

구조물의 대변형 비탄성 해석을 위한 범용 목적의 XFINAS 4절점 순수 변위 합응력 셸요소

A General and Versatile XFINAS 4-node Co-Rotational Resultant Shell Element for Large Deformation Inelastic Analysis of Structures

김기두* · 이창수**

Kim, Ki Du · Lee, Chang Soo

Abstract

A general purpose of 4-node co-rotational resultant shell element is developed for the solution of nonlinear problems of reinforced concrete, steel and fiber-reinforced composite structures. The formulation of the geometrical stiffness presented here is defined on the mid-surface by using the second order kinematic relations and is efficient for analyzing thick plates and shells by incorporating bending moment and transverse shear resultant forces. The present element is free of shear locking behavior by using the ANS (Assumed Natural Strain) method such that the element performs very well as thin shells. Inelastic behaviour of concrete material is based on the plasticity with strain hardening and elasto-plastic fracture model. The plasticity of steel is based on Von-Mises Yield and Ivanov Yield criteria with strain hardening. The transverse shear stiffness of laminate composite is defined by an equilibrium approach instead of using the shear correction factor. The proposed formulation is computationally efficient and versatile for most civil engineering application and the test results showed good agreement.

Keywords : an ANS 4-node shell element, elasto-plastic concrete fracture, ivanov plasticity

요 지

순수변위 비선형 4절점 셸요소의 정식화를 제안하여 철근 콘크리트, 강재 및 복합재료 등 범용 목적의 구조물의 해석에 적합하도록 하였다. 기하강성의 정식은 2차 운동역학적 관계를 이용하여 셸이 중립면에서 정의되었고 이러한 기하강성은 면내응력, 휨 모멘트와 수직 전단력의 형태로 구성되어 두꺼운 판 및 셸의 해석에 효과적이다. 가정된 자연 변형률 방법을 사용하여 전 단잠김 문제를 제거한 복합 셸 요소는 얇은 판 및 셸의 경우에도 정확한 해를 구할 수 있다. 콘크리트 경우 소성이론 및 탄소 성 파괴역학에 근거한 비탄성 해석이 가능하며 강재 경우 폰미스의 항복이론과 이바노브의 항복이론을 이용한 소성해석이 가능하다. 복합 재료의 수직전단 강성 행렬은 평형방정식으로부터 유도하여 구성하였다. 본 연구에서 제안한 셸 요소는 해석 예제 들이 참고문헌과 잘 일치하여 정확성이 입증되었으며 범용목적의 박판구조 해석에 적합한 것으로 사료 되었다.

핵심용어 : 가정 자연 변형률 셸 요소, 콘크리트 탄소성파괴, 이바노브 소성론

1. 서 론

3차원 입체 요소를 이용한 박판 구조물의 모델링에서 데이터 준비의 용이성, 수렴성 및 정확성을 증가시키기 위하여 Ahmad 등(1970)이 제안한 퇴화된 셸 이론에 근거하여 셸 요소가 개발되고 있다. 이러한 셸요소들은 두꺼운 판과 셸 문제에서는 효과적이었으나 판과 셸의 두께가 얇아짐에 따라 전단 잠김현상이 발생하게 되면서 정확도가 급격히 저하되는 현상이 있다. Zienkiewicz 등(1971)에 의해 감차적분법이 전단 잠김 현상을 극복하기 위한 해법으로 제안되었으나 해의 정확성 및 안전성을 증가시키기 위해 한계가 있어 가정된 자연 변형률 방법 및 보강된 변형률 방법 및 준적합 기법

(Kim)등에 의하여 연구가 진행되고 있다. 가정 자연 변형률 방법은 Dvorkin과 Bathe(1984)가 제안한 후 많은 셸요소에서 이용되어 왔으며 해를 더욱 개선시키기 위한 Simo & Rafai(1991)가 비적합 모드를 제안한 이래 Andelfinger 와 Ramm(1993)등에 의해서 보강변형률 방법(Enhanced Assumed Strain)으로 체계화 되었다. 다른 방법으로 String Net 함수를 이용한 준적합 셸요소가 Shi와 Votiagis(1991) 그리고 Kim 등(2003)에 의해서 개발되었으며 다른 방법에 비하여 뛰어난 수렴도와 해를 제공하고 있다.

본 연구의 목적은 범용 목적의 비선형 4절점 셸요소의 정식화를 제안하고 철근 콘크리트의 탄소성 파괴이론에 의한 비탄성모델, 변형률 경화를 고려한 Ivanov 항복조건을 이용

*정회원 · 교신저자 · 건국대학교 사회환경시스템공학과 부교수 · 공학박사(E-mail: kimkd@konkuk.ac.kr)

**정회원 · 서울시립대학교 토목공학과 교수 · 공학박사(E-mail: cslee@uos.ac.kr)

하여 강제를 탄소성해석할 수 있는 모델 및 복합재료의 모델의 구성방정식을 효과적으로 정식화함으로써 다양한 목적의 구조물의 해석에 적합하도록 하였다. 쉘요소의 기하학적 비선형 정식은 미소변형과 대회전을 가정한 Mindlin-Reissner 이론에 근거한다. 일반적인 축퇴 쉘요소의 강성행렬 계산시 체적 적분을 사용하여 비선형 해석시 과도한 연산시간이 필요하나 본 XFINAS 쉘요소는 연산시간을 줄이기 위하여 요소강성행렬을 두께방향으로 먼저 해석적으로 적분하여 구해진 면내 응력, 모멘트 및 횡방향 전단응력의 개념을 이용한 가상 변위의 정식을 이용하였다. 이와 더불어 개발된 Ivanov의 탄소성 모델은 두께방향의 적분을 제거하여 연산시간을 획기적으로 감소시켰다.

본연구에서 요소의 운동을 결정하고 강체 병진 운동과 회전 운동을 제거하기 위하여 Bates(1987)가 제안한 순수변위 방법(Co-rotational method)이 적용되었으며 유한회전에서 개선된 2차 변위의 가정을 적용하여 개발하였다. 변위장은 국부 순수 좌표계를 참조하였다. 그러므로 변형은 전체 절점 변위로부터 강체 회전을 제거함으로써 분리될 수 있다. 순수 변위 방법을 적용하여 비선형 해석에서 발생하는 기하학적 모순이 제거되어 수렴을 위한 보다 적은 반복횟수와 보다 큰 하중 증분에 사용하였다. 절점당 6개의 자유도를 사용하는 본 연구의 쉘요소는 보강 판 및 셸의 해석에도 사용할 수 있다.

2. 쉘요소의 기하학적 형상

그림 1에 기저 벡터로 확립된 자연 곡선 좌표계(ξ, η, ζ)와 국부 좌표계(r, s, t) 사이의 관계가 표시된 쉘 요소를 나타내었다. 중립면은 두개의 무차원 좌표계 ξ, η 로 나타내었고 ζ 는 쉘 중립면에 수직인 축이다. 곡선 좌표계의 원점은 각 요소의 중앙점에 위치하나 일반적으로 이 좌표계는 서로 직교하지는 않는다. 그러므로 국부 직교 좌표계 (r, s, t)는 요소의 중앙점에 위치한다. (r, s)와 (ξ, η)는 동일 평면 상에 위치한다.

