

8절점 Hybrid/Mixed 평면응력요소

Development of an Enhanced 8-node Hybrid/Mixed Plane Stress Element : HQ8-14 β Element

천경식* · 박원태** · 임성순***

Chun, Kyoung Sik · Park, Won Tae · Yhim Sung Soon

Abstract

A new enhanced 8-node hybrid/mixed plane stress elements based on assumed stress fields and modified shape functions has been presented. The assumed stress fields are derived from the non-conforming displacement modes, which are less sensitive to geometric distortion. Explicit expression of shape functions is modified so that it can represent any quadratic fields in Cartesian coordinates under the same condition as 9-node isoparametric element. The newly developed element has been designated as 'HQ8-14 β '. The presented element is compared with existing elements to establish its accuracy and efficiency. Over a wide range of mesh distortions, the element presented here is found to be exceptionally accurate in predicting displacements

Keywords : hybrid/mixed element, assumed stress, 8-node plane stress element, modified shape function, non-conforming displacement modes.

요 지

본 논문에서는 가정응력장과 수정된 형상함수를 이용한 새로운 8절점 hybrid/mixed 평면응력요소를 제시하였다. 가정응력장은 비적합 변위모드로부터 유도하였으며, 이는 요소의 찌그러짐에 대한 민감도를 완화시켜준다. 그리고 Cartesian 좌표계에서 9절점 등매개변수 요소와 동일한 조건하에서 2차 변위를 정확히 보간하도록 수정한 형상함수를 사용하였다. 제시한 8절점 hybrid/mixed 평면응력요소(HQ8-14 β)의 수치해석에 대한 정확성과 효율성을 검증하기 위해 기존의 참고문헌들과 비교, 분석하였다. 그 결과 본 논문에서 제시한 요소는 요소가 왜곡된 경우를 포함하여 우수한 성능을 보였다.

핵심어 : hybrid/mixed 요소, 가정응력, 8절점 평면응력요소, 수정된 형상함수, 비적합 변위모드

1. 서 론

유한요소는 요소수에 따른 해의 수렴성 및 정확성을 개선하고, 평판요소에서의 전단구속(shear locking), 쉘 요소에서의 면내잠김(membrane locking), 비압축성 문제에서의 체적구속(volumetric locking) 등의 잠김현상과 가상의 제로에너지모드를 제거하며, 요소형상의 왜곡에 대해서도 보다 우수한 성능을 지니도록 꾸준히 개발되고 있다. 요소개발을 위해 제안된 방법들중 대표적으로 감차적분, 대체 변형률, 비적합 변위모드 등이 있다. 변분개념에 있어서 변위 이외에 변형률 또는 응력을 독립변수로 도입하는 혼합법(hybrid/mixed method)에는 변위와 응력을 가정하는 가정응력법(assumed stress hybrid method)과 변위와 변형률을 가정하는 추가변형률법(enhanced assumed strain method)이 있다.

Hellinger-Reissner 변분원리에 근거하고 응력 및 변위를 독립 변수로 하는 가정응력법을 적용한 유한요소의 개발은

가장 폭넓게, 꾸준히 진행되고 있으며, 현재 유한요소 연구 방향의 길잡이 역할을 한다. 가정응력법에서 가장 중요한 과제는 합리적인 응력 근사 함수의 설계를 위한 최적 응력항(optimal stress terms)의 체계적 도출과 요소의 형상 왜곡에 민감하지 않고, 앞서 언급하였듯이 가상의 제로에너지모드 및 잠김현상이 발생하지 않는 응력 근사 방법이다.

Pian(1964)과 Pian과 Sumihara(1984)는 Hellinger-Reissner 범함수를 이용하여 가정응력 hybrid 요소를 개발하기 위한 새로운 방법을 제안하였다. 그들은 응력을 변분적 관점에서 평형식을 만족할 수 있도록 자연 좌표계상에서 근사하여 정의하였다. 이로써 요소의 왜곡 효과를 응력의 근사에 고려할 수 있었고 좌표계 독립성 문제도 해결하였다. 응력은 초기에 독립적인 다항식의 형태로 정의되며, 평형조건은 기하학적 섭동(geometric perturbation)이라는 수학적 조건을 갖는 적분형태의 방정식으로 보강함으로써 최적 응력항을 도출하였다. Pian과 Tong(1986)은 기하학적 섭동이 필요하지 않은

*정회원 · (주)바우컨설팅 기술연구원 · 공학박사(Email: chunks@dreamwiz.com)

**정회원 · 국립공주대학교 환경건설공학부 교수 · 공학박사 · 교신저자(Email: pwtae@kongju.ac.kr)

***정회원 · 서울시립대학교 토목공학과 교수 · 공학박사(Email: yhimss@uos.ac.kr)

응력 제한식을 제안했으며, Pian과 Wu(1988)는 경계에서 비적합 변위와 응력의 고차항에 의한 가상일이 0이 되도록 하는 조건을 이용하여 응력 근사 함수를 구하였다.

최근에, Sze(1992)는 hybrid 요소를 구성하기 위해 직교성(orthogonal)을 갖는 저차와 고차 응력모드를 사용하였고, 요소의 강성행렬 역시 저차와 고차로 구분하였다. 이때 저차 강성행렬이 부차 적분된(sub-integrated) 요소와 동일한 것으로 판명되면서 고차 강성행렬은 안정화 행렬로서의 역할을 수행한다. Chen과 Cheung (1995)은 가정응력장을 산정하기 위해 비적합 변위모드를 적절히 선택함으로써 요소의 찌그러짐에 대한 민감도를 완화시킬 수 있었다. Wu와 Cheung (1995, 1996)은 변분적 관점에서 평형조건을 보장하기 위해 변칙 평형조건(penalty equilibrium)을 도입하였고, 이를 이용하여 응력의 정확도를 높일 수 있음을 보였다.

