

## 최적 구매량 결정을 위한 QF 계약 모형

†김종수\* · 김태영\*\* · 강우석\*\*

### A Quantity Flexibility Contract Model for Optimal Purchase Decision

Jong Soo Kim\* · Tai Young Kim\*\* · Woo Seok Kang\*\*

#### ■ Abstract ■

Quantity Flexibility contract coordinates individually motivated supplier and buyer to the systemwide optimal outcome by effectively allocating the costs of market demand uncertainty. The main feature of the contract is to couple the buyer's commitment to purchase no less than a certain percentage below the forecast with the supplier's guarantee to deliver up to a certain percentage above.

In this paper we refine the previous models by adding some realistic features including the upper and lower limits of the purchase. We also incorporate purchase and canceling costs in a cost function to reflect the real world contracting process more accurately. To obtain the solution of the model, we derive a condition for extreme points using the Leibniz's rule and construct an algorithm for finding the optimal solution of the model. Several examples illustrating the algorithm show that the approach is valid and efficient.

Keyword : Supply Chain Management, Supply Contracts, Quantity Flexibility

## 1. 서론

공급사슬 내에서 체결되는 계약들은 의사결정 권리의 명시, 가격과 수량의 신축성, 환매정책, 할당규칙, 그리고 품질에 관련된 것들이 주종을 이루고 있다(Tsay와 Lovejoy[13]). 그 중에서 수량의 신축성을 갖는 계약은 불확실한 수요에 가장 효율적으로 대처할 수 있는 공급 계약 방식이라고 평가되고 있다. 대부분의 실제 계약 상황에서 구매자는 공급자보다 더 정확한 수요 정보를 가지며 이를 계약 협상에 반영할 수 있다. 반면에, 공급자는 구매자를 통해서만 고객의 수요 정보를 접할 수 있으므로 구매자의 부풀려진 주문(phantom order)에 대응하기 위해 초기 주문량 중 제한된 범위의 양만을 취소할 수 있도록 하는 정책을 선호하게 된다. 즉 구매자가 예약한 주문량 중 일정한 범위의 양만을 취소할 수 있도록 하여 수요의 불확실성에 대한 위험을 구매자와 공급자가 공동으로 부담하기를 원한다.

수량 신축성을 갖는 대표적인 계약 방식들로는 BA(backup agreement), MC(minimum commitments), 그리고 QF(quantity flexibility) 등이 있으며 이에 관한 이전 연구들은 다음과 같다. Eppen과 Iyer[5]는 구매자가 구매한 상품의 일부를 공급자에게 반품하는 것을 허용하는 계약 방식을 BA라 하였고 그 효율성에 관하여 연구하였다. BA는 의류와 같이 계절성이 있고, 납기기간이 긴 물품에 대하여 주로 사용되고 있다.

MC 계약은 구매자가 공급자로부터 구매해야 하는 최소 구매량을 지정하는 방식이다. 이와 관련한 연구들을 살펴보면 Anupindi와 Akella[1]는 유한한 기간을 기준으로 구매자가 매 기간마다 구매할 일정량을 결정하는 모형을 연구하였다. 공급자의 가격할인은 구매되는 양의 크기에 따르고, 추가되는 양은 정상가격으로 구매하는 시스템에서는 수정된  $(s, S)$  정책이 최적의 정책임을 보였다. Moinzadeh와 Nahmias[8]는 구매자가 예약한 주문량을 수정할 경우에 비용이 부과되는 문제를 연구하였다. 이들 두 연구들은 주문량을 증가시키는 경우만을 고려하

였다는 한계점을 가지고 있다. 전체 계약 기간 동안의 최소 구매량을 정하는 문제는 Bassok와 Anupindi[2]에 의해 연구되었으며, 정해진 계획기간(단일기간과 2기간)을 기준으로 안정상태의 수요를 가지는 모형을 동적계획법을 이용하여 분석하였다.

QF 계약은 Tsay[11]의 구매자와 공급자간의 보상(compensation)에 관한 연구에서 시작되었다. 그 후 Tsay[12]는 QF 계약에서의 인센티브, 비능률의 원인, 효율성 개선을 위한 방안 등과 새로운 수요 정보를 반영한 주문량 조정 과정을 상세히 분석하였다. Tsay와 Lovejoy[6]는 공급사슬 내의 다단계 재고 시스템을 대상으로 시스템의 총비용을 최소화하는 수리 모형을 만들고, 시스템 전체의 효율성에 관한 연구를 수행하였다. Bassok과 Anupindi[3]는 수요가 독립적이고 안정적(stationary)일 때 구매자가 선택하는 수량 신축성의 범위에 관하여 연구하였다. Cachon과 Lariviere[4]는 공급사슬내의 구매자와 구매자사이의 정보공유여부에 따른 모형을 제시하였다. Martinez-de-Albeniz와 Simchi-Levi[7]는 QF 보충 계약에 대한 포트폴리오 접근을 연구하였다. 이들은 공급 사슬에서 구매 보충을 위하여 장기 계약과 추가 구매의 선택권으로 구성된 포트폴리오 모형을 제시하였고, 이를 통하여 위험 부담을 줄이고 기대 수익을 증가시키는 QF 계약 정책을 유도할 수 있음을 보였다.

