

# 독립좌표연성법을 이용한 원형 구멍을 갖는 단순지지 직사각형 평판의 자유진동해석

## Free Vibration Analysis of Simply-supported Rectangular Plate with a Circular Cutout by Independent Coordinate Coupling Method

곽 문 규\* · 한 상 보\*

Moon K. Kwak and Sangbo Han

(2006년 4월 6일 접수 ; 2006년 6월 1일 심사완료)

Key Words : Free Vibration(자유진동), Rectangular Plate(직사각형판), Circular Cutout(원형 구멍)

### ABSTRACT

This paper is concerned with the vibration analysis of a simply-supported rectangular plate with a circular cutout. Even though there have been many methods developed for the free vibration of the rectangular plate with a rectangular cutout, very few research has been carried out for the rectangular plate with a circular cutout. In this paper, a new methodology called independent coordinate coupling method, which was developed to save the computational effort for the free vibration analysis of rectangular plate with a rectangular cutout, is applied to the case of circular cutout. The independent coordinate coupling method employs the global coordinate system for the plate and the local coordinate system for the cutout. In the case of the rectangular plate with a circular cutout, the global coordinate system is the Cartesian coordinate system and the local coordinate system is the polar coordinate system. By imposing the compatibility condition, the relationship between the global coordinates and the local coordinates is derived. This equation is then used for the calculation of the mass and stiffness matrices resulting in eigenvalue problem. The numerical results show the efficacy of the proposed method.

### 1. 서 론

구멍이 있는 직사각형 평판은 구조물의 일부로 선박, 비행기, 기계구조물, 원자력 발전소 등에 다양하게 사용되고 있다. 그러나 이렇게 구멍이 있는 직사각형 평판의 고유 진동 문제에는 엄밀해가 존재하지 않기 때문에 Rayleigh-Ritz 방법이나 유한요소법과 같은 수치해석 방법을 사용하게 된다. 유한요소법에 비해

Rayleigh-Ritz 방법은 구멍의 형상이 직사각형이나 원형과 같이 비교적 단순한 경우에만 적용이 가능하다.

먼저 직사각형 구멍을 가지는 직사각형 평판의 고유진동 문제에 대한 연구 결과를 살펴보자. 직사각형의 구멍에 대해서는 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하면 좀더 간단하게 문제를 해석할 수 있다. Rajamani 등<sup>(1,2)</sup>은 구멍의 영향을 외부 하중의 영향과 동일하다는 가정하에 단순지지와 고정 경계 조건을 가지는 등방성과 이방성판에 대해 구멍의 크기를 변화시켜 가면서 구멍이 고유진동 특성에 미치는 영향을 조사하였다. Ali 와 Atwal<sup>(3)</sup>은 균일 하중을 가지는 경우의 정적 변형을 허용함수로 사

† 책임저자; 정회원, 동국대학교 기계공학과  
E-mail : kwakm@dongguk.edu  
Tel : (02) 2260-3705, Fax : (02) 2263-9379

\* 정회원, 경남대학교 기계자동화공학부

용하여 수치해석을 수행하였다. Lam등<sup>(4)</sup>은 직사각형 판의 진동에 대해 판을 몇 개의 작은 영역으로 나누고 Rayleigh-Ritz 방법을 수정하여 적용하였다. 이 방법을 다시 Lam 과 Hung<sup>(5)</sup>이 채택하여 보강된 구멍을 가지는 경우에 대해 적용하였다. 참고 문헌 (4, 5)에서 나뉘어진 부분에 적용된 허용함수는 Bhat<sup>(6-8)</sup>가 제안한 경계 특성 직교 다항식 함수이다. Laura 등<sup>(9)</sup>은 단순 지지된 직사각형판이 직사각형 구멍을 가지는 경우에 대해 전통적인 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하여 고유진동 특성변화를 계산하였다. 그 외에 유한요소법을 이용한 연구로는 Monahan 등<sup>(10)</sup>의 연구가 있으며 유한 차분법을 이용한 연구는 Paramasvam<sup>(11)</sup>, Aksu 와 Ali<sup>(12)</sup>의 연구가 있다. Sakiyama 등<sup>(13)</sup>은 구멍을 극단적으로 얇은 두께의 판으로 가정하고 Green 함수를 적용하여 정사각형 구멍을 가지는 이방성 직사각형판의 고유진동 문제를 해석하였다.