기저벡터 (V_r, V_s, V_t)는 국부 좌표계에 접하고 그림 1과 같으며 식(1)로 정의된다.

$$V_t = \frac{\bar{V}_\xi \times \bar{V}_\eta}{|\bar{V}_\xi \times \bar{V}_\eta|} \quad V_s = \frac{(V_t \times \bar{V}_\xi) + \bar{V}_\eta}{|(V_t \times \bar{V}_\xi) + \bar{V}_\eta|} \quad V_r = V_s \times V_t \quad (1)$$

전체 좌표축 x, y, z 에 대한 국부 좌표축 r, s, t 그리고 식(1)의 \bar{V}_ξ 와 \bar{V}_η 는 ξ 와 η 에 접하는 단위 공 기저 벡터로 식(2)과 같다.

$$\bar{V}_\xi = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \xi} \bigg|_{\partial \mathbf{P}} \quad \bar{V}_\eta = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \eta} \bigg|_{\partial \mathbf{P}} \quad (2)$$

중립면으로부터 t 만큼 떨어진 절점 P 의 위치벡터 $\mathbf{P}(r, s, t)$ 는 식(4)와 같다.

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}^i(\xi, \eta) \bar{\mathbf{P}}^i + t \mathbf{V}_t \quad (3)$$

여기서 \mathbf{H}^i 는 Lagrange 형상 함수, $\bar{\mathbf{P}}^i$ 는 절점 좌표계의 위치 벡터, \mathbf{V}_t 는 셸의 중립면에 수직인 단위 벡터이다. 그리고 t 는 범위가 $-h/2$ 에서 $h/2$ 인 두께 국부 좌표계이다.

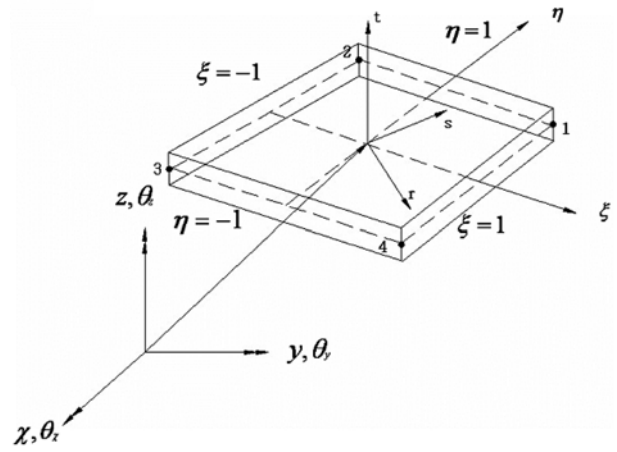


그림 1. 4절점 쉘요소의 국부 좌표계와 기하학적 형상

3. 변위장

임의의 절점 $P(r, s, t)$ 의 국부 운동은 일차 가정에 근거한 Mindlin-Reissner 이론으로 정의할 수 있다. 중립면에 위치하고 있지 않는 절점의 변위 u 와 v 는 회전 ϕ_x 와 ϕ_y 로 인해 선형으로 변화한다. 그러나 대변형을 포함한 운동학적 정식의 유도시 증분 회전변위 행렬은 2차식으로 가정하였다. 임의의 절점에서 2차식으로 가정된 국부 증분운동 변위장은 식(1)의 비선형 운동학적 관계로 주어진다.

$$\Delta \hat{u} = \Delta \hat{u} + t \left(\Delta \hat{\phi}_s + \frac{1}{2} \hat{\phi}_r \Delta \hat{\phi}_t \right) \quad (4)$$

$$\Delta \hat{v} = \Delta \hat{v} - t \left(\Delta \hat{\phi}_r - \frac{1}{2} \hat{\phi}_s \Delta \hat{\phi}_t \right)$$

$$\Delta \hat{w} = \Delta \hat{w}(r, s)$$

여기서 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 는 국부 중립면의 변위 성분이고 ϕ_x and ϕ_y 는 국부 중립면 회전변위 성분이다.

국부좌표계에서 전체 좌표계로의 좌표변환에 의한 전체 좌표계의 변위는 식(3)의 위치벡터의 정의를 사용하여 식(5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{H}^i(\xi, \eta) \bar{\mathbf{U}} + t \Theta \quad (5)$$

여기서 $\bar{\mathbf{U}} = \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ 는 중립면의 절점 i 에서 x, y, z 방향으로의 변위이고 $\Theta = \theta_x, \theta_y, \theta_z$ 는 중립면의 절점 i 에서 전체좌표계 x, y, z 방향 수직축의 회전 변위이다. 좌표변환 행렬 Θ 는 식(6)와 같다.

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & n_t & -m_t \\ -n_t & 0 & 1_t \\ m_t & -1_t & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

4. 순수 변위장

초기 국부 좌표계 o^r, o^s 와 o^t 로부터 현재 국부 좌표계 t_r, t_s 와 t_t 로의 변환은 국부 좌표계에서 강체회전과 일치되는 직교 회전 행렬 ($\mathbf{R}(\phi)$) 로부터 얻어진다. 임의의 절점 i 의 순수변위는 각 요소의 중앙 점에서 발생하는 강체운동을 제거한 잔류변위로 정의되고 $r=s=0$ 인 점에 대한 임의의 절점의 운

동으로 표현된다. 절점의 강제변형을 제거한 순수변위 (\hat{u})는 식(7)과 같이 표현된다.

$$\hat{u} = (\hat{P}_i - \hat{P}_c) - \mathbf{R}(\hat{\varphi})({}^0\hat{P}_i - {}^0\hat{P}_c) \quad (7)$$

여기서 ($\hat{P}_i - \hat{P}_c$)와 (${}^0\hat{P}_i - {}^0\hat{P}_c$)는 각각 현재와 초기상태에서 임의의 절점 i 의 각 요소의 중앙 점에 대한 상대적인 위치를 나타낸다. 전체 회전성분은 식(14)의 강제회전성분 ($\hat{\varphi}$)과 미소 수직전단변형 φ 로 분해할 수 있다.

$$\mathbf{R}(\varphi) = \mathbf{R}(\hat{\varphi})\mathbf{R}^T(\hat{\varphi}) \quad (8)$$

φ 의 국부 성분은 단면의 평균전단변형으로 간주하여 식(9)로 표현된다.

$$\hat{\varphi} = \{\hat{\varphi}_r, \hat{\varphi}_s, 0\} = \{-\bar{\varepsilon}_{rt}, \bar{\varepsilon}_{st}, 0\} \quad (9)$$

유한 회전에 관한 보다 자세한 내용은 Kebari와 Cassel (1992)에 나타나 있다.

5. 변형률-변위 관계

식(4)의 2차항을 운동학적 관계식을 Green 변형률 텐서에 대입하고 고차항을 무시하여 증분 면내, 휨 그리고 전단 변형률을 선형 부분과 비선형 부분으로 나누어 표현하면 식(10)와 같다.