Di와 Ramm(1994)은 비적합 변위모드를 사용하지 않는 엄밀한 수학적 조건을 도입하였다. 그들은 Hellinger-Reissner 원리에 근거한 다양한 혼합응력 요소를 소개하였다. Yeo와 Lee(1997)는 4절점 혼합응력 요소와 8절점 혼합응력 입체요소를 개선하기 위해 일반적인 비적합 변위모드를 제안하였다. Feng 등 (1997)은 혼합응력 유한요소의 안정성과 수렴성 기준 등을 종합적으로 다루었다.

이와 더불어 요소가 상당히 찌그러진 상황에서도 보다 개선되고 정확한 수치결과를 도출할 수 있는 평면응력요소 개발에 관한 연구는 꾸준히 진행되고 있다. 본 연구에서는, 8절점 혼합응력 요소를 위한 최적의 응력장을 선별하기 위한 접근법을 제안하였다. 본 논문에서 제안한 8절점 혼합응력 요소는 비적합 변위모드로부터 도출한 합리적인 최적의 응력장과 수정된 형상함수에 의해 구성되었고, 검증한 결과 요소의 찌그러짐에 대한 민감도가 낮으며, 보다 안정적이고 정확한 거동을 보였다.

2. 8절점 형상함수의 수정

8절점 형상함수는 9절점 등매개변수 요소와 동일한 조건하에서 2차 변위를 정확히 보간하도록 수정할 수 있다. 즉, 요소 중앙점의 변위를 요소 외곽을 이루는 8개 절점의 변위에 대한 선형조합으로 구속조건을 설정한다(Kikuchi 등, 1999; MacNeal과 Harder, 1992; Chun과 Kassegne, 2005; Chun 등, 2005).

$$\delta = \sum_{i=1}^8 \bar{N}_i \delta_i \quad (1)$$

$$\bar{N}_i = N_i^{(9)} + N_9^{(9)} T_i \quad (2)$$

여기서, $N_i^{(9)}$ 는 9절점 Lagrange 요소의 i 번 절점에 대한 형상함수이고, T_i 는 구속조건과 관련된 계수를 의미한다. 식(2)는 기존 8절점 유한요소의 형상함수 $N_i^{(8)}$ 와 계층적 함수 식으로 식(3)과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{N}_i = N_i^{(8)} + N_9^{(9)} (T_i - N_i^{(8)}(0,0)) \quad (3)$$

구속조건에 따른 계수 T_i 는 각 절점의 실제 좌표값에 의해

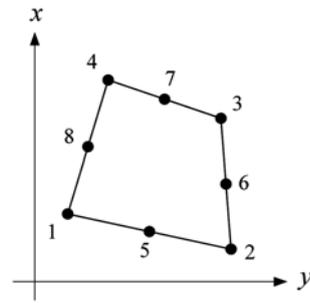


그림 1. 8절점 유한요소

결정되며, 식(4)는 8절점 Serendipity 요소의 형상함수 M_i^S 와 9절점 Lagrange 요소의 형상함수와의 관계를 나타낸 것이다. 식(5)는 본 논문에서 적용하고자 하는 8절점 Serendipity 요소의 수정된 형상함수이다(Kikuchi 등, 1999; 천경식 등, 2004; 천경식과 장석윤, 2004; 박원태 등, 2004).

$$M_i^S(\xi, \eta) = N_i(\xi, \eta) - 1/4 N_9(\xi, \eta) \quad (4a)$$

$$M_{i+4}^S(\xi, \eta) = N_{i+4}(\xi, \eta) + 1/2 N_9(\xi, \eta) \quad (4b)$$

$$M_i(\xi, \eta) = M_i^S(\xi, \eta) + \frac{D_i - D_k}{8(D_i + D_k)} N_9(\xi, \eta) \quad (5a)$$

$$M_{i+4}(\xi, \eta) = M_{i+4}^S(\xi, \eta) + \frac{D_m - D_i}{4(D_i + D_k)} N_9(\xi, \eta) \quad (5b)$$

여기서, 자연좌표계(natural coordinate system) ξ 와 η 는 경계부에서 ± 1 과 같으며, i -절점에서의 값은 각각 $\xi_i = -1, 1, 1, -1, 0, 1, 0, -1$ 과 $\eta_i = -1, -1, 1, 1, -1, 0, 1, 0$ 이다. D_i 는 절점 i 에서 Jacobian $\partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$ 의 4배와 동일한 값을 가지며 다음과 같이 정의한다.

$$D_i = \begin{bmatrix} x_j - x_i & x_m - x_i \\ y_j - y_i & y_m - y_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$(i, j, k, m) = \text{any one of } \begin{bmatrix} (1, 2, 3, 4) & (3, 4, 1, 2) \\ (2, 3, 4, 1) & (4, 1, 2, 3) \end{bmatrix} \quad (7)$$

MacNeal과 Harder (1992)가 제시한 8절점 형상함수와는 달리 식(5)에 나타낸 수정된 형상함수는 요소가 찌그러진 경우 8절점 형상함수를 나타내는 기본적인 단항식중 $\xi^2 \eta^2$ 을 정확하게 보간하는 장점을 지닌다.