원형 구멍을 가지는 경우에는 구멍의 기하학적인 형태가 직사각형 평판의 기하학적인 형태와 일치하지 않기 때문에 직사각형 구멍의 경우에 비해 해석이 용이하지 않다. Takahashi<sup>(14)</sup>는 원형 구멍에 대해 에너지 식에서 구멍 부분의 영향을 차감하는 전통적인 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하였는데 허용함수는 보의 고유함수를 이용하였다. Joga-Rao and Pickett<sup>(15)</sup>은 허용함수로 대수다항식 함수와 biharmonic singular 함수를 이용하는 방법을 제안하였다.

원형 구멍을 가지는 직사각형 평판의 고유진동 문제를 원형 구멍의 좌표, 즉 극좌표계를 이용해 고유치 문제를 형성하고 직사각형 평판의 외부 경계 조건을 변을 따라 점을 취해 만족시키는 point-matching 방법이 사용되기도 하였다. Kumai<sup>(16)</sup>, Hegarty<sup>(17)</sup>, Eastep and Hemmig<sup>(18)</sup>, Nagaya<sup>(19)</sup>가 이용한 방법은 모두 point-matching 방법에 근거를 두고 있다.

국내의 연구는 다음과 같다. 이호섭과 김극천<sup>(20)</sup>은 유공 직사각형 평판의 자유 진동 문제에 대해 실험 연구를 수행하고 그 결과를 발표하였다. 특히 평판이 접수하는 경우의 고유진동수 변화를 예측하기 위하여 직사각형 구멍, 원형 구멍 등 다양한 형태의 구멍이 고유진동수에 미치는 영향을 실험을 통해 조사하였다. 김극천 등<sup>(21)</sup>은 선체 구조물에 주로 사용되는 보강판이 구멍을 가지는 경우의 진동해석에 대해 이

론적인 연구를 수행하였다. 이영신과 이운복<sup>(22)</sup>은 2개의 원형 구멍이 있는 평판에 대해 유한요소법을 이용해 고유진동수를 계산하고 실험 결과와 비교하였다.

곽문규와 한상보<sup>(23)</sup>는 직사각형 구멍을 가지는 직사각형 평판의 고유 진동 문제를 Rayleigh-Ritz 방법으로 해석하는데 있어 두 개의 좌표를 이용하는 독립좌표연성방법(Independent Coordinate Coupling Method)을 제안하였다. ICCM은 구멍의 영향을 직사각형 평판의 좌표계에 근거하여 계산하는 것이 아니라 구멍의 에너지를 구멍에 적합한 좌표계로 계산하고 구멍 영역내의 두 좌표간의 적합조건을 적용하여 구멍으로 인한 에너지 차감분을 산출해내는 방식이다. 곽문규와 한상보<sup>(23)</sup>는 ICCM의 유효성을 직사각형 구멍을 가지는 직사각형 평판의 고유진동 문제로 입증하였다. 이 연구에서는 이 방법을 좀 더 확장하여 두 좌표간의 적합조건을 유도하는 방법을 개선하고 원형 구멍에 적용하여 ICCM방법의 타당성을 입증하고자 한다. ICCM방법에 의해 얻어진 수치계산 결과와 상용 유한요소 프로그램 ANSYS 계산 결과의 비교는 ICCM방법이 원형 구멍을 가지는 직사각형 평판의 고유 진동 계산에 적합함을 보여준다.

## 2. 직사각형 평판에 대한 Rayleigh-Ritz 방법의 적용

곽문규와 한상보<sup>(23)</sup>는  $X$  축 방향의 길이가  $a$ 이고  $Y$  축 방향의 길이가  $b$ 인 직사각형판의 운동에너지와 탄성에너지를 다음과 같이 정식화하였다. 먼저 탄성변위에 대해 무차원변수,  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ 와 허용함수를 도입하여 평판의 변위를 다음과 같이 표현하였다.

$$w(\xi, \eta, t) = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\xi, \eta) q_i(t) = \Phi(\xi, \eta) q(t) \quad (1)$$

여기서  $\Phi(\xi, \eta) = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]$ 는 평판의 탄성변위에 대한  $1 \times n$ 의 이차원 허용함수 행렬을 나타내며,  $q(t) = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 는  $n \times 1$ 의 일반좌표계 벡터

