

고속 전철 급전기의 접촉 분리를 고려한 동역학적 해석

Dynamic Analysis of the Pantograph of a High-speed Electrical Train Considering Contact and Separation

이 기 수†

Kisu Lee

(2006년 2월 23일 접수 ; 2006년 5월 4일 심사완료)

Key Words : Contact(접촉), Pantograph(급전기), Cable(케이블), High-speed Electrical Train(고속전철), Differential Algebraic Equation(미분 대수 방정식), Numerical Analysis(수치해석), Multibody Dynamics(다물체 동역학)

ABSTRACT

For the analysis of dynamic contact between a catenary and a pantograph of high-speed electrical train, the numerical solution of the equations of motion of the vehicle pantograph and the catenary system subjected to the contact condition is obtained. The whole equations of motion of the catenary and the pantograph are simultaneously time integrated with the strict application of the contact condition. For the stability of the numerical solution, with the cubic spline interpolation of the catenary displacement, the velocity and acceleration constraints as well as the displacement constraint are imposed on the contact point. Especially it is shown that the Coriolis and centripetal accelerations are critical for the accuracy and stability of the computation.

1. 서 론

고속 전철은 차량의 지붕에 위치한 급전기 (pantograph)에서 전력선과의 접촉에 의하여 전력을 공급 받는다. 그런데 고속 전철이 시속 수백 킬로미터의 속도로 고속 주행하면 전력선에는 진동이 발생하며 전력선과 급전기 사이의 접촉력이 압축력이 유지되지 못하고 접촉이 끊어질 수 있다. 철로 상단에 수평으로 설치된 외부 전력선은 수십 미터 간격으로 수직으로 설치된 기둥 및 드롭퍼에 의하여 지지되므로 전력선의 수직 방향 강성도는 기둥 및 드롭퍼와의 거리에 의하여 심하게 변하며, 차량이 수평 주행하는 경우에도 급전기 및 전력선에 진동이 불가피하게 발생하게 되고, 심한 경우 급전기와 전력선 사이

의 접촉이 끊어지는 것이다. 따라서 고속 전철 급전기-전력선 시스템의 동역학적 해석은 중요한 과제가 되며 이를 위하여는 전력선과 급전기 사이에 접촉조건을 부과한 전체 시스템의 운동방정식을 정확히 풀 필요가 있다.

일반적으로 산업체에 사용되는 전력선은 굽힘 강성도는 무시될 수준이어야 하며 길이 방향으로 큰 인장력이 작용하고 또 이 인장력은 전력선 수직 변위에 의하여 거의 영향을 받지 않으므로 구조역학 또는 동역학적 해석의 경우 일정한 크기의 장력이 작용하는 케이블로 분류될 수 있는데, 이러한 현상은 고속전철 전력선의 경우에도 마찬가지이다. 그런데 케이블 운동방정식 및 차량 급전기 운동방정식은 그 사이에 접촉조건이 없다면 각각의 독립된 운동방정식은 수치적분에 의하여 쉽게 풀리지만, 접촉조건에 의하여 연결되는 경우 케이블 운동방정식 및 차량 급전기 운동방정식을 동시에 해석하는 것은 대단

† 책임저자; 정회원, 전북대학교 기계공학과
E-mail : kisulee@chonbuk.ac.kr
Tel : (063) 270-2326, Fax : (063) 270-2315

히 어렵다. 특히 이 경우 접촉조건으로 인하여 운동방정식 수치 적분의 안정성이 결정적으로 중요한 문제가 된다.