시간의 흐름에 따른 정보의 갱신에 초점을 둔 연구들도 활발하게 진행되어 왔다. Sethi 등[9]은 2단계 시스템에서 시장 가격과 갱신된 수요 정보에 의해 주문량이 바뀌는 QF 계약 과정을 모형으로 제시하였으며, Xu[15]는 복수기간의 공급 계약 문제를 동적계획법을 이용하여 분석하였다. Wu[14]는 QF 계약에서 초기 수요분포를 베이저안 방법을 이용하여 갱신하고 이를 기준으로 구매 수량을 결정하는 방법을 제안하였다.

이전 연구들을 기준으로 할 때 본 연구의 가장 큰 의미는 수량 신축성의 특성을 보다 정확하게 모형에 반영하였다는 데 있다. 이전 연구들과는 달리 본 논문에서는 추가 구매가 이루어질 때와 예약한 구매를

최소하는 각각의 경우에 추가 구매 가격을 지불하거나 예약 취소 범칙금을 부과하도록 하여 모형을 현실성을 제고하였다. 본 연구의 두 번째 의의는 제시된 모형을 기준으로 구매량을 확정할 수 있는 해법을 제시하였다는 점이다. 모형의 극점이 가져야 하는 수학적 특성을 이용하여 최적해가 가지는 조건을 유도하였으며 이를 이용하여 최적해를 효율적으로 도출할 수 있는 해법을 개발하여 결과의 응용성을 대폭 높였다.

본 논문의 2장에서는 수리 모형을 제시하고, 3장에서는 제시된 수리 모형의 해를 찾는 해법을 소개한다. 4장에서는 수치 예제를 통하여 제안된 해법의 수행을 보이며 5장에서는 결론과 향후 연구과제에 대하여 설명한다.

## 2. 수리모형

본 연구에 사용되는 기호는 다음과 같다.

### • 기호정의(notation)

#### 모수 및 변수

$p$	초기 구매 단가
$r$	추가 구매 단가( $r > p$ )
$c$	개당 구매 취소 환급액( $c < p$ )
$b$	개당 품절 비용
$s$	기간말 개당 잔존 가치( $s < p$ )
$q$	초기 주문량
$\alpha$	추가 구매량 비율의 상한치
$\beta$	구매 취소량 비율의 상한치
$C(q^+, q^-   q)$	구매자의 기대 총비용

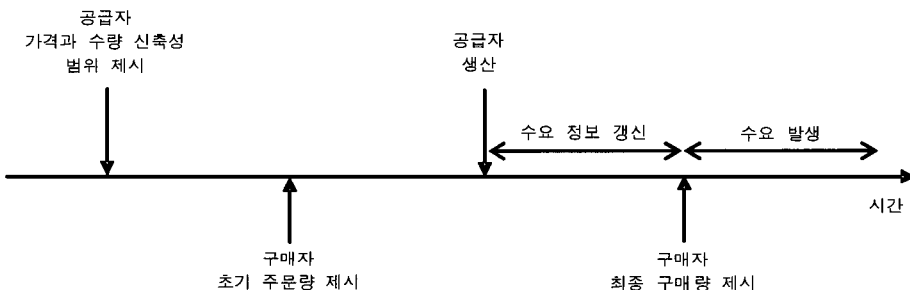
$G(x)$  갱신된 수요정보를 기준으로 한 수요의 누적확률분포이며 그  $p.d.f.$ 는  $g(x)$

#### 결정 변수

$q^+$	추가 구매량
$q^-$	구매 취소량
$q^c$	갱신된 수요 예측치를 이용하여 초기 주문량을 보정한 최종 구매량; $q^c = q + q^+ - q^-$

본 연구는 단일 품목을 대상으로 구매자와 공급자가 일회의 QF방식의 공급 계약을 체결하는 것에 관한 것이다. [Figure 1]에 도해한 것처럼 계약 과정에서 구매자와 공급자가 추가 구매량  $q^+$ 의 범위 ( $0 \leq q^+ \leq \alpha q$ )와 구매 취소량  $q^-$ 의 범위( $0 \leq q^- \leq \beta q$ ), 그리고 추가 구매 단가와 취소 비용 단가를 협상하게 된다(이 때  $\alpha$ 와  $\beta$ 는  $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ 이며 현실 계약에서 흔히 보듯이 구매자의 구매 취소 환급액  $c$ 는 초기 구매 비용  $p$ 보다 작고, 추가 구매 비용  $r$ 은 초기 구매 비용보다 크다고 가정한다.). 그리고 결정된 계약 조건들과 수요예측치를 바탕으로 구매자는 공급자에게 초기 주문량을 제시하게 된다.