를 나타낸다. 여기서  $n$ 은 이차원 허용함수의 총수이다. 이를 이용하면 운동에너지와 탄성에너지는 다음과 같이 유도된다.

$$T_p = \frac{\rho h a b}{2} \dot{q}^T \bar{M} \dot{q}, \quad V_p = \frac{D b}{2 a^3} q^T \bar{K} q \quad (2a,b)$$

여기서  $\rho$ 는 평판의 질량밀도,  $h$ 는 평판의 두께,  $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ ,  $E$ 는 영의 계수,  $\nu$ 는 푸아송비를 나타낸다. 그리고,

$$\bar{M} = \int_0^b \int_0^a \Phi^T \Phi d\xi d\eta \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{K} = \int_0^b \int_0^a & \left[ \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \alpha^4 \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right. \\ & + \nu \alpha^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \\ & \left. + 2(1 - \nu) \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (4) \end{aligned}$$

인데 각각 무차원화된 질량, 강성 행렬을 나타낸다. 그리고,  $\alpha = a/b$ , 즉 직사각형 평판의 장폭비를 나타낸다. 라그랑지 방정식에 식 (2)를 대입하고  $q = A e^{i\omega t}$ 로 가정하면 다음과 같은 고유진동 문제가 유도된다.

$$(\bar{K} - \bar{\omega}^2 \bar{M}) A = 0 \quad (5)$$

여기서

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\rho h a^4}{D}} \omega \quad (6)$$

는 무차원화된 고유진동수를 나타낸다. 무차원화된 질량과 강성 행렬을 좀더 쉽게 유도하기 위해 이차원 허용함수를 변수 분리하여 다음과 같이 표현하는 것이 바람직하다.<sup>(23)</sup>

$$\Phi_i(\xi, \eta) = \phi_i(\xi) \psi_i(\eta), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

식 (7)을 식 (3)과 (4)에 대입하면 무차원 질량, 강성 행렬의 각 요소가 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{M}_{ij} = X_{ij} Y_{ij} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij} = & \hat{X}_{ij} Y_{ij} + \alpha^4 X_{ij} \hat{Y}_{ij} + \alpha^2 \nu (\tilde{X}_{ij} \tilde{Y}_{ij} + \tilde{X}_{ij} \tilde{Y}_{ij}) \\ & + \alpha^2 (1 - \nu) \bar{X}_{ij} \bar{Y}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (9) \end{aligned}$$

여기서

$$X_{ij} = \int_0^a \phi_i \phi_j d\xi, \quad \bar{X}_{ij} = \int_0^a \phi_i' \phi_j' d\xi \quad (10a,b)$$

$$\hat{X}_{ij} = \int_0^a \phi_i'' \phi_j'' d\xi, \quad \tilde{X}_{ij} = \int_0^a \phi_i \phi_j'' d\xi \quad (10c,d)$$

$$Y_{ij} = \int_0^b \psi_i \psi_j d\eta, \quad \bar{Y}_{ij} = \int_0^b \psi_i' \psi_j' d\eta \quad (10e,f)$$

$$\hat{Y}_{ij} = \int_0^b \psi_i'' \psi_j'' d\eta, \quad \tilde{Y}_{ij} = \int_0^b \psi_i \psi_j'' d\eta \quad (10g,h)$$

만일  $x, y$  축 방향으로 각각  $m$ 개의 허용함수를 도입한다면 평판의 변위를 표현하는데 조합으로 인해 총  $m^2$ 의 허용함수가 사용된다. 즉,  $n = m^2$ 의 관계식이 성립한다. 자세한 표현식은 참고문헌 (23)을 참조하기 바란다.

모든 변이 단순지지인 직사각형 평판의 경우에는 각 방향 허용함수로 다음과 같은 단순지지 균일보의 고유함수를 취할 수 있다.

$$\varphi_i = \sqrt{2} \sin i\pi\xi, \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

이 경우, 식 (7)의 각 방향 허용함수는 다음 식처럼 표현된다.

$$\phi_k = \begin{cases} \varphi_1 & 1 \leq k \leq m \\ \varphi_2 & m+1 \leq k \leq 2m \\ \varphi_3 & 2m+1 \leq k \leq 3m \\ \vdots & \\ \varphi_m & (m-1)m+1 \leq k \leq m^2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\psi_k = \begin{cases} \varphi_k & 1 \leq k \leq m \\ \varphi_{k-m} & m+1 \leq k \leq 2m \\ \varphi_{k-2m} & 2m+1 \leq k \leq 3m \\ \vdots & \\ \varphi_{k-(m-1)m} & (m-1)m+1 \leq k \leq m^2 \end{cases} \quad (13)$$

이를 이용하면 쉽게 무차원 질량과 강성 행렬을 유도할 수 있다.