3. 비적합 변위모드

비적합 변위모드의 기본개념은 요소의 적분과정에서 인위적으로 전단에너지를 무시하는 감차적분과는 달리 원래의 변위 형태에 새로운 변위(비적합 변위, incompatible displacement mode)모드를 추가하여 전단변형모드로 제약된 변위모드를 풀어 주어 실제 변위를 복원하는 것이다(최창근, 2003). 즉, 요소의 가정된 변위에 결여되어 있는 변위성분을 추가하는 것이다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n M_i^S \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^n \bar{N}_j \begin{Bmatrix} \lambda_j \\ \lambda_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

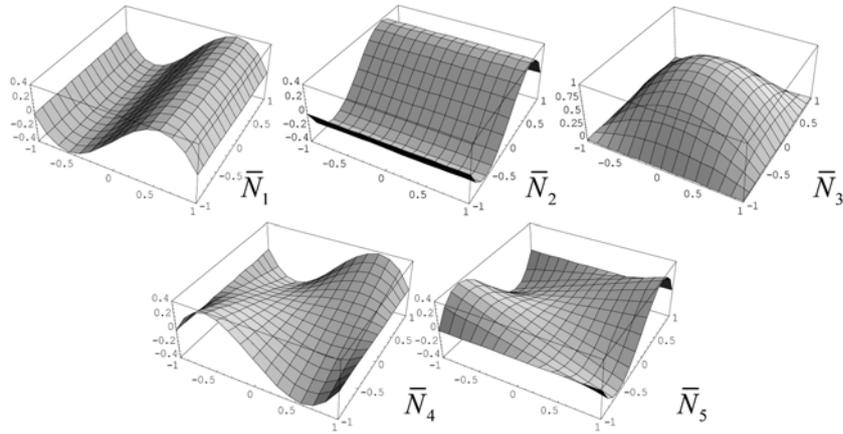


그림 2. 8절점 유한요소를 위한 비적합 변위모드

여기서, M_i^s 는 외시적으로 수정된 형상함수로서 앞서 식(5)에 정의하였다. \bar{N}_j 는 비적합 변위모드이다. m 은 요소당 절점수를, m 은 사용된 비적합 변위모드의 수를 의미한다. 8절점 Serendipity 요소에 사용가능한 기본적인 비적합 변위모드는 그림 2와 같고, 이를 수식으로 표현하면 식(9)와 같다 (Chun 등, 2005; Choi와 Park, 1999):

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \bar{N}_3 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \\ \bar{N}_4 &= \xi\eta(1-\xi^2), \bar{N}_5 = \xi\eta(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (9)$$

식(9)는 8절점 요소의 각 절점에서 0의 값을 가지면서 기존 등매개변수 요소(isoparametric element)에서 나타난 예기치 않은 제약조건을 완화하도록 선택된 모드들이다. 식(9)의 첫번째와 두번째 모드는 3차 다항식을, 세번째 모드는 불룩한 변위모드를 추가하기 위함이며, 네번째와 다섯번째는 비틀림에 대한 제약을 완화하기 위한 것이다(최창근, 2003).

최근 Kim과 Choi(1992), Choi와 Park(1999)는 선택적인 비적합 변위모드, 감차적분 그리고 대체전단변형률을 혼합하여 8절점 평판 휨요소(Plate bending element)의 성능을 개선하였다. 그들이 제시한 요소는 적용된 비적합 변위모드에 따라 구분된다. Kim과 Choi(1992)가 제시한 NC-QH는 비적합 변위모드 \bar{N}_1, \bar{N}_2 그리고 \bar{N}_5 를 사용하였으며, Choi와 Park (1999)은 비적합 변위모드 $\bar{N}_1 \sim \bar{N}_4$ 을 사용한 NMS-8P를 제시하였다.

본 논문에서는 면내거동을 개선하기 위해 두 개의 비적합 변위 \bar{N}_1 과 \bar{N}_2 로부터 다음 절에서 설명하는 가정응력장을 도출하여 면내강성에 추가하였다. 이때 hybrid 응력장의 합리적인 도출방법은 Pian와 Wu(1988), Chen과 Cheung(1995)이 제안한 비적합 변위모드를 이용한 조합방법을 따른다. Pian과 Wu(1988)는 hybrid 응력요소의 정식화 과정에서 비적합 변위모드를 추가 적용하는 최근의 연구동향에 대해서 hybrid 응력모델과 비적합 변위모델과의 관계를 제시함으로써 동등성을 입증하였다.

4. 가정응력장

최근, hybrid 응력요소의 최적의 응력장을 도출하기 위한 많은 합리적인 방법이 제시되었다. 이들 방법의 주요목적은 가정응력(assumed stress)을 위한 구속조건을 채택이다. Pain과 Tong(1986)은 가정응력의 고차항에 대한 구속조건을 다

음과 같이 제안하였다.

$$\int_{\Omega} (D \delta \mathbf{u}_h)^T \sigma_h d\Omega = 0 \quad (10)$$

여기서, σ_h 는 가정응력의 고차항이다. $\delta \mathbf{u}_h$ 는 비적합 변위모드의 변분(variation)을 의미한다. 식(10)은 고차항이 비적합 변형률과 직교해야 한다는 것을 의미하며, Chen과 Cheung (1995)는 이를 적용하여 4절점 평면응력요소의 개선방안을 제안하였다.

8절점 요소에 대해서 응력장 σ_e 에 대한 초기함수는 변형률장에 포함된 다항식을 고려하여 구성한다. 가정된 응력은 초기에 독립적인 ξ 와 η 의 2차항까지 취하며 식(11)과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_e &= (\mathbf{I}_c + \mathbf{P}_h)\beta \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 & \eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & \xi \eta & 0 & 0 & \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & \xi \eta & 0 & 0 & \xi^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{18} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, β 는 가정응력장에 대한 매개변수 벡터를 의미한다. 우선, 8절점 유한요소의 Jacobian 행렬 $[J]$ 은 다음과 같다.