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}\varepsilon_r &= \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{w}}{\partial r}\right)^2\right\} \\ \hat{\Delta}\varepsilon_s &= \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial s} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{w}}{\partial s}\right)^2\right\} \\ \hat{\Delta}\varepsilon_{rs} &= \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial r}\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial s} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial r}\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial s} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{w}}{\partial r}\frac{\partial\hat{\Delta}\bar{w}}{\partial s} \\ \hat{\Delta}\chi_r &= \frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial r} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial r}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial r} - \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial r}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial r} + \hat{\Delta}\hat{\varphi}_r\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial r}\right) \\ \hat{\Delta}\chi_s &= -\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial s} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial s}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial s} - \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial s}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial s} + \hat{\Delta}\hat{\varphi}_r\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial s}\right) \\ \hat{\Delta}\chi_{rs} &= \frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial s} - \frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial s} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial r}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial s} + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial s}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial r} - \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial r}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial r} - \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial s}\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial s} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial s} + \hat{\Delta}\hat{\varphi}_s\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial r} + \hat{\Delta}\hat{\varphi}_r\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r}{\partial s} + \hat{\Delta}\hat{\varphi}_s\frac{\partial\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s}{\partial r}\right) \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{rt} &= \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{w}}{\partial r} + \hat{\Delta}\hat{\varphi}_s + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial r}\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s - \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial r}\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r + \frac{1}{2}\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{st} &= \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{w}}{\partial s} - \hat{\Delta}\hat{\varphi}_r + \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{u}}{\partial s}\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s - \frac{\partial\hat{\Delta}\bar{v}}{\partial s}\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r + \frac{1}{2}\hat{\Delta}\hat{\varphi}_s\hat{\Delta}\hat{\varphi}_r \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 면내 변형률 $\Delta\hat{\mathbf{e}}_m = \{\Delta\hat{\varepsilon}_r, \Delta\hat{\varepsilon}_s, \Delta\hat{\varepsilon}_{rs}\}^T$, 휨 변형률 $\Delta\mathbf{e}_b = \{\Delta\hat{\chi}_r, \Delta\hat{\chi}_s, \Delta\hat{\chi}_{rs}\}^T$ 그리고 수직전단 변형률 $\Delta\mathbf{e}_q = \{\Delta\hat{\varepsilon}_{rt}, \Delta\hat{\varepsilon}_{st}\}^T$ 이다. 식(10)의 각 성분들에 대한 자세한 표현은 Kim 등(1999)에 나타나 있다.

6. 전단 잠김

전단 잠김 문제를 해결하기 위하여 Dvorkin과 Bathe (1984)가 4절점 쉘요소에 사용하였던 가정 자연 변형률 방법을 4절점 합응력 복합 쉘요소에 사용하였다. 수직 전단 변

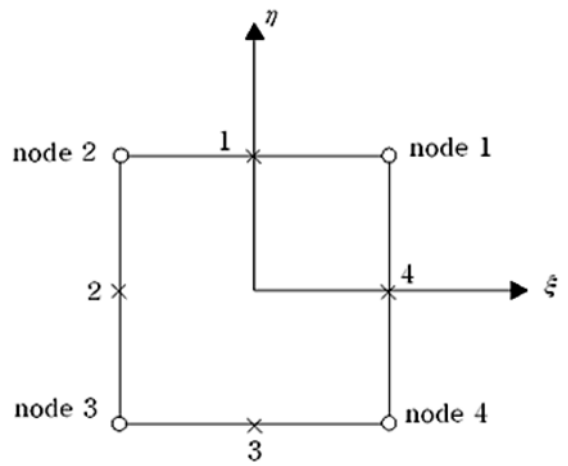


그림 2. 가정 변형률을 위한 견본점

형률장은 그림 2에 나타난 견본점에서 보간된다.

가정 자연 변형률을 위한 전단 변형률 계산을 위해 그림 2의 견본점을 사용하였다.

7. 콘크리트, 강재 및 복합재료의 구성 방정식

XFINAS 쉘요소의 효율적인 정식화로 철근 콘크리트, 강재 및 복합재료등 다양한 구조물의 해석이 가능하다. 콘크리트의 경우, 압축응력 하에서의 비선형 거동과 인장응력으로 발생하는 균열을 고려하고 있다. 철근의 항복은 탄소성 공식을 사용함으로써 해석되며, 인장증강(tension stiffening) 및 장부작용(dowel action)과 같은 콘크리트와 철근의 결합효과 또한 포함된다. 본 연구에 인용된 비탄성 구성 방정식은 Kuper의 소성이론에 의한 구성방정식과 Maekawa의 탄소성과 파괴이론에 의한 구성방정식이며 이 이론에 의한 방정식을 근거로 하여 XFINAS 콘크리트 쉘요소를 개발하였으며 강재의 탄소성이론은 폰미스 및 Ivanov(1974)의 항복 이론을 적용한 모델을 개발하였다. 복합재료 모델은 기존의 전단 보정 계수를 사용한 전단 강성 대신 Kim(2003)의 평형방정식으로 부터 유도된 개선된 전단 강성을 사용하였다.

7.1 콘크리트의 압축 거동에 대한 탄소성 모델

소성흐름이론에 기초하여 비선형 응력-변형률 관계를 수립하기 위해서는 다음의 3가지 조건이 고려되어야 한다. 항복기준, 흐름과 경화법칙 및 압쇄(crushing) 조건이다. 3축응력 상태에서 콘크리트에 대한 항복기준은 일반적으로 3차응력의 불변량으로 가정되어 진다. 그렇지만 실제 공식들은 1차 또는 2차응력의 불변량으로 가정하고 개발되어 왔다. 평균 수직응력 불변량 I_1 과 전단응력 불변량 J_2 에 따른 항복 함수의 종속성은 대부분의 조건에 대해 적합함이 입증되었다. 압축조건 하에서 소성체적팽창은 파괴부근에서 관찰되어지고 1차 응력 불변량에 따른 항복함수의 종속성으로 모델화될 수 있다.