이 후 실제수요 발생시점이 다가와서 수요 정보가 갱신되면 구매자는 자신의 기대 비용을 최소화하도록 추가 구매량 또는 구매 취소량을 결정하여 최종 구매량을 확정한다. 이 때 최종 구매량은 앞서 언급한 가정들에 의해  $q - \beta q \leq q^c \leq q + \alpha q$ 의 조건을 만족해야 한다. 본 논문에서는 초기 주문량과 갱신된 수요정보가 주어진 상황에서 최종 구매량을 결정하는 모형을 제시하고 모형의 최적해를 도출하는 해법을 제시하고자 한다.



[Figure 1] QF 계약 과정

## 2.1 구매자의 기대 비용 함수

본 논문은 단일 기간을 가정하므로 보관 비용은 고려하지 않는다. 따라서

$$\begin{aligned} & \text{구매자의 기대 총비용} \\ &= (\text{초기 구매 비용} + \text{추가 구매 비용} \\ & \quad + \text{기대 품질 비용}) - (\text{구매 취소 환급액} \\ & \quad + \text{기대 잔존 가치}) \end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

그 중에서 초기 구매 비용은 식 (1)과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \text{초기 구매 비용} &= \text{초기 구매 단가} \\ & \quad \times \text{초기 구매량} = pq \end{aligned} \quad (1)$$

그리고 추가구매와 기대 품질 비용들은 식 (2), 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{추가 구매 비용} &= \text{추가 구매 단가} \\ & \quad \times \text{추가 구매량} = rq^+ \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{기대 품질 비용} \\ &= \text{개당 품질 비용} \times \text{기대 품질 개수} \\ &= b \int_{q+q^+-q^-}^{\infty} \{x - (q+q^+ - q^-)\} g(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

나머지 두 개의 항목들은 식 (4), 식 (5)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{구매 취소 환급액} &= \text{개당 구매 취소 환급액} \\ & \quad \times \text{구매 취소량} = \alpha q^-. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{구매 잔존 가치} \\ &= \text{개당 잔존 가치} \times \text{기대 잔존 개수} \\ &= s \int_0^{q+q^+-q^-} \{(q+q^+ - q^-) - x\} g(x) dx. \end{aligned} \quad (5)$$

이상의 식 (1)~(5)를 이용하면 구매자의 기대 총비용을 식 (6)과 같이 완성할 수 있다.

$$\begin{aligned} C(q^+, q^- | q) \\ &= \left[ pq + rq^+ + b \int_{q+q^+-q^-}^{\infty} \{x - (q+q^+ - q^-)\} g(x) dx \right] \\ & \quad - \left[ \alpha q^- + s \int_0^{q+q^+-q^-} \{(q+q^+ - q^-) - x\} g(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2.2 수리 모형

구매자의 기대 총비용을 최소화하는 최종 구매량  $q^c$ 를 구하는 문제는 유도한 비용식들을 이용하여 다음과 같이 비선형계획법으로 모형화 할 수 있다. 제약식 (9)와 식 (10)은 추가 구매량과 구매 취소량의 가능범위를 나타낸다.

**NLP :**

$$\begin{aligned} \text{Min } C(q^+, q^- | q) &= pq + rq^+ + b \int_{q^-}^{\infty} \{x - q^c\} g(x) dx \\ & \quad - \alpha q^- - s \int_0^{q^c} \{q^c - x\} g(x) dx \end{aligned} \quad (7)$$

s.t.

$$q^c = q + q^+ - q^- \quad (8)$$

$$0 \leq q^+ \leq \alpha q \quad (9)$$

$$0 \leq q^- \leq \beta q \quad (10)$$

$$q^c, q^+, q^- \geq 0 \quad (11)$$

## 3. 해 법

수리 모형 NLP의 최적해는 수량 신축성의 범위 ( $q - \beta q \leq q^c \leq q + \alpha q$ ), 그리고  $b$ 와  $s$ 의 대소관계에 영향을 받는다. 본 장에서는 이와 같은 성질을 이용하여 수리 모형 NLP의 최적해를 찾는 해법을 제안한다.

최종 구매량  $q^c$ 는  $q^c = q$ ,  $q^c = q + q^+$ , 그리고  $q^c = q - q^-$ 의 세 가지의 값들 중 하나로 결정된다. 이것은  $q^c$ 의 값이  $q^+ = q^- = 0$  또는  $q^+ = 0$  또는  $q^- = 0$ 의 경우에 해당한다는 것을 의미한다. 그러므로 세 가지 경우에 대하여 목적식의 구매자 기대비용을 구하고, 가장 작은 기대비용을 가지는  $q^+$  또는  $q^-$ 의 값을 선택함으로써 최종 구매량  $q^c$ 를 구할 수 있다. 그 구체적인 방법은 다음과 같다.

- (1)  $q^+ = q^- = 0$ , 그리고  $q = 0$ 의 각 경우에 대한 목적식의 극값을 구한다.
- (2) 극값에서 가장 작은 기대비용을 가지는  $q^+$ 와  $q^-$ 의 값을 선택한다.
- (3) 최종 구매량  $q^c = q + q^+ - q^-$ 이다.