### 3. 원형 평판의 고유진동 문제

반지름이  $R$  인 균일한 원형 평판의 운동에너지와 탄성에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_c = \frac{1}{2} \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^R \dot{w}^2 r dr d\theta \quad (14)$$

$$V_c = \frac{1}{2} D \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta \quad (15)$$

경계조건이 단순지지, 고정 또는 자유단일 경우 엄밀해가 존재하여 고유치와 고유 함수는 특성방정식으로부터 얻어진다.<sup>(24)</sup> 각각의 고유함수에 대한 고유치는  $\lambda^4 = \omega^2 \rho h R^4 / D$  의 표현식을 가지며, 원판의 변위는 고유 함수와 일반좌표계의 조합으로 표현된다.

$$w_c(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{n_c} \Phi_{ci}(r, \theta) q_{ci}(t) = \Phi_c(r, \theta) q_c(t) \quad (16)$$

여기서  $\Phi_{ci}(r, \theta)$  는 고유함수를 나타낸다. 식 (16)을 식 (14)와 (15)에 대입하고 고유함수의 직교성을 이용하면 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 표현된다.

$$T_c = \frac{\rho h \pi R^2}{2} \dot{q}_c^T \dot{q}_c, \quad V_c = \frac{\pi D}{2R^2} q_c^T \Lambda_c q_c \quad (17)$$

여기서  $\Lambda_c$  는 대각선에 고유치의 4제곱이 배치된  $n_c \times n_c$  행렬이다.

ICCM을 적용하는 경우 구멍에 대해 자유단을 가지는 평판으로 간주하기 때문에 자유단을 가지는 균일 원판을 고려해야 한다. 자유단의 균일 원판의 고유 함수를 순서대로 정리하면 다음과 같다.<sup>(24)</sup>

$$\begin{aligned} \Phi_{c1} &= 1, \quad \Phi_{c2} = \frac{r}{R} \cos \theta, \quad \Phi_{c3} = \frac{r}{R} \sin \theta \\ \Phi_{c(k+3)} &= A_k \left[ J_{n_k} \left( \lambda_k \frac{r}{R} \right) + C_k I_{n_k} \left( \lambda_k \frac{r}{R} \right) \right] f_k(\theta) \\ &, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

처음 세 개의 고유함수는 강체 운동을 나타내며 진동 모드에 필요한 상수와 계수값들은 Table 1과 같다. 이 값들은 참고문헌 (24)를 참조하여 진동수값에 따라 오름차순으로 정리한 표이다. 이 값을 이용하면 식 (17)의  $\Lambda_c$  가 다음과 같이 표현된다.

$$\Lambda_c = \text{diag} \left( \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \lambda_1^4 \quad \lambda_2^4 \quad \lambda_3^4 \quad \dots \quad \lambda_{n-3}^4 \right] \right) \quad (19)$$

Table 1 Characteristic values for free-edge circular plate

$k$	$n_k$	$\lambda_k$	$A_k$	$C_k$	$f_k(\theta)$
1	2	2.3148	3.6459	0.2134	$\cos(2\theta)$
2	2	2.3148	3.6459	0.2134	$\sin(2\theta)$
3	0	3.0005	2.1979	-0.0857	1
4	3	3.5269	4.5155	0.0911	$\cos(3\theta)$
5	3	3.5269	4.5155	0.0911	$\sin(3\theta)$
6	1	4.5249	3.8349	-0.0192	$\cos(\theta)$
7	1	4.5249	3.8349	-0.0193	$\sin(\theta)$
8	2	5.9380	4.4258	-0.0056	$\cos(2\theta)$
9	2	5.9380	4.4258	-0.0056	$\sin(2\theta)$
10	0	6.2003	3.1390	0.0032	1

#### 4. 원형 구멍을 가지는 경우에 대한 ICCM의 적용

Fig. 1과 같이 직사각형 평판이 원형 구멍을 가지고 있는 경우를 고려해 보자.