최근의 해석기법에서 수직전단효과가 반영되고 있으므로 3축 항복기준이 고려되어야 한다. 이러한 기준은 1차, 2차응력 불변량으로 수식화 되어지고 각각의 재료적 매개변수가 정의에 포함되어 있다.

$$f(I_1, J_2) = [\beta(3J_2) + \alpha I_1]^{1/2} = \sigma_0 \quad (11)$$

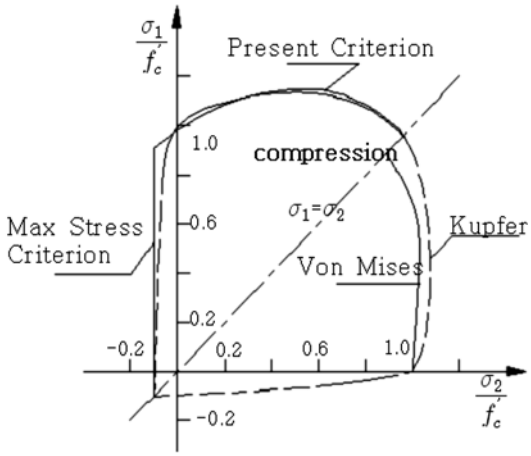


그림 3. 콘크리트의 항복조건

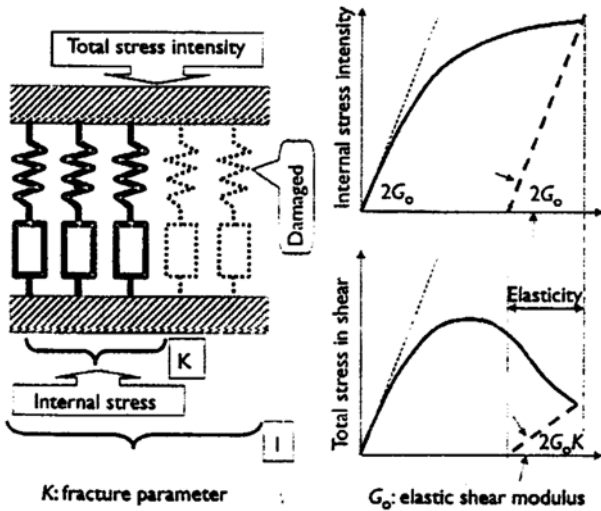


그림 4. 콘크리트의 탄소성 파괴 모델의 개요도(Maekawa)

여기서 α 와 β 는 재료적 매개변수이고 ●는 일축시험을 통한 압축응력으로 얻어지는 등가유효응력이다. Huber-Mises의 항복조건은 $\alpha=0$ 과 $\beta=1.0$ 으로 가정함으로써 얻을 수 있다. 이러한 경우에서 항복조건은 콘크리트의 거동을 특징짓는 가장 신뢰할 수 있는 상수를 실험을 통하여 얻을 수 있는 재료적 매개변수의 함수를 이용하여 Kupfer(1973)는 다음과 같은 식을 제안하였다.

$$[1.355[(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y)] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) + 0.355 \sigma_0(\sigma_x + \sigma_y)] = \sigma_0 \quad (12)$$

완전 소성 모델에서 σ_0 는 일축압축시험에서 얻어지는 극한 응력 f'_c 로 간주된다. 탄성반응은 다음에 완전소성반응 후 압축면에 도달할 때까지 유효응력 값 $\sigma_0 = f'_c$ 으로 가정된다. 변형률 경화 모델에서 초기 항복면은 유효응력이 최대응력 f'_c 의 30%에 도달할 때이다. 이후의 하중면 $f(\sigma) = s_0(\chi)$ 은 경화법칙을 다음의 절에서 언급하는 유효소성변형의 항으로 표현함으로써 정의된 경화 매개변수 χ 의 함수이다. 항복함수로 정의된 유효응력이 극한응력에 이르면 완전소성반응은 압축면에 도달할 때까지로 f'_c 가정된다.

7.2 콘크리트 압축거동에 대한 탄소성 파괴 모델

Maekwa(2003)는 압축을 받는 콘크리트의 탄소성 파괴 모

델(EPF) 이론을 이용하여 콘크리트 구성방정식의 수치모델을 제안하였으며 여기서 콘크리트 비선형성은 선형에서 연속체 파괴 그리고 비선형에서 소성으로 분류하였다. XFINAS 셀요소에서 이론에 근거하여 비탄성 모델을 개발하였다. 탄소성 파괴 모델에서는 연속체 파괴는 위치가 불명확하게 분산되어 야기된 결함으로 탄성 손상이라 정의하고 이것은 손상이 축적됨으로써 탄성 변형 에너지의 흡수 능력이 감소되는 결과를 가져온다. 소성은 콘크리트에서 모든 하중의 제거 후에도 회복이 불가능한 변형으로 정의 된다. 일반적으로 연속체 파괴는 콘크리트의 극한강도에 영향을 주며 소성은 콘크리트의 변형에 영향을 준다. 탄소성과 파괴 시스템에 관한 대략적인 개요는 그림 3.5와 같다. 콘크리트는 미소한 탄소성 성분의 집합으로써 이상화되어진다. 탄성은 병렬 스프링으로 모델이 구성되는 반면에 소성은 직렬로 연결된 슬라이더(slider)로 구성된다.

하중이 재하되는 동안 손상을 받은 스프링이 없다면 이는 완전 탄소성이다. 다시말해 모든 스프링은 응력의 저항에 유효할 것이다. 그러나 미세 균열과 다른 결함들로 인해 하중 재하시 파괴에 의한 손상은 발생한다. 그러므로 어떠한 하중 상태에서 일부 스프링은 부서질 것이고 하중 저항 능력을 상실할 것이다. 그림 3.5에서 매개변수는 파괴 매개변수로 정의되며 손상 받지 않은 스프링의 비로 나타낸다. 콘크리트의 총 응력은 손상 받지 않은 요소에서 발생하는 내부 응력의 합으로 구해진다. 결과적으로 유효 강성은 그림 3.5와 같이 의하여 감소하게 된다.

7.3 변형률 경화 탄소성 모델

XFINAS 4절점 셀요소의 강제 적용을 위한 소성이론은 von Mises의 항복조건과 두께방향을 이산화하기 위하여 Prandtl-Reuss의 흐름이론을 사용하였다. 증분형 탄소성 재료의 구성방정식은 다음과 같다.

$$\Delta \sigma = C_{ep} \Delta \hat{\epsilon}_{mb} \quad (13)$$

순수 변위 좌표계에서 $\Delta \hat{\epsilon}_{mb}$ 는 현 단계의 순수 변형률에서 다음 단계의 순수 변형률과의 차이와 같다. 순수 증분 변형률은 복잡한 변환 과정을 거치지 않고 Cauchy 증분 응력으로 직접 변환되므로서 연산 시간을 절약할 수 있다. 식 (14)의 탄소성 강성 행렬을 적분하므로써 다음과 같은 면내 및 휨 강성 행렬 D_{mb} 와 전단 강성 행렬 D_s 를 구할 수 있다. 평면응력의 조건을 가정하였으며 두께방향의 소성적분은 각층의 중앙에서 계산하였으며 구성방정식의 수치적분은 복합적인 사다리꼴 공식을 이용하여 수행하였다. 이 적분 방법에는 사다리꼴 공식, 뉴턴 코테스 공식 및 가우스 구적법 등이 있으나 각각 정확한 해를 구하기에는 단점들이 있어서 Kim()에 있는 8절점 탄소성 모델을 이용하여 구하였다.

$$D_{mb} = \int_{-2/h}^{2/h} \begin{bmatrix} C_{ep} & tC_{ep} \\ tC_{ep} & t^2 C_{ep} \end{bmatrix} dt \quad (14)$$