동적인 접촉 문제는 유한요소법 및 다물체 동역학에서 중요한 분야의 하나로서 전통적인 벌칙 법(iolissl penalty method), Lagrange multiplier method 등을 사용한 많은 논문이 오래 전부터 발표되었지만^(1, 2), 케이블과 접촉하며 고속 주행하는 물체의 동적인 접촉 현상을 완벽하게 해석한 예는 거의 없다. 예로써 급전기와 전력선 사이의 접촉조건을 위하여 Collina와 Bruni⁽³⁾, Harewell 등⁽⁴⁾ 처럼 벌칙 법(iolissl penalty method)을 사용한 경우 그 해는 참고문헌 (3)에서 예시된 것처럼 사용된 벌칙 파라미터(penalty parameter)의 값에 좌우 되므로 (즉 인위적으로 접촉점에 부과된 스프링과 댐퍼가 동역학 해에 결정적 영향을 줌) 참고문헌 (3, 4)처럼 특정 벌칙 파라미터 값을 가정하여 계산된 결과는 신뢰성에 문제를 가진다. 즉 높은 값의 벌칙 파라미터에 의해서는 수치해석의 안정성이 상실되고 낮은 값의 벌칙 파라미터에 의해서는 일반적으로 해의 정확도가 상실되며, 특정 모델의 경우 특정 벌칙 파라미터에 의해서 비교적 좋은 결과가 나왔다 하더라도 다른 모델 적용으로 일반화 시킬 수 없다는 것은 잘 알려진 사실이다. 또 Arnold와 Siemon⁽⁵⁾는 Lagrange multiplier method를 사용하여 케이블과 급전기 사이의 접촉조건을 가한 후 일반적인 미분대수 방정식 (DAEs) 해법을 사용하여 운동방정식을 시간 적분하였다. 그러나 이 경우 접촉점이 케이블 위에서 고속으로 미끄러지고 있다는 조건이 방정식에서 고려되지 않았으므로 해의 신뢰성 및 안정성이 의문시 되며, 실제로 대단히 단순한 모델에서 질량이 비교적 저속으로 이동하는 경우의 벤치마크 예제만 풀려 있으며, 복잡한 시스템에서 고속 주행하는 문제의 적용 가능성은 불분명하다. 한편 Bruni 등⁽⁶⁾은 전력과의 접촉점에서 마모에 대하여 설명하고 있을 뿐 운동방정식 해법에 대한 수학적 고찰은 없다.

위와 같이 유한요소법 또는 유한차분법에 의하여 유도된 전력선 운동 방정식을 사용하면 시간적분시 수치해석상의 문제점이 야기되므로, 고속전철 전력선과 급전기의 동적 거동을 상당히 단순화된 모델을 사용하여 해석한 경우가 많지만, 이 경우에도 일반

적으로 접촉조건을 엄격히 적용하지 못하였다. 예로써 Asoshi와 Manabe⁽⁷⁾ 처럼 전력선에서 발생하는 진동을 탄성과 형태로 파악하고 급전기는 자유도 1의 물체로 단순화하여 해석하여 접촉조건을 엄격히 적용하지 않거나, Wu⁽⁸⁾와 같이 전력선을 강성도가 변하는 스프링으로 취급하여 급전기가 질량이 없는 전력선과 접촉하며 주행하는 경우로 해석한 경우가 대부분이었다. 그러나 차량의 주행 속도가 빨라지면 전력선의 진동 가속도가 대단히 높아지며 전력선의 질량 효과 및 전력선 진동으로 인한 접촉력 변화를 무시할 수 없다. 이를 위하여 Wu⁽⁹⁾는 전력선 밀도를 고려하여 전력선의 운동방정식과 급전기의 운동방정식을 도입하였으나 그들 사이에 접촉조건이 부과된 연립 운동방정식을 동시에 풀지는 못하였다. 즉 전력선에 작용하는 일정한 크기의 힘이 일정한 속도로 이동하는 경우의 전력선 운동방정식을 풀어서, 힘과 변위 사이의 관계식에서 동역학적 스프링 상수를 유도하였으며, 여기에서 유도된 동적 스프링 상수가 고속 주행하는 급전기와 접촉시에도 유효하다고 가정하여 급전기의 동역학적 운동방정식을 풀었다. 그러나 전력선과 급전기 사이의 접촉력은 2물체의 운동방정식을 접촉조건을 부과하여 동시에 풀어야 결정되는 것이며, 동적 스프링 상수도 해 이전에는 결정될 수 없다 (즉 접촉력을 변위로 나눈 값은 해 이전에는 결정될 수 없다). 따라서 일정한 크기의 힘이 전력선을 주행한 경우의 동적 스프링 상수를 사용하여, 접촉력이 심하게 변하는 경우의 급전기 접촉 문제를 해석하면 큰 오차가 포함될 것이므로 추가 연구가 필요하다. 한편 국내에서도 최근 고속전철 국내 도입과 더불어 고속전철 기술의 하나로써 전력선-급전기 동역학 해석에 관한 높은 수준의 연구가 이루어졌으며, 특히 가변 강성도를 고려한 비선형 방정식 해법 또는 수치해석 FFT 분석 결과의 실제 실험 자료와 비교 등이 수행되었다.^(10, 11) 그러나 접촉조건 때문에 운동방정식의 시간 적분에서 발생하는 수치해석의 불안정성을 해소하기 위하여는 추가적인 연구가 필요하다.