원형 구멍을 가지는 직사각형 평판의 운동에너지와 탄성에너지는 직사각형 평판의 에너지에서 원형의 에너지를 차감해서 얻어진다. 즉,

$$T_{total} = T_p - T_c, \quad V_{total} = V_p - V_c \quad (20a,b)$$

식 (2)와 (17)을 식 (20)에 대입하면 다음과 같다.

$$T_{total} = \frac{\rho h a b}{2} (\dot{q}^T \bar{M} \dot{q} - \pi \alpha \beta^2 \dot{q}_c^T \dot{q}_c) \quad (21a)$$

$$V_{total} = \frac{D b}{2 a^3} \left( q^T \bar{K} q - \frac{\pi \alpha}{\beta^2} q_c^T \Lambda_c q_c \right) \quad (21b)$$

여기서  $\beta = R/a$ 이다.

ICCM의 핵심은 각각 다른 일반 좌표계로 직사각형 평판과 구멍에 대한 에너지 식을 유도하고 구멍 내에서 변위가 같아야 한다는 조건을 사용해 국부좌표계를 전체좌표계로 변환하는 것이다. 구멍 영역내에서의 변위 일치 조건은 다음과 같이 표현된다.

$$w_c(r, \theta) = w(\xi, \eta) \quad (22)$$

식 (7)을 고려하고 식 (1)과 (16)을 식 (22)에 대입하면 다음식이 유도된다.

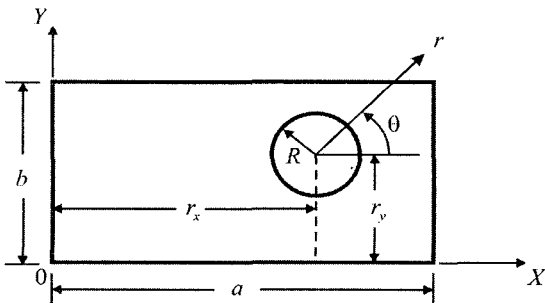


Fig. 1 Rectangular plate with a circular hole

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_c} \Phi_{c_j}(r, \theta) q_{c_j}(t) &= \sum_{j=1}^n \Phi_j(\xi, \eta) q_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^n \phi_j(\xi) \psi_j(\eta) q_j(t) \end{aligned} \quad (23)$$

식 (23)에  $\Phi_{c_i}(r, \theta)$ 를 곱하고 적분을 수행하면 다음식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_c} \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi_{c_i}(r, \theta) \Phi_{c_j}(r, \theta) r dr d\theta q_{c_j}(t) &= \\ \sum_{j=1}^{n_c} \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi_{c_i}(r, \theta) \phi_j(\xi) \psi_j(\eta) r dr d\theta q_j(t), & \\ i = 1, 2, \dots, n_c & \end{aligned} \quad (24)$$

$\Phi_{c_i}(r, \theta)$ 의 직교성을 이용하면 식 (24)는 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} q_{c_i}(t) &= \sum_{j=1}^{n_c} \int_0^{2\pi} \int_0^R \Phi_{c_i}(r, \theta) \phi_j(\xi) \psi_j(\eta) r dr d\theta q_j(t) \\ &= (T_c)_{ij} q_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, n_c \end{aligned} \quad (25)$$

이 식을 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$q_c = T_c q \quad (26)$$

원형의 구멍 영역에 대한 적분을 수행하기 위해서는 국부좌표계와 전체 좌표계의 관계식이 필요하다. 그 관계식은 다음과 같다.

$$\xi = \frac{r_x}{a} + \frac{r \cos \theta}{a}, \quad \eta = \frac{r_y}{b} + \frac{r \sin \theta}{b} \quad (27)$$

식 (26)을 식 (21)에 대입하면 전체 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 표현된다.

$$T_{total} = \frac{\rho h a b}{2} \dot{q}^T \bar{M} \dot{q}, \quad V_{total} = \frac{D b}{2 a^3} q^T \bar{K} q \quad (28a,b)$$