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1^s}{\partial \xi} & \frac{\partial M_2^s}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial M_8^s}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_1^s}{\partial \eta} & \frac{\partial M_2^s}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial M_8^s}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_8 y_8 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

자연좌표계 ξ, η 와 직교좌표계 x, y 의 관계는 Jacobian 행렬을 적용하여 식(13)과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} j_{22} & -j_{12} \\ -j_{21} & j_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서, j_n 는 요소 중앙점 $(\xi, \eta)=(0, 0)$ 에서 정의된 Jacobian 행렬이다. 앞서 식(9)에 나타난 비적합 변위모드중 면내변위와 관련하여 사용할 \bar{N}_1 과 \bar{N}_2 에 의한 변위장을 식(14)와 같이 정의한다.

$$\mathbf{u}_\lambda = \begin{Bmatrix} u_\lambda \\ v_\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi(1-\xi^2)\lambda_1 + \eta(1-\eta^2)\lambda_2 \\ \xi(1-\xi^2)\lambda_3 + \eta(1-\eta^2)\lambda_4 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

식(10)에 정의된 구속조건에 식(13)과 (14)를 대입하여 정리하면 식(15)와 같이 확장하여 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (D\delta\mathbf{u}_{\lambda})^T \sigma_h d\Omega &= \iint_A \left[\begin{array}{c} u_{\lambda,x} \\ v_{\lambda,y} \\ u_{\lambda,y} + v_{\lambda,x} \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right] |j| d\xi d\eta \\ &= \iint_A \left[\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial y} \sigma_y + \left(\frac{\partial u_{\lambda}}{\partial y} + \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial x} \right) \tau_{xy} \right] |j| d\xi d\eta \\ &= \iint_A \left[\left(j_{22} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi} - j_{12} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \eta} \right) \sigma_x + \left(-j_{21} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \xi} + j_{11} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \eta} \right) \sigma_y \right. \\ &\quad \left. + \left(-j_{21} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \xi} + j_{11} \frac{\partial u_{\lambda}}{\partial \eta} + j_{22} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \xi} - j_{12} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \eta} \right) \tau_{xy} \right] |j| d\xi d\eta = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

평형조건을 만족하기 위해서는 위 식에서 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 그리고 λ_4 의 계수는 0이어야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} -j_{22}\beta_7 + j_{21}\beta_{17} &= 0 \\ j_{12}\beta_8 - j_{11}\beta_{18} &= 0 \\ j_{21}\beta_{12} - j_{22}\beta_{17} &= 0 \\ -j_{11}\beta_{13} + j_{12}\beta_{18} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

식(16)의 두 개의 독립변수 β_7 와 β_8 에 대해서 나머지 네 개의 종속변수를 소거할 수 있으며, 최종적으로 도출될 응력장에서 우선적으로 고차항은 식(17)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_h &= \hat{\mathbf{P}}_h \mathbf{B} \\ \hat{\mathbf{P}}_h &= \mathbf{P}_{h1} = \hat{\mathbf{P}}_{h2} = \begin{bmatrix} \xi 0 0 \eta 0 0 \xi \eta 0 0 & | & j_{21}^2 \xi^2 & j_{11}^2 \eta^2 \\ 0 \xi 0 0 \eta 0 0 \xi \eta 0 & | & j_{22}^2 \xi^2 & j_{12}^2 \eta^2 \\ 0 0 \xi 0 0 \eta 0 0 \xi \eta | j_{21} j_{22} \xi^2 & j_{11} j_{21} \eta^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

최종적으로 비적합 변위모드로부터 구한 응력장(stress fields)은 식(18)과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \sigma_c + \sigma_h = \mathbf{P} \cdot \beta = (\mathbf{I}_c + \mathbf{P}_{h1} + \hat{\mathbf{P}}_{h2}) \beta \\ &= \begin{bmatrix} 1 0 0 | \xi 0 0 \eta 0 0 \xi \eta 0 0 & | & j_{11}^2 \eta^2 & j_{21}^2 \xi^2 \\ 0 1 0 | 0 \xi 0 0 \eta 0 0 \xi \eta 0 & | & j_{22}^2 \eta^2 & j_{12}^2 \xi^2 \\ 0 1 1 | 0 0 \xi 0 0 \eta 0 0 \xi \eta | j_{11} j_{12} \eta^2 & j_{21} j_{22} \xi^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{14} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

절점당 2개의 자유도로 구성된 8절점 평면응력요소는 요소당 16개의 자유도를 갖는다. 그러므로 최소 13개 이상의 독립변수를 갖는 응력장이 필요하며 식(18)에 나타낸 응력장은 8절점 가정응력 요소를 개발하는데 있어서 충분하다 (Feng 등, 1997, Chun 등, 2005). 그러나 식(23)의 응력장에 대한 14개의 독립변수는 요소단위에서 정적응축방법에 의해 소거되므로 전체적인 자유도는 증가시키지 않는다. 응력장을 행렬형태로 표현하면 식(19)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_e = \mathbf{P} \cdot \beta = (\mathbf{I}_c + \mathbf{P}_{h1} + \mathbf{T}_0 \mathbf{P}_{h2}^*) \beta \quad (19)$$

여기서,

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{21}^2 & 2j_{11}j_{21} \\ j_{12}^2 & j_{22}^2 & 2j_{12}j_{22} \\ j_{11}j_{12} & j_{21}j_{22} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} \end{bmatrix}, \mathbf{P}_{h2}^* = \begin{bmatrix} \eta^2 & 0 \\ 0 & \xi^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

자연좌표계에서 T_0 는 요소의 원점 $(\xi, \eta) = (0, 0)$ 에서 계산된 Jacobian 행렬의 요소들로 구성된 변환행렬이다. 변환행렬은 자연좌표계에서 정의된 공변(共變, covariant) 응력을 직교좌표계에서 정의된 물리적인 응력으로 변환시키는 역할을 한다. 비적합 변위모드와 구속조건인 식(10)에 의해 최적 응력항을 구하는 방법은 응력근사함수의 행렬식 P 를 이용하여 자연좌표계의 성분 즉, 공변응력으로 정의한 후 이를 변환행렬을 이용하여 전체 좌표계의 물리적 성분으로 변환한 것과 동일하다 (Yeo와 Lee, 1997). 따라서 비적합 변위모드를 사용하여 8절점 평면응력요소의 최종적인 응력근사 함수를 도출함으로써 요소형상 왜곡에 대해 강건한 응력근사함수의 개발이 가능함을 알 수 있다.