### 3.1 극점의 위치

극점은  $b$ 와  $s$ 의 크기에 영향을 받는다.  $b \neq s$ 이면 극점이 존재하고,  $b$ 와  $s$ 의 대소관계와  $q^+ = 0$ 과  $q^- = 0$ 인지 여부에 따라 <Table 1>에 나타난 것처럼 12가지의 발생위치를 가진다. 반면에  $b = s$ 이면 극점이 존재하지 않는다(이에 대한 설명은 부록 A를 참조한다.). 그러므로  $q^+ = q^- = 0$ ,  $q^+ = 0$  그리고  $q^- = 0$ 의 각 경우에 대하여 아래와 같이 극점을 찾는다.

#### 3.1.1 $b \neq s$ 인 경우

$b > s$ 인 경우와  $b < s$ 로 나누어서,  $b > s$ 이면 목적함수는  $q^+ = 0$ 일 때 오목함수(concave function)가

되고,  $q^- = 0$ 일 때 볼록함수(convex function)의 형태를 가진다. 반면에  $b < s$ 이면  $q^+ = 0$ 일 때 볼록함수가 되고,  $q^- = 0$ 일 때 오목함수가 된다(증명은 부록 B를 참조한다.).

극점은 수량 신축성의 하한값보다 작은 경우, 수량 신축성의 범위에 있는 경우, 그리고 수량 신축성의 상한값보다 큰 경우의 세 가지로 나타난다. 이상의 경우를 모두 고려하면 <Table 1>에 정리된 것처럼 총 12가지 경우가 발생할 수 있다.

<Table 1>에서 검은 점은 극점에서의 기대 비용을 나타내며 흰 점은 수량 신축성의 상한과 하한의 기대 비용을 나타낸다. 극점이 수량 신축성의 범위에 존재하면 극점의 기대 비용과 수량 신축성의 상

<Table 1>  $b \neq s$ 일 때 목적식의 극점의 위치

$b > s$	$q^+ = 0$			
	$q^- = 0$			
$b < s$	$q^+ = 0$			
	$q^- = 0$			

한과 하한의 기대 비용을 계산하여 가장 작은 기대 비용을 갖는  $q^+$  와  $q^-$  의 값을 저장한다. 반면에 극점이 수량 신축성의 범위 밖에 존재하면 수량 신축성의 상한과 하한의 기대 비용을 계산하고 그 중 가장 작은 기대비용을 갖는 점을 선택한다. 이 과정을 정리하면  $b > s$ 인 경우에는  $(0 < q^+ < \alpha q, q^- = 0)$ ,  $(q^+ = q^- = 0)$ ,  $(q^+ = 0, q^- = \beta q)$ ,  $(q^+ = \alpha q, q^- = 0)$ 의 기대 비용을 계산하여 가장 작은 값을 선택하고,  $b < s$ 인 경우에는  $(q^+ = 0, 0 < q^- < \beta q)$ ,  $(q^+ = q^- = 0)$ ,  $(q^+ = 0, q^- = \beta q)$ ,  $(q^+ = \alpha q, q^- = 0)$ 의 기대 비용을 계산하여 가장 작은 값을 선택한다.

### 3.1.2 극점을 구하는 방법

목적함수 (7)은 적분 구간의 상한과 하한이 변수로 되어 있다. 따라서 라이프니츠의 정리(Leibnitz's rule)를 이용하여 그 극점을 구할 수 있다(라이프니츠의 정리는 부록 C를 참조한다.).

우선  $q^+ = 0, 0 < q^- < \beta q$ 일 때는, 식 (6)을 다음 식 (12)와 같이 쓸 수 있다.

$$C(q^+ = 0, q^- | q) = pq - \alpha q + b \int_{q-q^-}^{\infty} \{x - (q - q^-)\} g(x) dx - s \int_0^{q-q^-} \{(q - q^-) - x\} g(x) dx \quad (12)$$

라이프니츠의 정리를 이용하여  $q^-$ 에 대하여 편미분하면

$$\frac{\partial C}{\partial q^-} (q^+ = 0, q^- | q) = -c + b + G(q - q^-)(s - b) = 0 \Rightarrow G(q - q^-) = \frac{b - c}{b - s} \quad (13)$$

동일한 방법으로 나머지 네 가지 경우의 극점도 구할 수 있다.

$$0 < q^+ < \alpha q, q^- = 0 \Rightarrow G(q + q^+) = \frac{b - r}{b - s} \quad (14)$$

$$q^+ = q^- = 0 \Rightarrow G(q) = \frac{b - p}{b - s} \quad (15)$$

$$q^+ = 0, q^- = \beta q \Rightarrow G((1 - \beta)q) = \frac{(1 - \beta)b - p + \beta r}{(1 - \beta)(b - s)} \quad (16)$$

$$q^+ = \alpha q, q^- = 0$$

$$\Rightarrow G((1 + \alpha)q) = \frac{(1 + \alpha)b - p - \alpha r}{(1 + \alpha)(b - s)} \quad (17)$$

위 식 (13)~(17)의 극점의 조건을 만족하는  $q$ 값을  $(q)_G$ 로 나타내기로 한다. 예를 들면 식 (13)을 만족하는 해를  $(q - q^-)_G$ 로 표시한다.