급전기 및 전력선의 운동방정식은 미분 방정식인데 그 사이의 접촉조건은 대수 부등식이다. 이 경우 일반적인 상미분 방정식 적분 방법을 사용하여 운동 방정식을 수치해석적으로 적분하면 그 해에

spurious oscillation이 포함되어 커다란 오차가 발생하거나 발산해 버린다는 것은 기존 다물체 동역학 등 (예로써 참고문헌 (12, 13))에서 널리 알려진 사실이다. 바로 이러한 수치해석의 불안정성 특히 접촉점이 접촉체의 표면에서 고속으로 미끄러지는 현상은 기존 기구학적 구속조건으로 수식화 되지 않기 때문에 기존 참고문헌의 접촉해석 방법을 고속전철 급전기의 접촉해석에 적용하려면 추가 연구가 필요하다. 이 논문에서는 이러한 수치 불안정성을 해결하기 위하여 본 저자의 기존 참고문헌 방법^(14~18)을 활용하여 접촉조건에 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 수치 적분 계산의 안정성을 도모한다. 특히 고속전철 급전기처럼 인장력이 작용하는 케이블과 접촉하며 고속 주행하는 물체의 경우, 접촉점의 가속도 계산시 코리올리스 (Coriolis) 가속도 및 구심 가속도가 결정적으로 큰 역할을 함을 설명한다. 즉 이 논문에서는 고속 주행 차량 급전기의 운동방정식 및 전력 공급선의 운동방정식을 정확히 수치 적분에 의하여 풀며 동시에 접촉조건을 정확히 부과할 수 있는 수치해석 기법을 제시한다. 전력선은 인장력 및 밀도를 고려한 케이블 운동방정식을 사용하며 급전기는 어떠한 형태의 다물체 동역학 모델 사용도 가능하며, augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 접촉 조건을 적용시킨다.

2. 운동방정식, 구속조건 및 수치 해

고속 전철에서 사용되는 전력선은 케이블 운동방정식에 의하여 실제 현상과 거의 비슷한 동역학적 해석이 가능하고, 여러 개의 부품으로 구성된 급전기는 일반적인 다물체 동역학 모델에 의하여 실제의 동역학적 현상을 거의 정확히 계산할 수 있다. 고속 전철 급전용 전력선은 일반적으로 굵힘 강성도는 아주 작으며 길이 방향으로 일정한 크기의 큰 인장력이 작용하는 케이블로 분류된다 (전력선에는 초기에 인장력 T 가 가해지고 있으며 인장력 T 는 그 후의 전력선 수직 변위에 의하여 거의 영향을 받지 않는다). 전력선의 길이 방향을 좌표 x 를 이용하여 나타내고, 접촉력 p 가 $x=x_0$ 인 점에서 전력선에 수직 방향으로 작용한다면 (여기에서 접촉력은 압축력이므로 0보다 작은 값을 사용함), 다음과 같은 전력선

운동 방정식을 만들 수 있다.