5. Hybrid 응력요소의 정식화

Hybrid 응력수식화는 가정응력장에 대해 구속조건을 갖는 Hellinger-Reissner 원리에 근거한다. Pian과 Wu(1988)에 의한 Hellinger-Reissner 범함수는 다음과 같다.

$$\Pi_{HR} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \mathbf{S} \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \sigma^T (D\mathbf{u}) d\Omega \quad (20)$$

여기서 Ω 는 요소 내부 영역을 의미한다. S 는 재료의 연성행렬을, D 는 변형률·변위관계를 위한 미분연산자를 의미한다. u 는 적합 변위모드 u_q 와 비적합 변위모드 u_{λ} 의 조합인 전체 변위 $u = u_q + u_{\lambda}$ 이다. σ 는 가정응력 벡터를 나타낸다.

유한요소 수식화를 위해 하나의 요소에 대하여 정의된 함수 공간 내에서 변위, 응력을 다음과 같이 근사한다. 이때 가정응력은 요소경계에서 연속조건을 필요로 하지 않으므로 도입된 응력의 근사인자들은 요소단위에서 독립적으로 정의될 수 있다.

$$u = N\mathbf{d} \quad (21)$$

$$\sigma = P\beta \quad (22)$$

여기서, β 는 가정응력 변수에 관한 벡터이다. N 는 자연좌표계에서 정의된 기본적인 등매개변수 형상함수의 행렬이다. P 는 응력 근사 함수의 행렬이다.

식(20)에 식(21)과 (22)를 대입하여 정리하면, 다음과 같은 행렬식 형태의 Hellinger-Reissner 범함수를 구할 수 있다.

$$\Pi_{HR} = -\frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \beta + \beta^T \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (23)$$

여기서

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} d\Omega$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} \mathbf{P}^T \mathbf{B} d\Omega \quad (\mathbf{B} = D \cdot \mathbf{N})$$

식(23)을 응력 근사 인자 및 절점 변위에 대하여 변분을 취하면 시스템 방정식을 구할 수 있다. 이때 응력 근사 인자는 요소 단위에서 독립적으로 정의되었기 때문에 응력 근사 인자를 절점 변위로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\beta = -\mathbf{H}^{-1} \mathbf{G} \cdot \mathbf{d} \quad (24)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{G}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{G}, \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (25)$$

결과적으로 요소의 강성행렬은 식(25)과 같이 구성할 수

있으며, 3×3 Gauss-Legendre 적분을 사용하여 구한다.

6. 수치해석 및 예제

본 논문에서 제시한 hybrid 응력요소의 성능은 이 장에서 평가한다. 선정된 수치예제는 종종 사각형 형상을 갖는 요소 (quadrilateral element)의 성능평가로 사용된다. 모든 예제에 사용된 재료는 선형, 탄성, 균질 그리고 등방성의 성질을 갖는다고 가정한다. 해석모델의 단위는 모두 일관성있게 처리하였으므로 특정 단위로 구분지어 표현할 필요는 없다. 제시된 요소는 참고문헌들의 수치결과와 비교하여 정확도 및 수렴성이 높은 것으로 평가되었다. 표 1은 제시된 요소의 평가기준 또는 비교대상으로 선정된 평면응력요소 항목을 정리한 것이다.

6.1 고유치시험(Eigenvalue Test)

개별 요소강성행렬을 이용한 고유치시험을 통하여 가상의 제로에너지모드(spurious zero energy mode) 발생 여부를 검증한다. 평면응력요소는 구속조건이 없는 하나의 요소에 대하여 3개의 강체운동 모드(rigid body mode)가 존재하여야 한다. 고유치시험은 한 변의 길이 1.0이고 탄성계수 1.0, 포아송비 0.25, 두께 1.0인 정사각형 단일 체는 모델에 대하여 수행하였고, 그 결과 HQ8-14β는 표 2에서 보듯이 가상의 제로에너지모드는 발생하지 않음을 알 수 있다.

6.2 조각시험(Patch Test)와 캔틸레버 보

본 연구에서 사용한 HQ8-14β 요소가 일정변형률 및 응력 상태를 표현할 수 있는지의 여부를 알아보기 위해 그림 3과 같이 MacNeal과 Harder(1985)가 제안한 조각시험을 수행하였다. 다음 식(26)과 같이 정의된 변위 u 와 v 를 해석모델의 각 절점 좌표값(x, y)에 근거하여 계산하고, 이를 해당절점에 재하하였다. 즉, 변형상태에서 해석모델의 각 절점에 대한 변형률 및 응력을 산출하였고, 그 결과 식(27)과 같이 일정변형률 및 응력상태를 나타내었다.

$$u = 10^{-3}(x+y/2) \quad (26a)$$

$$v = 10^{-3}(x/2+y) \quad (26b)$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \gamma_{xy} = 10^{-3}, \sigma_x = \sigma_y = 1.333, \tau_{xy} = 0.4 \quad (27)$$

요소의 찌그러짐 정도가 유한요소 해석결과의 정확도에 미

표 2. 고유치(Eigenvalue)

λ_i	고유치
1	4.5939E-00
2	4.5939E-00
3	2.1333E-00
4	2.1031E-00
⋮	⋮
12	3.0155E-01
13	1.5621E-01
14	1.0000E-07
15	-5.0000E-08
16	-5.0000E-08

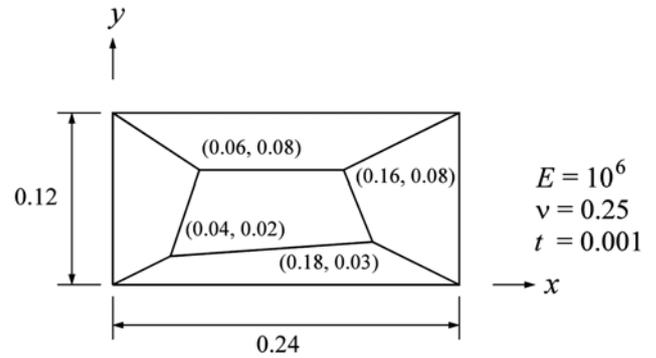


그림 3. 조각시험(Patch Test)

치는 영향에 대하여 두가지 캔틸레버 보를 해석모델로 설정하였다. 이는 많은 연구자들에 의해 수행되고 있는 또 다른 조각시험이다. 해석모델의 기하학적 형상, 경계 및 하중조건은 그림 4에 나타난 바와 같으며, 수치해석결과는 표 3에 비교하여 나타내었다. 표 2에서 u_1 은 x 방향에 대한 변위를, u_2 는 y 방향에 대한 변위를 의미한다.

