{ai}(n)$ 을 별도로 구할 필요 없이, N_o 샘플로 FIR 근사된 $h_o(n)$ 을 단지 "turning around" 시킴으로서 $h_{ai}(n - N_o)$ 을 얻을 수 있다. 앞에서와 동일한 방법으로, $a = 0.6635$, $bT = 0.5408$, $N_o = 1850$ 으로 하고 식(6)의 입력을 적용하여 실험한 결과가 그림 6에 나타나있으며, 그림 6으로부터 400차 전역통과 필터의 경우도 제안한 기법이 잘 동작함을 알 수 있다.

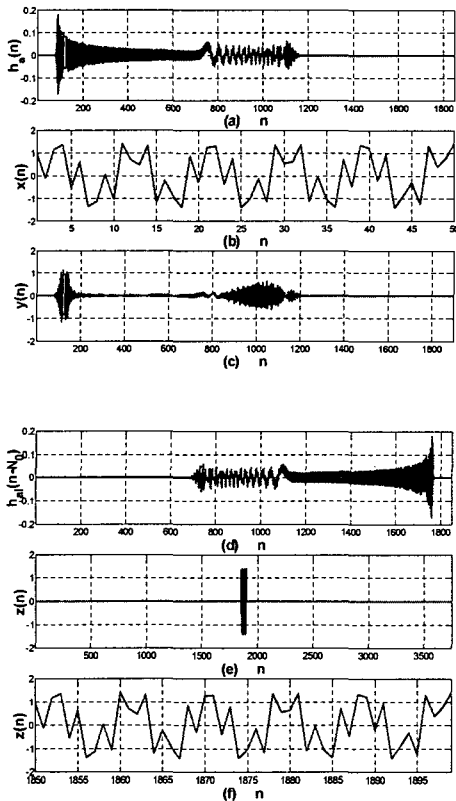


그림 6. 실험3의 400차 전역통과 필터에 대한 시뮬레이션 결과

Fig. 6 Simulation results for 400th-order all-pass filter in Experiment 3

4.4 시뮬레이션 결과 분석

앞에서의 행한 세 가지 실험들로부터 원래의 시스템이 전역통과 필터인 경우 deconvolution 필터링 문제를 해결하기 위해, 제안한 기법이 잘 동작함과 동시에 간편함을 알 수 있다. 이는 전역통과 필터와 그 역 필터의 임펄스 응

답이 갖는 대칭성을 이용하고, 또한 안정한 역 필터가 갖는 비인과적 특성을 시간 천이를 이용하여 해결하며, IIR 필터인 전역통과 필터를 유한개의 샘플로 FIR 근사하기 때문이다.

그러므로 원래의 시스템이 전역통과 시스템이기만 하면, 제안한 기법은 시스템의 차수와 무관하게 적용 가능하다.

V. 결론

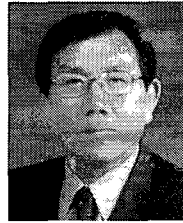
본 논문에서는, 전역통과 채널(시스템)을 통해 전송된 신호를 복원하는데 사용할 수 있는 deconvolution 필터링 기법을 제안하였다. 이 기법은 안정한 비인과적 deconvolution 필터를 안정한 인과적 필터로 변환(근사)함으로써 안정한 인과적 deconvolution 필터를 얻을 수 있도록 해준다. 실제로, 이 필터의 FIR 근사를 제안한다. 제안한 기법은 전역통과 시스템에 대한 역 필터 또는 deconvolution 필터를 구함에 있어서, 전역통과 시스템과 그 역 시스템에 대한 임펄스 응답의 대칭성 때문에 역 필터의 임펄스 응답을 별도로 구할 필요 없이, 유한개의 샘플로 FIR 근사된 전역통과 필터 자체의 임펄스 응답을 단지 "turning around" 시킴으로서 원하는 deconvolution 필터를 구할 수 있게 해준다. 제안한 기법은 간단하면서도 잘 동작하며, 시스템의 차수에 무관하게 적용할 수 있다.

참고문헌

- [1] T. E. Tuncer and M. Aktas, "LSE and MSE Optimum Partition-Based Deconvolution Filters With Best Delay", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 53, No. 10, pp. 3780-3790, Oct. 2005.
- [2] V. K. Ingle and J. G. Proakis, *Digital Signal Processing using MATLAB*, Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, 2000.
- [3] S. J. Kim, *Recursive Digital Filter Realization and Inverse Filtering and Ionospheric Model*, Ph.D. Dissertation, Univ. of New Mexico, Albuquerque, NM, 1988.
- [4] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete Time Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

- [5] M. T. Jong, *Method of Discrete Signal and System Analysis*, McGraw-Hill, NY, 1982.
- [6] S. K. Mitra, *Digital Signal Processing, A Computer-Based Approach*, McGraw-Hill, 2002.
- [7] T. E. Tuncer, "A New Method for D-dimensional Exact Deconvolution", *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol. 47, No. 5, pp. 1324-1334, 1999.
- [8] T. Daboczi and T. B. Bako, "Inverse Filtering of Optical Images", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 50, No. 4, pp. 991-994, 2001.
- [9] M. Miyosi and Y. Kaneda, "Inverse Filtering of Room Acoustics", *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, Vol. 36, No. 2, pp. 145-152, 1988.

저자소개



김 성 진(Sung-jin Kim)

1974년 3월 해군사관학교(이학사)
1977년 2월 서울대학교 전자공학과(공학사)
1980년 2월 고려대학교 전자공학과(공학석사)

1988년 12월 미국 University of New Mexico 전기 및 컴퓨터공학과(공학박사)

1980년 3월 ~ 2001년 2월 해군사관학교 전자공학과 교수
2001년 3월 ~ 현재 동명대학교 정보통신공학과 교수

※ 관심분야 : 디지털신호처리, 적응신호처리, 레이더/위성 신호처리, EW분야 및 시스템 모델링