### 3.1.3 $b = s$ 인 경우

$b = s$ 이면 극점을 구할 수 없으므로 목적식을 이용한다(유도과정은 부록 D를 참조한다.). 최종 구매량  $q^c$ 가 결정되는 다섯 가지의 경우,  $(q^+ = 0, 0 < q^- < \beta q)$ ,  $(0 < q^+ < \alpha q, q^- = 0)$ ,  $(q^+ = q^- = 0)$ ,  $(q^+ = 0, q^- = \beta q)$ ,  $(q^+ = \alpha q, q^- = 0)$ 에 대한 목적식 값을 구하면 식 (18)~(22)와 같다.

$$q^+ = 0, 0 < q^- < \beta q \Rightarrow C(q^+ = 0, q^- | q) = (p - b)q + (b - c)q^- + bE(x) \quad (18)$$

$$0 < q^+ < \alpha q, q^- = 0 \Rightarrow C(q^+, q^- = 0 | q) = (p - b)q + (r - b)q^+ + bE(x) \quad (19)$$

$$q^+ = q^- = 0 \Rightarrow C(q^+ = 0, q^- = 0 | q) = (p - b)q + bE(x) \quad (20)$$

$$q^+ = 0, q^- = \beta q \Rightarrow C(q^+ = 0, q^- = \beta q | q) = (p - \beta c - (1 - \beta)b)q + bE(x) \quad (21)$$

$$q^+ = \alpha q, q^- = 0 \Rightarrow C(q^+ = \alpha q, q^- = 0 | q) = (p + \alpha r + (1 + \alpha)b)q + bE(x) \quad (22)$$

식 (18)~(22)의 값들을 쉽게 비교하기 위하여 공통인 부분을 따로 유도하여 정리하면 식 (23)~(27)과 같다.

$$C(q^+ = 0, q^- | q) = \{(p - b)q + bE(x)\} + (b - c)q^- \quad (23)$$

$$C(q^+, q^- = 0 | q) = \{(p - b)q + bE(x)\} + (r - b)q^+ \quad (24)$$

$$C(q^+ = 0, q^- = 0 | q) = \{(p - b)q + bE(x)\} + 0 \quad (25)$$

$$C(q^+ = 0, q^- = \beta q | q) = \{(p - b)q + bE(x)\} + (b - c)\beta q \quad (26)$$

$$C(q^+ = \alpha q, q^- = 0 | q) = \{(p - b)q + bE(x)\} + 2bq + (b + r)\alpha q \quad (27)$$

식 (27)은 가장 큰 값을 가지며, 식 (24)는  $s < p$ ,

$p < r$ 이고  $b = s$  이므로  $b < r$  이 되어 두 번째 항이 양의 값을 가진다.  $b > c$  이면 식 (26)의 두 번째 항도 양이므로 식 (25)가 가장 작은 값을 가진다. 반면에  $b < c$  이면 식 (26)이 가장 작은 값을 가지게 된다.

### 3.2 해 법

앞에서 살펴본 극점의 성격을 이용하여 NLP의 최적해를 구하는 해법을 소개한다.

Step 1 :  $b$  와  $s$  의 비교

$b \neq s$  이면 Step 2로 가고,  $b = s$  이면 Step 4로 간다.

Step 2 :  $b$  와  $s$  의 크기 비교

$b > s$  이면 Step 2.1로 가고,  $b < s$  이면 Step 2.2로 간다.

Step 2.1 :  $0 < q^+ < \alpha q$ ,  $q = 0$  일 때 극점의 조건을 만족하는  $(q + q^+)_G$ 에서의 기대 비용을 계산한다.

Step 2.1.1 :  $q^+$ 의 수량 신축성 범위 만족 여부 확인

- 1)  $q^+$ 가 수량 신축성의 범위를 만족하면 2)로 가고, 그렇지 않으면 Step 3으로 간다.
- 2)  $(q + q^+)_G$ 일 때의 기대 비용을 계산한다.
- 3)  $q^+$ 와 기대 비용  $A$ 에 저장하고 Step 3으로 간다.

Step 2.2 :  $q^+ = 0$ ,  $0 < q < \beta q$ 일 때 극점의 조건을 만족하는  $(q - q^-)_G$ 에서의 기대 비용을 계산한다.

Step 2.2.1 :  $q^-$ 의 수량 신축성 범위 만족 여부 확인

- 1)  $q^-$ 가 수량 신축성의 범위를 만족하면 2)로 가고, 그렇지 않으면 Step 3으로 간다.
- 2)  $(q - q^-)_G$ 일 때의 기대 비용을 계산한다.