LC1은 일정변형상태를 나타내는지를 알아보기 위한 조각시험(Patch test)의 일부로써, 비교대상 모두 변위가 해석해와 동일하였으며, 이는 조각시험의 통과를 의미한다(Di와 Ramm, 1994). LC2는 해석모델의 휨거동을 나타내기 위함이며, LC3과 LC4는 요소형상의 왜곡에 대한 영향을 검증하기 위함이다. 본 논문에서 제시한 평면응력요소 HQ8-β14은 기존 8절점 요소인 Q8과 QPM8뿐만 아니라 면내회전자유도를 갖는 쉘 요소인 QC9D보다 훨씬 정확성이 높은 것으로 평가된다. 단지, Q8 요소는 LC2에 대해서 상대적으로 다소

표 1. 수치해석 결과비교를 위한 유한요소

Name	Description
Q8	Standard 8node quadratic plane stress element.
QPM8	2D plane stress continuum element in LUSAS
QC9D	Membrane finite element with drilling degrees of freedom derived by Groenwold and Stander (1995).
5β-EP	5β family with equilibrium constraint plus perturbation derived by Di and Ramm (1994).
8β-EP	8β family with equilibrium constraint plus perturbation derived by Geyer and Groenwold (2002).
M5β	4node plane stress element with refined transformation matrix derived by Yeo and Lee (1997).
HQ8-14β	Present hybrid assumed stress 8node plane stress element with nonconforming displacement modes and modified shape functions

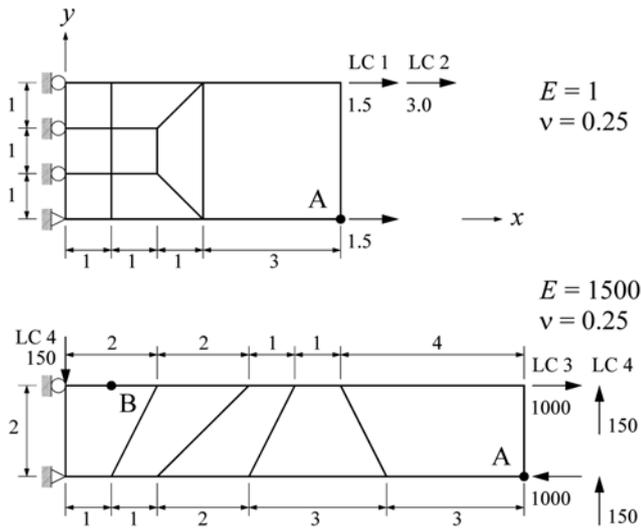


그림 4. 조각시험(Patch Test) 및 캔틸레버 보 해석모델

표 3. 조각시험 수치해석 결과비교

Element	LC1		LC2			LC3		LC4	
	$u_{1,A}$	$-u_{2,A}$	$u_{2,A}$	$-\sigma_{x_B}$	τ_{xy_B}	$u_{2,A}$	$-\sigma_{x_B}$		
Q8	6.00	17.80	99.70	3003	2.72	101.41	4095		
QPM8	6.00	16.80	99.99	2999	1.65	102.45	4158		
QC9D	6.00	16.78	81.86	2541	-	84.59	3453		
5β -EP	6.00	17.64	96.18	3014	-	98.19	4137		
8β -EP	6.00	16.87	84.86	2881	-	88.00	3822		
HQ8-14 β	6.00	17.75	100.00	3000	0.00	102.13	4137		
Analytical	6.00	18.00	100.00	3000	0.00	102.00	4050		

좋은 결과를 보이고 있을 뿐이다.

6.3 Cook의 평면문제

전단력과 휨이 동시에 작용하는 왜곡된 요소형상을 갖는 해석모델에 대해 요소의 개수에 따른 거동특성을 평가하기 위하여 Cook의 평면문제를 적용하였다. Cook의 평면문제는 주로 요소의 면내방향 거동을 평가하기 위하여 사용되는 모델이다. 그림 5에서 보듯이 한변은 고정단이고 다른 한변은 단위하중을 받는 것으로 해석모델이 구성되며, 해석을 위해 사용된 요소분할은 2×2 , 4×4 , 그리고 8×8 이다. 보의 끝단 중앙부 C점에서의 수직처짐 δ_c , 보의 상하부 A점과 B점에서의 최대·최소 주응력을 정해(Simo 등, 1989)에 대한 비율로 정규화하여 표 4와 5에 각각 비교하여 나타내었다. 표에서 보듯이 제시된 요소 HQ8-14 β 은 매우 정확한 결과를

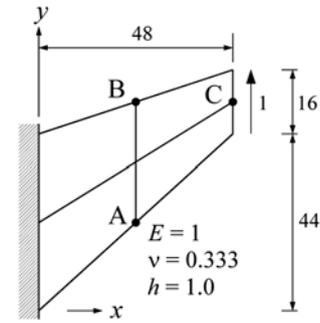


그림 5. Cook의 면내문제 해석모델

표 4. 평면응력문제의 수직처짐(δ_c)비교

Element	2×2	4×4	8×8
Q8	0.950	0.992	0.999
QPM8	0.965	0.992	0.999
QC9D	0.806	0.946	0.985
5β -EP	0.884	0.963	0.991
8β -EP	0.841	0.950	0.986
HQ8-14 β	0.968	0.993	0.999
Best known	23.91		