7.4 Ivanov 항복 조건

이바노브에의해서 제안된 항복 조건은 합 면내 및 휨 응력을 이용하여 항복조건을 제안하였으며 폰미스 항복 조건

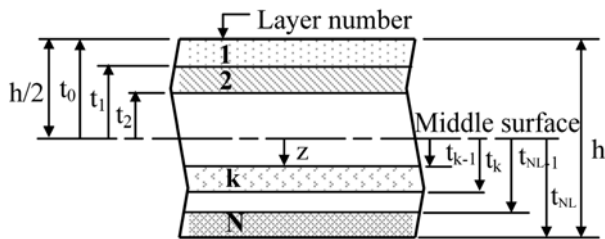


그림 5. 복합 셀요소의 합응력과 N개 층을 가진 적층구조의 기하형상

에 비하여 미소한 오차는 있으나 두께 방향으로 적분을 하지 않기 때문에 연산시간을 획기적으로 줄이므로 실제 구조 해석시 상당한 장점을 가지고 있다. 이바노브의 항복 조건은 다음과 같다.

$$f = \dot{Q}'_t + \frac{1}{2}\dot{Q}'_m + \sqrt{\frac{1}{4}\dot{Q}'_m{}^2 + \dot{Q}'_m{}^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\dot{Q}'_t\dot{Q}'_m - \dot{Q}'_m{}^2}{\dot{Q}'_t + 0.48\dot{Q}'_m}\right) - \sigma_y^2 \quad (15)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\dot{Q}'_t = \frac{\bar{N}}{t_0}, \quad \dot{Q}'_m = \frac{16\bar{M}}{\alpha^2 t^4}, \quad \dot{Q}'_m = \frac{4\bar{MN}}{\alpha t^3} \quad (17)$$

$$\bar{N} = N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3N_{xy}^2 \quad (18)$$

$$\bar{M} = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3M_{xy}^2 \quad (19)$$

$$\bar{MN} = M_x N_x + M_y N_y - \frac{1}{2}M_x N_y - 3M_{xy} N_{xy} \quad (20)$$

7.5 복합재료 모델

본 연구의 셀요소는 그림 5의 적층판을 두께방향으로 적분한 면내력 (N), 모멘트 (M) 그리고 전단력 (Q) 등 합응력 형태를 이용하여 구성하였다. 적층 복합구조의 증분 적합 조건식은 식(21)와 같다.

$$\begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \\ \Delta Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{e}_m \\ \Delta \mathbf{e}_b \\ \Delta \mathbf{e}_q \end{Bmatrix} \quad (21)$$

여기서

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{NL} \bar{\mathbf{C}}_{ij}^k (t_{k-1} - t_k) \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{NL} \bar{\mathbf{C}}_{ij}^k (t_{k-1}^2 - t_k^2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{NL} \bar{\mathbf{C}}_{ij}^k (t_{k-1}^3 - t_k^3) \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3$$

여기서 $\bar{\mathbf{C}}_{ij}^k$ 는 재료 강성 행렬이고 NL은 전체 적층 수이다. 그리고 $\bar{\mathbf{A}}$ 는 전단 강성 행렬이다.

8. 증분 평형 방정식

순수 변형률이 미소변형의 경우 선형 변형률-변위의 관계 식으로부터 구할 수 있음을 보였다. 가상일의 원리를 이용하

여, 면내력, 휨모멘트와 전단력에 근거한 순수 좌표계에서 증분 평형방정식은 식(23)와 같다.

$$\int (\Delta' \mathbf{N} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_m + \Delta' \mathbf{M} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_b + \Delta' \mathbf{Q} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_q) dS + \int (\Delta' \mathbf{N} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_m + \Delta' \mathbf{M} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_b + \Delta' \mathbf{Q} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_q) dS = {}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{V} - \int (\mathbf{N} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_m + \mathbf{M} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_b + \mathbf{Q} \delta \Delta' \hat{\mathbf{e}}_q) dS \quad (23)$$

여기서 ${}^{t+\Delta t} \delta \mathbf{V}$ 는 외적 가상일이다.

전체 접선 강성 행렬은 탄성 접선 강성 행렬 (\mathbf{K}_M)과 기하 강성 행렬 (\mathbf{K}_G)로 구성된다. Green 변형률 텐서의 선형 부분은 탄성 접선 강성 행렬을 유도하는데 사용되고 비선형 부분은 기하 강성 행렬을 유도하는데 사용된다.

증분 평형 방정식은 완전한 하중 이력상태의 반복과정은 평형력이 어떤 극한값에 수렴하고 중단된다. 셀의 비선형 거동은 Snap-through 현상 및 Snap-back 현상을 나타내는 고차의 비선형 특성을 나타내어 일반적인 하중 증분법으로는 해석이 불가능하다. 호의 길이를 조절하는 호장조절법을 이용하기 위해 본 연구에서 개발한 가상 자연 변형률 셀 요소를 임페리얼 공대와 AIT에서 공동 개발한 비선형 동적 범용 유한요소 해석 프로그램 XFINAS (2003)에 추가하여 해석하였다.

9. 수치 해석 예제

본 연구에서 개발된 가정된 자연 변형률 4절점 셀 요소는 임페리얼 공대와 AIT 및 건국대학교에서 공동 개발한 비선형 동적 범용 유한요소 해석 프로그램 XFINAS(www.xfinas.com)에 추가하였다. 셀요소의 성능을 검증하기 위하여 다양한 비선형 예제를 해석하였으며 그중에서 대표적인 예제를 제시하였다. 대변형 탄소성 해석 예제, 콘크리트 구조물의 비탄성 해석 결과를 제시하였고 기존의 연구와 비교하였다.

9.1 Duddeck's 철근 콘크리트 슬래브

이 예제는 Duddeck에 의해 실험된 슬래브로 4 코너에 지워진 슬래브이다. 이 슬래브는 다양한 철근 방향의 각도를 가지며, 그림 6과 같이 코너지점에 수직 처짐만 구속된 형태의 지점조건을 가진다.

슬래브의 재료 특성과 등가 철근의 층 두께는 아래 표와 같다.

유한요소 해석시 19×19개의 매쉬형태로 분할된 RC슬래브 셀모델을 채택하였으며 슬래브는 대칭이므로 슬래브의 1/4영역만 고려하였다. 슬래브 두께는 26층으로 분할하였고, 철근은 탄성계수를 고려한 등가의 재료로 재구성하였다. 해석에는 콘크리트의 3가지 형태로 공식화시켜 사용하였다(EPF 모델, 완전 소성, 변형률 경화). 해석 결과와 실험 데이터와 비교한 결과 극한 하중이 그림 7에서 처럼 잘 일치하는 것을 보여준다.

EPF 모델, 완전 소성, 변형률 경화와 항복경로 범칙과의 퍼센트 오차는 표 3와 같다.