3)  $q^-$ 와 기대 비용  $A$ 에 저장하고 Step 3으로 간다.

Step 3 :  $q^- = \beta q$ ,  $q^+ = \alpha q$ ,  $q^+ = q^- = 0$ 에 대한 기대 비용 계산

$q^+ = 0$ ,  $q^- = \beta q$ 이면 Step 3.1로 가고,  $q^+ = \alpha q$ ,  $q^- = 0$ 이면 Step 3.2로 가며,  $q^+ = q^- = 0$ 이면 Step 3.3으로 간다.

Step 3.1 :  $q^+ = 0$ ,  $q^- = \beta q$ 일 때 기대 비용 계산

- 1)  $((1 - \beta)q)_G$ 를 구한다.
- 2)  $((1 - \beta)q)_G$ 일 때의 기대 비용을 계산한다.
- 3)  $A$ 가 빈 값이면 기대 비용을  $A$ 에 저장하고 5)로 간다.
- 4)  $A$ 와 기대 비용을 비교하여 작은 값을  $A$ 에 저장한다.
- 5)  $A$ 를 가지는 추가 구매(구매 취소)량을 저장한다.

Step 3.2 :  $q^+ = \alpha q$ ,  $q^- = 0$ 일 때 기대 비용 계산

- 1)  $((1 + \alpha)q)_G$ 를 구한다.
- 2)  $((1 + \alpha)q)_G$ 일 때의 기대 비용을 계산한 후  $A$ 와 비교한다.
- 3) 작은 값을  $A$ 에 저장하고 그 때의 추가 구매(구매 취소)량을 저장한다.

Step 3.3 :  $q^+ = q^- = 0$ 일 때 기대 비용 계산

- 1)  $(q)_G$ 를 구한다.
- 2)  $(q)_G$ 일 때의 기대 비용을 계산한 후  $A$ 와 비교한다.
- 3) 작은 값을  $A$ 에 저장하고 그 때의 추가 구매(구매 취소)량을 저장한다.
- 4) Step 5로 간다.

Step 4 :  $b$  와  $c$  의 크기 비교

$b > c$ 이면 Step 4.1로 가고,  $b < c$ 이면 Step 4.2로 간다.

Step 4.1 :  $b > c$ 인 경우

$C(q^+ = 0, q^- = 0|q)$ 를 계산하고 Step 5로 간다.

Step 4.2 :  $b < c$ 인 경우

$C(q^+ = 0, q^- = \beta q|q)$ 를 계산하고  $\beta q$ 를 저

장한 후 Step 5로 간다.

Step 5 : 저장된 추가 구매량과 구매 취소량을 이용하여 최적해를 제시하고 해법을 종료한다.

### 4. 수치 예제

본 장에서는 모수 간의 다양한 조건 아래서 제안한 해법이 구매자의 최종 구매량을 찾는 수치 예제를 보인다. 예제는 극점이 존재하는 경우인  $b \neq s$ ,  $b > s$ 일 때와 극점이 존재하지 않는  $b = s$ ,  $b > c$  경우 그리고,  $b = s$ ,  $b < c$ 의 세 가지 경우로 나누어 소개한다. 세 경우 모두 초기 수요는  $\lambda = 0.03$ 을 따르고 갱신된 수요분포는  $\lambda = 0.04$ 인 지수분포를 따른다고 가정한다. 기타 모수값들은  $p = 100$ ,  $r = 110$ ,  $q = 55$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.1$  이라고 가정한다.

#### 4.1 $b \neq s$ 일 때 $b > s$ 인 경우

$b \neq s$ 일 때  $b > s$ 인 경우의  $c$ ,  $b$ , 그리고  $s$ 의 값은  $c = 90$ ,  $b = 1000$ ,  $s = 20$  이라고 가정한다. 위에서 제안한 해법의 순서에 따라 먼저  $0 < q^+ < \alpha q$ ,  $q = 0$ 일 때의  $(q + q^+)_C$ 를 구한다.  $(q + q^+)_C$ 는 59.7 이고, 따라서  $q^+$ 는 4.97이며 이 값은 수량 신축성의 범위  $0 < q^+ < \alpha q$ 를 만족한다.  $(q + q^+)_C$ 를  $C(q^+, q = 0 | q)$ 에 대입하여 계산한 기대 비용은 2567.2가 된다. 기대 비용을  $A$ 에 저장하고  $q^+ = 4.97$ 를 저장한다. 다음 단계로  $q^+ = 0$ ,  $q = \beta q$ 일 때의  $C(q^+ = 0, q = \beta q | q)$ 를 계산하면 기대 비용은 2815.0이다. 이 값은 저장된  $A$  값보다 큰 값이므로 다음 단계를 진행한다. 남은 두 가지 경우인  $q^+ = \alpha q$ ,  $q = 0$ 의 기대 비용은

2593.6 이고  $q^+ = q = 0$ 의 기대 비용은 2757.6이다. 이 둘은 저장된  $A$  값보다 큰 값들이므로 구매자의 최종 구매량  $q^c = 59.7$ 을 제시하고 해법을 종료한다. 각 경우에 대한 구매자 기대 비용을 정리하면 <Table 2> 같다.