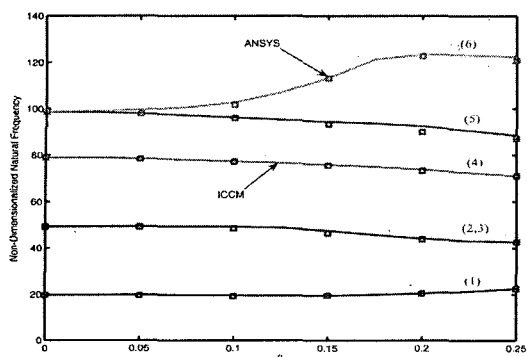


Fig. 2 Simply-supported square plate with a circular hole

여기서

$$\bar{M}_r = \bar{M} - (\pi\alpha\beta^2) T_c^T T_c \quad (29a)$$

$$\bar{K}_r = \bar{K} - \left(\frac{\pi\alpha}{\beta^2}\right) T_c^T \Lambda_c T_c \quad (29b)$$

따라서 고유치 문제는 다음과 같이 귀결된다.

$$[\bar{K}_r - \bar{\omega}^2 \bar{M}_r] A = 0 \quad (30)$$

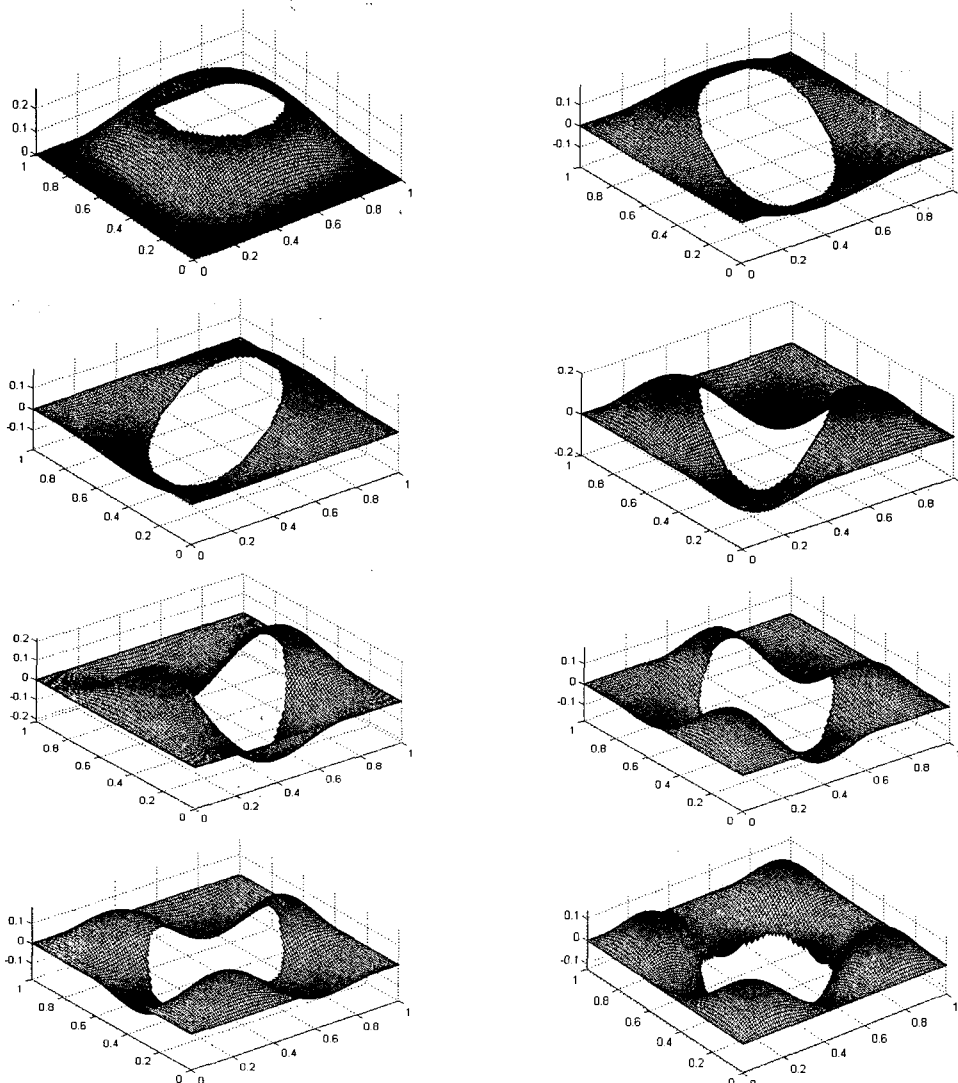


Fig. 3 Mode shapes of simply-supported square plate with a circular hole. ( $\beta = 0.25$ )