표 3으로부터 S1 모델에서는 소성모델이 S2와 S3에서는 EPT모델이 다른 모델보다 정확한 것을 알 수 있다. 그림 7은 실험 결과와 해석결과를 슬래브 유형에 따라 하중-처짐

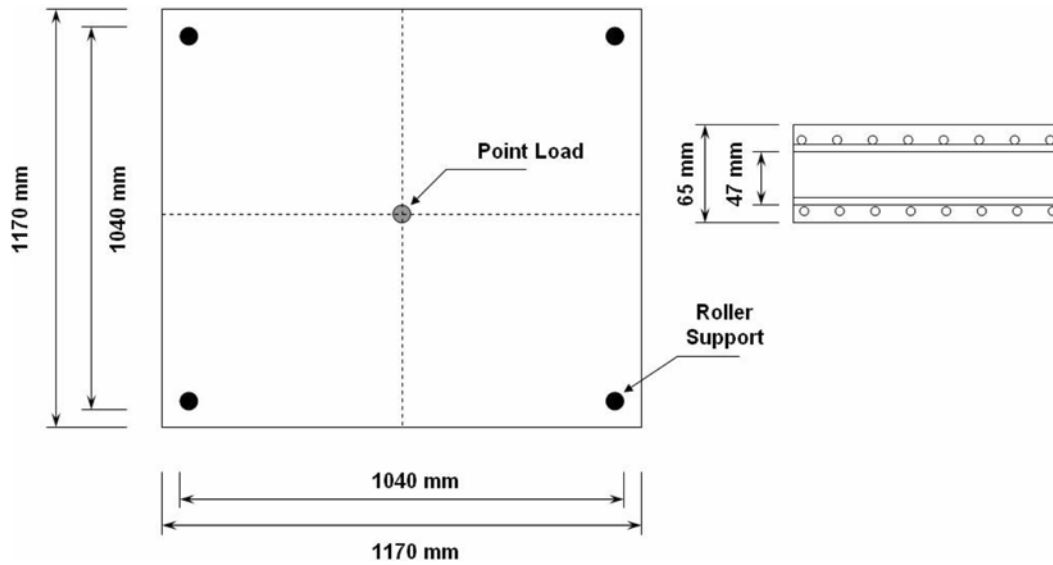


그림 6. Duddeck's 슬래브

표 1. Duddeck's 슬래브의 재료적 특성

콘크리트	보강 철근
인장 증강 매개변수 $E_c=16400 \text{ N/mm}^2$ $f'_c=16400 \text{ N/mm}^2$ $f_t=3 \text{ N/mm}^2$ $G_f=0.2 \text{ N/mm}^2$ $\nu=0.0$ $\epsilon_{tr}=0.0035$ <i>Tension stiffening parameter</i> $\alpha=0.6$ $\epsilon_m=0.02$	$E_s=201000 \text{ N/mm}^2$ $E_H=0.0 \text{ N/mm}^2$ $f_y=670 \text{ N/mm}^2$ Total reinforcement ratio $\rho=1.82\%$

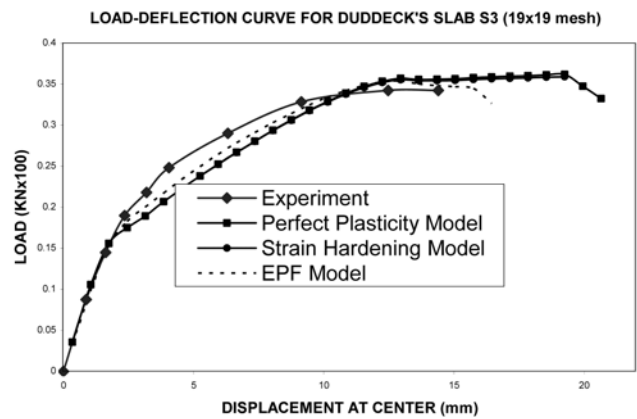


그림 7. Duddeck's 슬래브 S3에 대한 하중-처짐 곡선(19×19 매쉬)

표 2. Duddeck's 슬래브에서 등가 철근의 총 두께

	최상층		최하층	
	X-방향	Y-방향	X-방향	Y-방향
S1	0.193 mm	0.193 mm	0.397 mm	0.397 mm
S2	0.252 mm	0.133 mm	0.520 mm	0.273 mm
S3	0.283 mm	0.103 mm	0.582 mm	0.212 mm

곡선을 비교한 것이다. 그림 8과 같이, 슬래브의 3가지 해석 결과를 비교하면 철근의 패턴에 따라 슬래브의 극한 하중에

표 3. Duddeck's 슬래브에서의 극한 하중 퍼센트 오차

슬래브 유형	EPF 모델		완전 소성		변형률 경화	
	9×9 매쉬	19×19 매쉬	9×9 매쉬	19×19 매쉬	9×9 매쉬	19×19 매쉬
S1	19.8	3.73	23.1	0.98	21.9	7.45
S2	21.7	11.5	27.2	18.5	25.6	17.8
S3	22.9	17.6	27.9	20.3	26.2	19.3

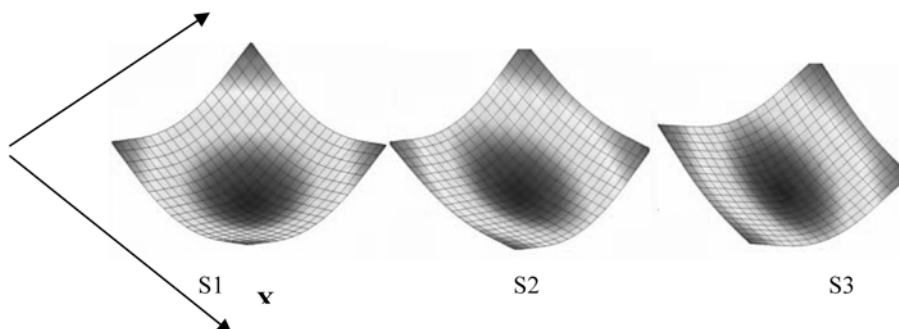


그림 8. Duddeck's 슬래브 S1, S2, S3의 피크하중에서의 변형 형상

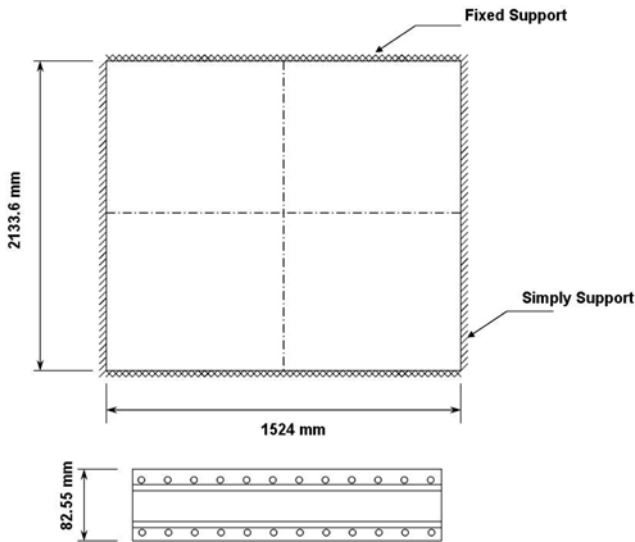


그림 9. Sharpe's 슬래브

표 4. Sharpe's 슬래브에 대한 재료적 특성

콘크리트	철근
$E_c=29400$ Mpa $f'_c=37.6$ Mpa $f_t=2.0$ Mpa $\nu=0.18$ $\epsilon_{it}=0.0035$ Tension stiffening parameter $\alpha=0.6$ $\epsilon_m=0.002$	$E_s=2.06E5$ Mpa $E_H=2.06E4$ Mpa $f_y=280.0$ Mpa

미치는 효과는 중요함을 알 수 있다.