표 5. 평면응력문제의 최대·최소 주응력 비교

Element	2×2 mesh		4×4 mesh		8×8 mesh	
	$(\sigma_{\max})_A$	$(\sigma_{\min})_B$	$(\sigma_{\max})_A$	$(\sigma_{\min})_B$	$(\sigma_{\max})_A$	$(\sigma_{\min})_B$
Q8	1.057	1.044	1.025	1.002	1.012	1.013
QPM8	1.106	1.070	1.030	1.012	0.012	1.013
QC9D	0.779	0.804	0.950	0.948	0.984	1.001
5β -EP	0.786	0.778	0.950	0.924	0.994	0.988
8β -EP	0.768	0.818	0.959	0.906	0.998	0.990
HQ8-14 β	1.099	1.065	1.031	1.004	1.012	1.013
Best known	0.2360	-0.2010	0.2360	-0.2010	0.2360	-0.2010

나타낸다.

6.4 직선 캔틸레버 보

MacNeal과 Harder(1985)에 의해 제시된 캔틸레버 보는 그림 6에서와 같이 3가지 요소분할에 대해서 해석한다. 본 해석예제는 동일한 모델에 대해서 직사각형, 사다리꼴, 평행 사변형과 같은 다양한 요소형상에 대한 해의 민감도와 높은 종횡비(1:5)를 해결할 수 있는 능력을 가졌는지를 증명하기 위함이다.

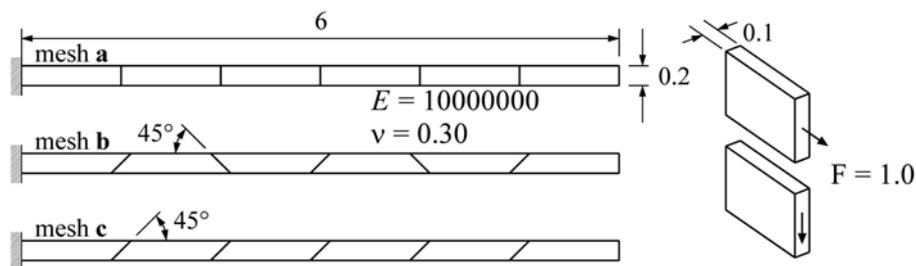


그림 6. 직선 캔틸레버 보의 해석모델

표 6. 직선 캔틸레버 보의 정규화된 수치해석 결과비교

Tip load direction	Element	Theoretical solution	mesh a	mesh b	mesh c
Extension	M5β	3.0×10 ⁻⁵	1.000	1.000	1.000
	Q8		0.998	0.998	0.998
	QPM8		1.000	1.000	1.000
	HQ8-14β		1.000	1.000	1.000
Inplane shear	M5β	0.1081	1.000	0.378	0.957
	Q8		0.982	0.899	0.980
	QPM8		0.987	0.967	0.987
	HQ8-14β		0.987	0.975	0.987

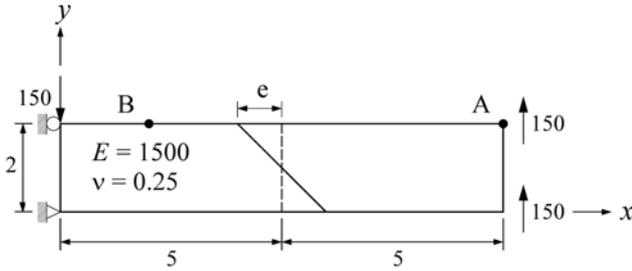


그림 7. 요소왜곡에 대한 해석모델

인장력과 면내전단력을 받는 보의 이론적 해석치는 전단변형효과를 고려한 보 이론으로부터 계산하며 표 6에 각각 나타내었다. 인장력을 받는 경우 요소형상에 관계없이 비교대상으로 제시된 모든 요소가 좋은 결과를 보여준 반면, 면내전단력에 관한 문제에서 HQ8-14β의 수치결과는 M5β와 Q8과 비교하여 다양한 요소형상에서 가장 우수한 결과를 보여주고 있다. 즉, 본 연구에서 제시된 평면응력요소 HQ8-14β는 요소형상에 대한 민감도가 적어 해의 정확성이 높으며, 다른 요소들에 비해 정확도와 비교하여 최대 3% 미만의 오차를 갖는다.

6.5 요소왜곡에 대한 민감도 분석

유한요소의 요소왜곡에 대한 민감도를 측정하기 위하여 그림 7과 같이 편심 e 를 갖는 캔틸레버 보를 해석모델로 설정한다. 기하학적 요소왜곡의 정도를 나타내는 편심 e 에 대한 A와 B점에서의 수직처짐(δ_A)과 응력($\alpha_{x,B}$)을 정규화하여 그림 8에 비교하였다.

요소 Q8은 $e=0$ 에서조차 정확한 결과를 도출하지 못하였으며, QPM8은 $e>2$ 에서 수직처짐이 점차 증가하는 경향을 나타내고 있다. 이들에 비해 HQ8-14β는 과도한 요소왜곡에 대해서도 낮은 민감도를 보이며 매우 정확한 결과를 보여주고 있다. 참고적으로, A점에서의 처짐과 B점에서의 응력에 대한 정해는 각각 102.04, 3375이다.