#### 4.2 $b = s$ 일 때 $b > c$ 인 경우

$c$ ,  $b$ , 그리고  $s$ 의 값이  $c = 90$ ,  $b = s = 95$ 로 주어진 경우에, 해법을 수행하면  $q^+ = q = 0$ 일 때 가장 작은 기대 비용을 가짐을 알 수 있다. 그 과정을 상술하면  $b = s$ 인 경우에는 극점이 존재하지 않으므로 식 (18)에서 식 (22)까지의 각 경우에 대한 기대 비용을 계산하여 가장 작은 값을 구한다. 식 (18)과 식 (19)는  $q$ 와  $q^+$ 를 변수로 가지는 선형함수로  $q$ 와  $q^+$ 의 계수인  $(b - c)$ 와  $(r - b)$ 의 대소관계에 따라 모양이 결정된다.

식 (18)에서 식 (22)을 비교하기 쉽게 정리한 식 (23)에서 식 (27)까지의 관계를 살펴보면, 가장 작은 기대 비용을 갖는 구매량은  $q^+ = q = 0$ 일 때의 구매량 혹은  $q^+ = 0$ ,  $q = \beta q$ 일 때의 구매량으로 계산된다. 따라서 <Table 3>에서 보는 바와 같이  $C(q^+ = 0, q = 0 | q)$ 가 가장 작은 기대 비용을 가지므로 구매자의 최종 구매량  $q^c = 55$ 가 된다.

#### 4.3 $b = s$ 일 때 $b < c$ 인 경우

$c$ ,  $b$ , 그리고  $s$ 의 값이  $c = 90$ ,  $b = s = 80$ 인 경우에, 해법은  $q^+ = 0$ ,  $q = \beta q$ 를 최적해로 제시한다. 그 결과를 정리하면 <Table 4>와 같고 구매자의 최종 구매량  $q^c = 49.5$ 가 된다.

<Table 2>  $b > s$ 인 경우의 기대 총비용

$q^c$	$(q + q^+)_C$	$(1 - \beta)q$	$(1 + \alpha)q$	$q$
$C(q^+, q   q)$	2567.2	2815.0	2593.6	2757.6

<Table 3>  $b = s$ 일 때  $b > c$ 인 경우의 기대 총비용

$q^c$	$q$	$(1 - \beta)q$	$(1 + \alpha)q$
$C(q^+, q   q)$	2650.0	2677.5	14227.5



<Table 4>  $b=s$ 일 때  $b < c$ 인 경우의 기대 총비용

$q^*$	$q$	$(1-\beta)q$	$(1+\alpha)q$
$C(q^+, q^+ q)$	3100.0	3045.0	12945

## 5. 결 론

본 연구에서는 수량신축성의 특성을 보다 정확히 반영하는 모형을 제시하고 이를 기준으로 구매량을 확정할 수 있는 해법을 개발하였다. 수치 예제를 통하여 제시한 모형의 정확성과 해법의 효율성을 검증한 결과 만족할만한 결과를 얻었다.

본 연구의 결과를 활용하면 단일기간의 QF 계약 과정에서 좀 더 효율적인 구매량 결정을 하는데 도움이 될 것으로 기대된다. 더 나아가서 복수기간의 계약 문제를 분석하는데도 본 연구의 결과가 활용될 수 있을 것으로 생각된다.

향후 연구과제로는 복수기간의 QF 계약 문제를 보다 효율적으로 분석할 수 있는 해법의 연구가 필요하다고 판단된다. 또한 본 연구를 포함하여 지금까지 진행된 대부분의 QF 연구들이 포함하지 못하였던 추가적인 제약이나 조건들을 모형에 포함시켜서 연구의 현실성을 제고하는 연구가 있을 수 있다.

## 참 고 문 헌

[1] Anupindi, R. and R. Akella, *An Inventory Model with Commitments*, Working Paper, Northwestern University, Evanston, IL, 1994.

[2] Bassok, Y. and R. Anupindi, "Analysis of Supply Contracts with Total Minimum Commitment," *IIE Transaction*, Vol.29, No.5(1997), pp.373-381.

[3] Bassok, Y. and R. Anupindi, *Analysis of Supply Contracts with Commitments and Flexibility*, Working Paper, Northwestern University, Evanston, IL, 1997.

[4] Cachon, G. and M. Lariviere, "Contracting to Assure Supply : How to Share Demand Forecasts in a Supply Chain", *Management Science*, Vol.47, No.5(2001), pp.629-646.

[5] Eppen, G. and A. Iyer, "Backup Agreements in Fashion Buying - The Value of Upstream Flexibility," *Management Science*, Vol.43, No.11(1997), pp.1469-1484.

[6] Lovejoy, W.S., *Integrated Operations*, Southwestern College Publishing, Cincinnati, OH, 1999.