## 5. 수치해석

이 연구에서는  $\nu=0.3$ 이고 가운데에 원형의 구멍을 가지고 있는 단순지지 직사각형 평판의 고유진동수를 독립좌표연성법에 의해 구하였다. 각 방향으로 10개의 허용함수, 즉 총 100개의 허용함수를 고려하고 원형 구멍에 대해서는 50 개의 허용함수를 고려하여 수치계산을 수행하였다. 또한 비교를 위해 상용 유한요소 프로그램 ANSYS를 이용해 고유진동수를 계산하였다. Fig. 2는 각각의 방법에 의해 구해진 구멍의 크기에 따른 고유진동수변화를 보여주고 있다. 괄호안의 숫자는 고유진동 차수를 의미한다. 그림에서 첫 번째 고유진동수는 구멍 크기가 커짐에 따라 큰 변화를 보이지 않다가 구멍의 직경이 직사각형 평판의 한 변의 반이 되면서 급격하게 변하기 시작함을 알 수 있다. 그러나 2차부터 5차의 고유진동수는 원형 구멍이 커짐에 따라 고유진동수가 약간 감소하는 것을 볼 수 있다. 구멍에 의해 가장 큰 영향을 받는 고유진동 모드는 6차이며 구멍이 커짐에 따라 급격하게 증가한다.

Fig. 3은  $\beta = 0.25$  이며 구멍이 중앙에 위치하는 경우에 대해 ICCM을 이용해 얻어진 모드 형상을 보여주고 있다.

## 6. 결 론

이 연구에서는 직사각형 평판이 원형 구멍을 가지고 있는 경우의 진동 해석을 전통적인 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 수치해석을 수행하는 하는데 있어 독립좌표연성법(ICCM)을 사용하여 결과를 도출하는 과정을 토의하였다.

전통적인 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하는 경우에 구멍은 구조물의 일부 영역이 없는 것으로 간주하고 운동에너지와 탄성에너지에서 이 부분에 관한 적분을 차감하여 수치계산을 수행한다. 원형 구멍의 경우에는 이중 적분을 수행하게 되어 그 과정이 매우 복잡해진다. 그러나 독립좌표 연성법을 이 문제에 도입하면 운동에너지와 탄성에너지의 유도가 아주 쉽게 이루어진다. 독립좌표연성법을 사용하는 경우에 필수적인 작업은 구멍 영역내에서의 변위 일치 조건인데, 본 연구에서는 이전에 제안된 독립좌표연

성법의 연구 내용을 개선하여 적분과 직교성을 이용해 보다 정확한 관계식을 유도하는 방법을 제시하였다. 이 관계식을 이용하면 비교적 쉽게 구멍 영역의 효과를 산출해 낼 수 있다. 고유치 문제를 해결하는 과정은 전통적인 방법을 사용한 경우와 동일하다.

ICCM의 유효성 검토를 위해 모든 변이 단순지지된 평판이 원형 구멍을 가지는 경우를 고려하여, ICCM과 상용 유한요소 프로그램 ANSYS를 이용해 고유진동수를 계산하고, 그 결과를 비교하였는데 서로 잘 일치함을 확인하였다. 따라서 ICCM이 유공 평판의 고유 진동 문제 해석에 유용한 방법이라고 결론을 내릴 수 있다.

## 후 기

이 연구는 동국대학교 논문 게재 장려금 지원으로 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사드립니다.

## 참 고 문 헌

- (1) Rajamani, A. and Prabhakaran, R., 1977, "Dynamic Response of Composite Plates with Cut-outs, Part I: Simply-supported Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 54, pp. 549 ~ 564.
- (2) Rajamani, A. and Prabhakaran, R., 1977, "Dynamic Response of Composite Plates with Cut-outs, Part II: Clamped-clamped Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 54, pp. 565 ~ 576.
- (3) Ali, R. and Atwal, S. J., 1980, "Prediction of Natural Frequencies of Vibration of Rectangular Plates with Rectangular Cutouts," Computers and Structures, Vol. 12, pp. 819 ~ 823.
- (4) Lam, K. Y., Hung, K. C. and Chow, S. T., 1989, "Vibration Analysis of Plates with Cut-outs by the Modified Rayleigh-Ritz Method," Applied Acoustics, Vol. 28, pp. 49 ~ 60.
- (5) Lam, K. Y. and Hung, K. C., 1990, "Vibration Study on Plates with Stiffened Openings Using Orthogonal Polynomials and Partitioning Method," Computers and Structures, Vol. 37, pp. 295 ~ 301.
- (6) Bhat, R. B., 1985, "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal

Polynomials in Rayleigh-Ritz Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 102, pp. 493 ~ 499.