9.2 Sharpe's 철근 콘크리트 슬래브

그림 9는 단순지지된 단변과 고정지지된 장변을 가진 등방성 RC 슬래브를 보여준다. Melbourne에서 등분포 하중이 재하된 슬래브에 대해 실험 결과를 이용하여[1966] 그림 9에서 실험과 통용되는 해석을 비교하였으며, 재료의 특성은 아래 표 4에 제시하였다.

보강철근은 82.55 mm의 두께를 갖는 슬래브 단면의 상하부에 위치한다. 층의 특성은 아래의 표와 같다.

유한 요소해석에서 대칭을 이용하기 때문에 슬래브의 1/4만을 고려한다. 4개의 절점을 갖는 9×9의 매쉬 크기인 RC 셸 요소가 적용되었다. 슬래브의 두께는 24개의 층으로 나누어지고, 분산층(smear layer)에 철근을 나타내었다.

유한요소해석의 결과는 실험과 같음을 보여주고 있다. 모든 재료의 모델은 인장 증강 계수처럼 해석에 사용되는 재료의 변수 때문에 강성을 갖는다. 그림 10은 처짐 형상과 보강되는 강재의 소성 변형률의 분배를 보여주고 있다. 해석에 의한 항복은 이론과 흡사하였다.

표 5. Sharpe's 슬래브에서 보강 철근의 패턴

상층		하층	
길이 방향	가로 방향	길이 방향	가로 방향
9.53 mm ϕ at 228.6 mm centers	9.53 mm ϕ at 203.2 mm centers	9.53 mm ϕ at 228.6 mm centers	9.53 mm ϕ at 203.2 mm centers

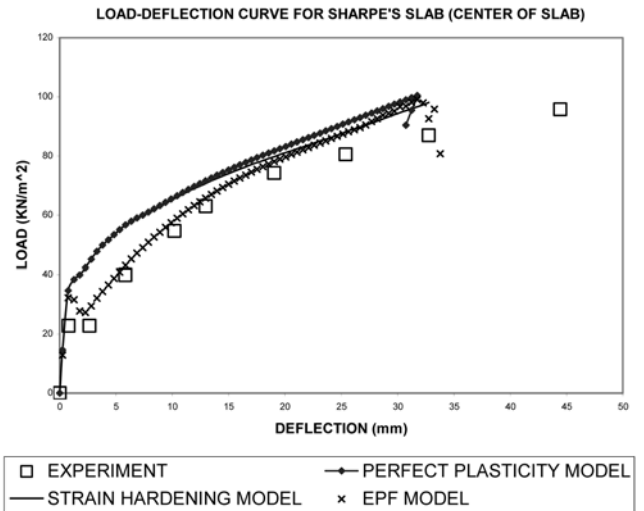


그림 10. Sharpe's 슬래브의 하중-처짐 곡선

표 6. Sharpe's 슬래브에서 극한 하중의 오차 퍼센트

	완전소성	변형률 경화	EPF 모델	실험에 의한 극한 하중
ULTIMATE LOAD (KN/m ²)	100.45	100.35	99.11	97.00
% ERROR	3.55%	3.55%	2.17%	

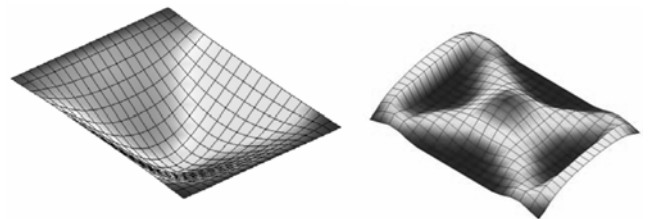


그림 11. Sharpe's 슬래브에서 보강 철근의 변형 형상과 소성 변형률

9.3 집중하중을 받는 원통형 실린더의 대변형 탄소성 해석

양쪽 끝에 다이아프램이 설치된 원통형 실린더에 양방향 대칭으로 집중하중을 받을 때 대변형 탄소성 해석을 수행하였다. 대칭성을 고려하여 전체 실린더의 1/8을 모델링하였다. 사용된 요소수는 32X32이고 최대 가한 하중의 크기가 12000 이었다.

기하학적 형상 데이터 : $L=600.0$, $R=300.0$, $t=3.0$

재료 특성 데이터 : $E=3000.0$, $n=0.3$, $s_y=24.3$, $H=50.0$ and $H=300.0$

9.4 단순 지지된 복합재료 평판의 해석($\theta-\theta$)

균일 분포하중을 받는 앵글 플라이 평판의 선형 해석을 수행하였다. 본 요소는 이미 등방성 문제에서 전단 잠김을 검토한 결과 아주 우수한 결과 (Tanabadee)를 보여 주었으

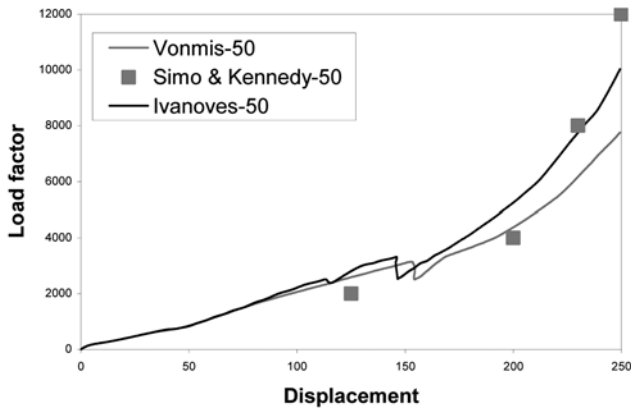


그림 12. 대변형 탄소성 해석 하중과 변형과 관계

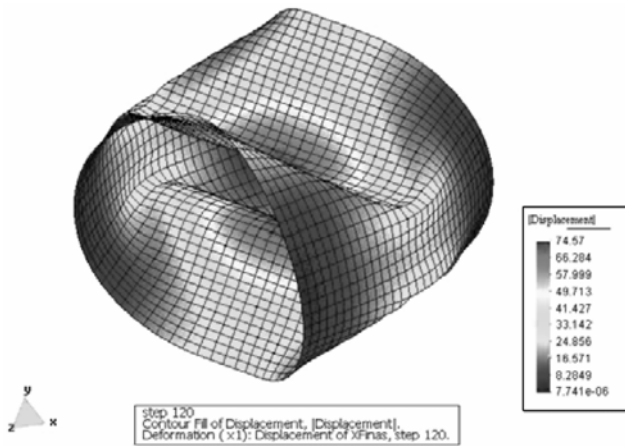


그림 13. 변형된 형상 (변위 250)

표 7. 여러 각도에서 무차원 처짐 값

Solution Method	Mesh	5/-5	15/-15	30/-30	45/-45
Whitney		7.0676	9.6049	10.746	10.3035
Pucha & Reddy		7.1298	9.1077	9.1718	9.0793
Present	4×4	7.015	9.505	10.520	10.120
	8×8	7.030	9.580	10.690	10.260