[7] Martinez-de-Albeniz, V. and D. Simchi-Levi, *A Portfolio Approach to Procurement Contracts*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 2002.

[8] Moinzadeh, K. and S. Nahmias, "Adjustment Strategies for a Fixed Delivery Contract," *Operations Research*, Vol.48, No.3 (2000), pp.408-423.

[9] Sethi S., H. Yan, and H. Zhang, "Quantity Flexibility Contracts: Optimal Decisions with Information Updates," *Decision Sciences*, Vol.35, No.4(2004), pp.691-712.

[10] Silver, E.A., D.F. Pyke, and R. Peterson, *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*, 3rd Edition, John Wiley & Sons Inc, NY, 1998.

[11] Tsay, A.A., *Supply Chain Control with Quantity Flexibility*, Ph.D. dissertation, Graduate School of Business, Stanford University, Stanford, CA, 1995.

[12] Tsay, A.A., "The Quantity Flexibility Contract and Supplier-customer Incentives," *Management Science*, Vol.45, No.10

(1999), pp.1339-1358.

- [13] Tsay, A.A. and W.S. Lovejoy, "Quantity Flexibility Contracts and Supply Chain Performance," *Manufacturing & Service Operations Management*, Vol.1, No.2(1999), pp.89-111.
- [14] Wu, J., "Quantity Flexibility Contracts under Bayesian Updating," *Computers & Operations Research*, Vol.32, No.5(2005), pp.1267-1288.
- [15] Xu, N., "Multi-period Dynamic Supply Contracts with Cancellation," *Computers & Operations Research*, Vol.32, No.12(2005), pp.3129-3142.
- [16] Zipkin, P.H., *Foundation of Inventory Management*, McGraw-Hill, Boston, 2000.

## 부록(Appendix)

A.  $q^- = 0, 0 < q^+ < \alpha q$  일 때,

목적식  $C(q^+, q^- = 0|q)$ 를 라이프니츠의 정리를 이용하여 계산하면

$$G(q+q^+) = \frac{b-r}{b-s} \tag{A1}$$

이 된다.

따라서  $b=s$ 이면 극점이 존재하지 않는다. 또한  $(q^+ = 0, 0 < q < \beta q), (q^+ = q^- = 0), (q^+ = 0, q^- = \beta q), (q^- = 0, q^+ = \alpha q)$ 의 경우도 동일한 방법으로 분석할 수 있다.

B.  $q^- = 0, 0 < q^+ < \alpha q$  일 때,

$$C(q^+, q^- = 0|q) = pq + rq^+ + b \int_{q+q^+}^{\infty} \{x - (q+q^+)\} g(x) dx - s \int_0^{q+q^+} \{q+q^+ - x\} g(x) dx. \tag{B1}$$

라이프니츠의 정리를 이용하여 계산하면

$$\frac{\partial C}{\partial q^+}(q^+, q^- = 0|q) = r - b + (b-s)G(q+q^+) = 0 \tag{B2}$$

이므로

$$G(q+q^+) = \frac{b-r}{b-s} \tag{B3}$$

이다.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q^{+2}}(q^+, q^- = 0|q) = (b-s)g(q+q^+) \tag{B4}$$

이므로  $b-s > 0$ 이면 볼록함수(convex function),  $b-s < 0$ 이면 오목함수(concave function)이다. 또한  $(q^+ = 0, 0 < q < \beta q), (q^+ = q^- = 0), (q^+ = 0, q^- = \beta q), (q^- = 0, q^+ = \alpha q)$ 의 경우도 동일한 방법으로 분석할 수 있다.

### C. 라이프니츠의 정리

$f(x, y)$ 가  $[a, b]$ 에서 연속이고,  $z_1(x)$ 와  $z_2(x)$ 가  $[a, b]$  내에 있는  $x$ 의 미분 가능 함수일 때

$C(x) = \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} f(x, y) dy$  를  $x$ 에 관해 편미분한 결과는

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_{z_1(x)}^{z_2(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy + f(x, z_2(x)) \frac{\partial z_2}{\partial x}(x) - f(x, z_1(x)) \frac{\partial z_1}{\partial x}(x) \end{aligned} \tag{C1}$$

이다.

## D. 목적식의 계산

$q^+ = q^- = 0$ 일 때 목적식  $C(q^+ = q^- | q)$ 는 다음과 같다.

$$C(q^+ = 0, q^- = 0 | q) = pq + b \int_q^\infty (x - q)g(x)dx - s \int_0^q (q - x)g(x)dx. \quad (D1)$$

이것을 정리하면,

$$\begin{aligned} C(q^+ = 0, q^- = 0 | q) &= (p - b)q + (b - s)qG(q) + b \int_q^\infty xg(x)dx + s \int_0^q xg(x)dx \\ &= (p - b)q + bE(x). \end{aligned} \quad (D2)$$

또한 식 (18), 식 (19), 식 (21), 식 (22)도 같은 방법으로 유도할 수 있다.