7. 결 론

본 논문에서는 비적합 변위모드와 수정된 형상함수를 이용하여 새롭게 보강된 8절점 hybrid/mixed 평면응력요소를 제시하였다. 우선, 면내거동을 개선하기 위해 2개의 비적합 변위모드로부터 적절한 응력 근사 함수를 유도하였다. 또한 x-

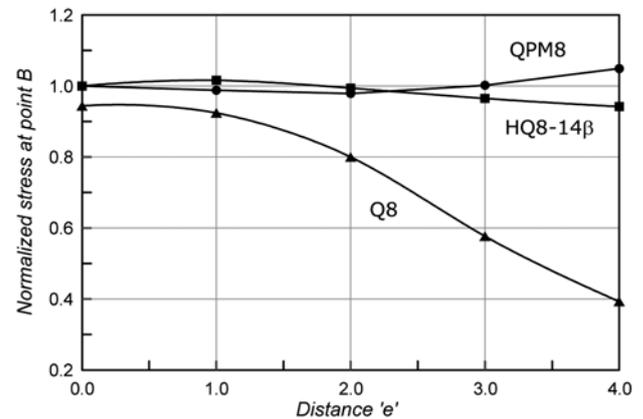
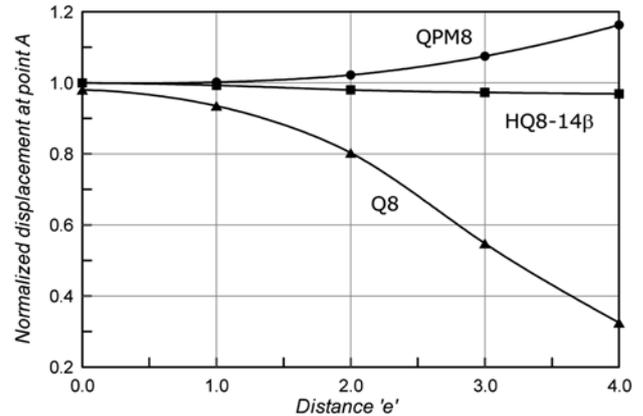


그림 8. 요소왜곡에 대한 처짐 및 응력비교

좌표계에서 정의된 2차 다항식을 통해 기존의 8절점 형상함수를 수정함으로써 요소의 찌그러짐에 대해서도 충분한 정확도를 가질 수 있도록 하였다. Hellinger-Reissner 변분 원리에 기초한 8절점 hybrid 응력요소의 정확도와 효율성을 증명하기 위해 참고문헌의 결과들과 비교하였다. 그 결과 요소 형상 왜곡의 민감성 및 거동의 정확성 측면에서 기존의 유한요소보다 성능이 우수함을 알 수 있었다.

참고문헌

- 박원태, 천경식, 임성순(2004) 직접수정된 8절점 가중변형률 유한요소를 이용한 복합적층판의 정적, 좌굴 및 자유진동 해석, 한국구조물진단학회 논문집, 제8권 4호, pp. 107-114.
- 천경식, 임성순, 장석운(2004) 등방성 및 복합적층판 해석을 위한 개선된 8절점 Serendipity 유한요소, 대한토목학회 논문집, 대한토목학회, 제24권 제2A호, pp. 401-409.

- 천경식, 장석윤(2004) 8절점 Serendipity 가정변형률 평판휨요소의 효율적인 성능개선을 위한 간단한 직접수정방안, **한국강구조학회 학술발표대회 논문집**, pp. 330-337.
- 최창근(2003), **유한요소법**, 테크노 프레스.
- Chun K.S. and Kassegne S.K. (2005) A new, efficient 8-node Serendipity element with explicit and assumed strain formulations, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Technology*, Vol. 6(4), pp. 285-292.
- Chun K.S., Kassegne S.K. and Park W.T. (2005) A quadratic hybrid assumed stress plane element using non-conforming displacement modes and modified shape functions, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, submitted.
- Choi C.K. and Park Y.M. (1999) Quadratic NMS Mindlin-plate-bending element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, pp. 1273-1289.
- Chen W. and Cheung Y.K. (1995) A robust refined quadrilateral plane element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 649-666.
- Di S. and Ramm E. (1994) On alternative hybrid stress 2D and 3D elements, *Engineering Computations*, Vol. 11, pp. 49-68.
- Feng W., Hoa S.V. and Huang Q. (1997) Classification of stress modes in assumed stress fields of hybrid finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 4313-4339.
- Groenwold A.A. and Stander N. (1995) An efficient 4-node 24 D.O.F. thick shell finite element with 5-point quadrature, *Engineering Computations*, Vol. 12, pp. 723-747.
- Geyer S. and Groenwold A.A. (2002) Two hybrid stress membrane finite element families with drilling rotations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 583-601.
- Kim S.H. and Choi C.K. (1992) Improvement of quadratic finite element for Mindlin plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 197-208.
- Kikuchi F., Okabe M. and Fujio H. (1999) Modification of the 8-node serendipity element, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 179, pp. 91-109.
- MacNeal R.H. and Harder R.L. (1985) A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, pp. 3-20.
- MacNeal R.H. and Harder R.L. (1992) Eight nodes or nine?, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 33, pp. 1049-1058.
- Pian T.H.H. (1964) Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions, *AIAA Journal*, Vol. 2, pp. 1333-1376.
- Pian T.H.H. and Sumihara K. (1984) Rational approach for assumed stress finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 1685-1695.
- Pian T.H.H. and Tong P. (1986) Relation between incompatible displacement model and hybrid stress model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 22, pp. 173-181.
- Pian T.H.H. and Wu C.C. (1988) A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 2331-2343.
- Sze K.Y. (1992) Efficient formulation of robust mixed element using orthogonal stress/strain interpolants and admissible matrix formulation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1-20.
- Simo J.C., Fox D.D. and Rifai M.S. (1989) On stress resultant geometrically exact shell model. Part II: the linear theory; computational aspects, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 73, pp. 53-92.
- Wu C.C. and Cheung Y.K. (1995) On optimization approaches of hybrid stress elements, *Finite Elements Analysis and Design*, Vol. 21, pp. 111-128.
- Wu C.C. and Cheung Y.K. (1996) Penalty-equilibrating approach and an innovation of 4-noded hybrid stress elements, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 12, pp. 707-717.
- Yeo S. and Lee B.C. (1997) New stress assumption for hybrid stress elements and refined four-node plane and eight-node brick elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 2933-2952.

(접수일:2005.9.22/심사일:2005.10.25/심사완료일:2006.1.20)