며 전단 잠김문제를 길이와 두께의 비(a/h)는 100인 복합재료 평판에 적용하여 전단 잠김을 검증하였다. 본 예제에 이용된 재료 및 기하학적 특성은 다음과 같다.

$$E_1/E_2=25, G_{12}=G_{13}=0.5E_2, G_{23}=0.2E_2, \nu_{12}=0.25, \\ a=b=100 \text{ mm}, E_2=1.0 \times 10^6 \text{ N/mm}^2$$

판의 중심에서 처짐을 다음과 같은 무차원 상수를 이용하여 구하였다. 그 결과를 표7에 수록하였다. 해석 결과 얇은 판에서 좋은 결과를 보여 주어서 전단잠김이 없음을 확인하였다.

$$\bar{w} = w \left(\frac{E_2 h^3}{q a^4} \right) \times 10^3$$

10. 결 론

본 연구의 쉘 요소는 얇은 판 및 쉘의 한계를 극복하기 위하여 개선된 일차전단변형이론을 사용하여 더욱 정확도를 증가 시켰다. 가정 자연 변형을 방법을 사용하여 전단 잠김

현상을 해결하므로써 쉘 요소의 성능을 개선할 수 있었다. 쉘 요소의 성능을 평가하기 위하여 선형 및 비선형 정적 문제를 해석하였으며 우수한 성능을 보였다. 철근 콘크리트 비선형 모델을 추가하여 철근 콘크리트 판의 실험치와 비교하였으며 결과에서 탄소성 파괴 모델을 이용한 결과가 소성이론을 이용한 결과 보다 수렴도 및 정확도에서 더 좋은 결과를 보여 주었다. 본 연구의 쉘 요소는 두께방향으로 먼저 적분하여 구해진 합응력 및 모멘트의 개념을 이용하여 강재에 적용한 Ivanov 이론 결과와 참고문헌과 잘 일치하였으며 폰미스의 다층 적분에 비하여 50%이상의 연산 시간을 단축 시켰다. 다음 논문에서 XFINAS 콘크리트 모델을 이용하여 강합성 교량의 논문과 매개변수를 사용하여 쉘 요소의 수렴 속도 및 정확도를 증가시킨 논문을 발표하고자 한다.

참고문헌

- 김기두, 한성천(2003) 대체변형을 쉘 요소를 이용한 적층 복합판 및 쉘의 점탄성적 후좌굴 해석, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제23권 제2-A호, pp. 259-270.
- Ahmad, S., Irons, B.M., and Zienkiewicz, O.C. (1970) Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2, pp. 419-451.
- Andelfinger, U. and Ramm, E. (1993) "EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 36, pp. 1311-1337.
- Bates, D.N. (1987) *The mechanics of thin walled structures with special reference to finite rotations*, Ph.D. Thesis, Dept. of Civil Engineering, Imperial College.
- Crisfield, M.A. (1974) on an approximate yield criterion for thin steel shell. Internal report, Crowthorne, Berkshire TRRL.
- Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J. (1984) A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Non-Linear Analysis, *Eng. Comput.*, 1, pp. 77-88.
- Kebari, H. and Cassel, A.C. (1992) A stabilized 9-node non-linear shell element, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35, pp. 37-61.
- Kim, K.D. (2003) Large Displacement of Elasto-Plastic Analysis of Stiffened Plates and Shells using Co-rotational 8-Node Assumed Strain Element, *Structural Engineering and Mechanics*, An International Journal, Vol. 15, No. 2 (pp. 199-223).
- Kim, K.D., Lomboy, G.R., and Han, S.C. (2003) A co-rotational 8-node assumed strain shell element for postbuckling analysis of laminated composite plates and shells. *Comput. Mech.*, 30(4), pp. 330-342.
- Kim, K.D., Lomboy, G.R., and Voyiadjis, G.Z. (2003) A 4-Node Assumed Strain Quasi-Conforming Shell Element with 6 D.O.F., *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volume 58, Issue 14, pp. 2177-2200, December.
- Kim, K.D., Voyiadjis George, Z. (1999) Non-linear Finite Element Analysis of Composite Panels, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 30, Iss 4, pp. 383-394.
- Kupfer, H.B. and Gerstle, K.H. (1973) "Behavior of concrete under biaxial stresses", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, No. EM4, August.
- Maekawa, K., Pimanmas, A., and Okamura, H. (2003) *Nonlinear mechanics of reinforced concrete*, Spon Press.
- Pucha, N.S. and Reddy, J.N. (1984) A mixed shear flexible finite element for the analysis of laminated plates. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 44(2), pp. 213-227.
- Shi, G. and Voyiadjis, G.Z. (1991) Geometrically nonlinear analysis of plates by assumed strain element with explicit tangent stiff-

ness matrix. *Computers and Structures*. 41, pp. 757-763.

Simo, J.C. and Kennedy, J.G. (1992) On a stress resultant geometrically exact shell model Part V: Nonlinear Plasticity: Formulation and Integration Algorithm, *Compt. Methods Appl. Mech. Engrg.* 96, pp. 133-171.

Tanabadee, Ratsadonpakdee (2004) An assumed strain 4-node shell element for nonlinear analysis of shell structures, School of Civil engineering, Master Thesis, Asian Institute of technology, Thailand

Whitney, J.M. (1969) Bending-extensional coupling in laminated plates under transverse loading. *J Composite Matl* 3, pp. 20-28.

XFINAS (2003) *Nonlinear structural dynamic analysis system*, School of Civil Engineering, A.I.T., Thailand.

(접수일:2005.7.27/심사일:2005.9.28/심사완료일:2006.2.14)

부호설명

h : 쉘 두께
 $-$: 중립면에서 위치 표시
 x, y, z : 전체 좌표계 시스템
 r, s, t : 국부 좌표계 시스템
 ξ, η, ζ : 자연 좌표계 시스템
 i : 윗첨자: 절점 좌표계

m, b, q : subscript referring to membrane, bending and transverse shear
 $\bar{\mathbf{U}} = (\bar{U}, \bar{V}, \bar{W})$: 전체좌표계 변위
 $\theta = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$: 전체 좌표계 회전각
 $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$: 국부좌표계에서 변위
 $\varphi = (\varphi_r, \varphi_s, \varphi_t)$: 국부 좌표계 회전각
 \wedge : 순수 좌표계 시스템
 0 : 윗첨자 초기 비변형 상태
 Δ : 증분
 ε_{ij} : Green 변형률 텐서
 $\hat{\mathbf{u}}$: 국부 순수 변위
 $\hat{\mathbf{e}}_m, \hat{\mathbf{e}}_b, \hat{\mathbf{e}}_q$: 선형 면내, 휨 및 전단 변형률,
 $\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{Q}$: 합면내력 (N_r, N_s, N_{rs}), 모멘트 (M_r, M_s, M_{rs}), 전단 응력 (Q_r, Q_s)
 σ : Cauchy 응력
 \mathbf{C} : 재료 변형률 텐서.
 \mathbf{A} : 면내 강성
 \mathbf{B} : 면내 및 휨의 연성
 \mathbf{D} : 휨강성
 $d\mathbf{S}$: 요소 미소 면적