(7) Bhat, R. B., 1985, "Plate Deflections Using Orthogonal Polynomials," American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 111, pp. 1301 ~ 1309.

(8) Bhat, R. B., 1990, "Numerical Experiments on the Determination of Natural Frequencies of Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Nonuniform Thickness," Journal of Sound and Vibration, Vol. 138, pp. 205 ~ 219.

(9) Laura, P. A. A., Romanelli, E. and Rossi, R. E., 1997, "Transverse Vibrations of Simply-supported Rectangular Plates with Rectangular Cutouts," Vol. 202, No. 2, pp. 275 ~ 283.

(10) Monohan, L. J., Nemergut, P. J. and Maddux, G. E., 1970, "Natural Frequencies and Mode Shapes of Plates with Interior Cut-outs," The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 41, pp. 37 ~ 49.

(11) Paramasivam, P., 1973, "Free Vibration of Square Plates with Square Opening," Journal of Sound and Vibration, Vol. 30, pp. 173 ~ 178.

(12) Aksu, G. and Ali, R., 1976, "Determination of Dynamic Characteristics of Rectangular Plates with Cut-outs Using a Finite Difference Formulation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 44, pp. 147 ~ 158.

(13) Sakiyama, T., Huang, M., Matsuda, H. and Morita, C., 2003, "Free Vibration of Orthotropic Square Plates with a Square Hole," Journal of Sound and Vibration, Vol. 259, No. 1, pp. 63 ~ 80.

(14) Takahashi, S., 1958, "Vibration of Rectangular Plates with Circular Holes", Bull. JSME, Vol. 1, No. 4, pp. 380 ~ 385.

(15) Joga-Rao, C. V. and Pickett, G., 1961, "Vibrations of Plates of Irregular Shapes and Plates with Holes", J. Aeron. Soc. India, Vol. 13, No. 3, pp. 83 ~ 88.

(16) Kumai, T., 1952, "The Flexural Vibrations of a Square Plate with a Central Circular Hole," Proc.

2nd Japan Natl. Congr. Appl. Mech., pp. 339 ~ 342.

(17) Hegarty, R. F. and Ariman, T., 1975, "Elasto-dynamic Analysis of Rectangular Plates with Circular Holes," Int. J. Solids Structures, Vol. 11, pp. 895 ~ 906.

(18) Eastep, F. E. and Hemmig, F. G., 1978, "Estimation of Fundamental Frequency of Non-circular Plates with Free, Circular Cutouts", Journal of Sound and Vibration, Vol. 56, No. 2, pp. 155 ~ 165.

(19) Nagaya, K., 1980, "Transverse Vibration of a Rectangular Plate with an Eccentric Circular Inner Boundary," Int. J. Solids Structures, Vol. 16, pp. 1007 ~ 1016.

(20) Lee, H. S. and Kim, K. C., 1984, "Transverse Vibration of Rectangular Plates Having an Inner Cutout in Water," Journal of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 21, No. 1, pp. 21 ~ 34.

(21) Kim, K. C., Han, S. Y. and Jung, J. H., 1987, "Transverse Vibration of Stiffened Rectangular Plates Having an Inner Cutout," Journal of the Society of Naval Architects of Korea, Vol. 24, No. 3, pp. 35 ~ 42.

(22) Lee, Y.-S. and Lee, Y.-B., Free Vibration Analysis of 4 Edges Clamped, Isotropic Square Plates with 2 Collinear Circular Holes, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 4, No. 3, pp. 283 ~ 293.

(23) Kwak, M. K. and S. Han, 2005, "Free Vibration Analysis of Rectangular Plate with a Rectangular Cutout by Independent Coordinate Coupling Method," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 15, No. 12, pp. 1398 ~ 1407.

(24) Itao, K. and Crandall, S. H., 1979, "Natural Modes and Natural Frequencies of Uniform, Circular, Free-edge Plates," Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Vol. 46, pp. 448 ~ 453.