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p \delta(x-x_0) = 0 \quad (1)$$

위에서 r 는 전력선의 선밀도, T 는 인장력, y 는 전력선 수직 변위, t 는 시간, d 는 델타 함수를 나타낸다. 여기에서는 케이블 질량이 유한한 개수의 절점에 집중되어 있다고 가정하고, x 방향 미분을 유한차분법 (finite difference method)을 적용하여 변환시켜 운동방정식 (1)을 절점의 수직 변위를 이용한 운동방정식으로 변환시키기로 한다. 접촉점의 케이블 양쪽 절점이 i 와 $i+1$, 절점과 절점 사이의 거리가 L , 접촉점에서 양쪽 절점까지의 거리가 a 와 b 라면, 접촉력 p 를 절점에 작용하는 등가의 힘 f_i 와 f_{i+1} 로 다음과 같이 변환한다.

$$f_i = \frac{b}{L} p, \quad f_{i+1} = \frac{a}{L} p \quad (2)$$

물론 케이블 절점 $i-1$ 과 $i+1$ 사이에 급전기와 접촉이 없는 경우 힘 f_i 는 0이다. 이상의 과정에서 절점의 질량을 m 으로 표시하면 다음과 같은 형태의 운동방정식이 얻어진다.

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - T(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/L + f_i = 0$$

$$m_{i+1} \frac{d^2 y_{i+1}}{dt^2} - T(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)/L + f_{i+1} = 0 \quad (3)$$

물론 유한한 길이의 전력선 양 끝점에서는 경계조건으로 $T \partial y / \partial x$ 를 유한차분법으로 변환한다. 차량 급전기는 일반적으로 여러 개의 질량 및 탄성을 가진 물체들이 조인트에서 구속조건으로 연결된 것이며, 실제의 급전기를 다물체 동역학을 사용하여 복잡한 방정식으로 표현하여도 저자의 기존 참고문헌 (14~18)의 방법에 의하여 정확한 계산이 가능하지만, 이 논문의 경우 급전기와 전력선 사이에 접촉 조건을 부과한 운동방정식의 해를 구하는 것이 목적이므로 여기에서는 편의상 Wu⁽⁹⁾가 사용한 Fig. 1의

급전기 모델을 그대로 사용한다.

급전기 및 전력선의 운동방정식은 미분 방정식이며 접촉조건은 대수 부등식이므로 일반적인 상미분 방정식 적분 방법을 사용하여 운동 방정식을 수치해석적으로 적분하면 그 해에는 커다란 오차가 발생하거나 발산해 버린다. 따라서 접촉조건을 변위뿐 아니라 속도 및 가속도 조건을 동시에 고려하여야 한다. 특히 다음에 기술하는 바와 같이 접촉점에서의 정확한 가속도 계산을 위하여는 코리올리스 가속도 및 구심 가속도 계산을 정확히 할 필요가 있으며, 이를 위하여는 전력선의 변위를 길이 방향 (x 축 방향)으로 2번 미분한 도함수가 연속이어야 한다. 이와 같은 이유로 여기에서는 절점과 절점 사이의 전력선 케이블의 변위는 모든 절점에서의 변위를 이용하여 cubic spline interpolation 을 사용하여 내삽한다 (cubic spline interpolation에 대하여는 참고 문헌 (19) 등 참조). 케이블의 운동방정식을 풀면 케이블 절점의 변위뿐 아니라 속도 및 가속도가 계산되며, 케이블 절점과 절점 사이에서의 속도 및 가속도 역시 cubic spline interpolation을 사용하여 구한다. 급전기와 접촉하는 케이블 접촉점의 위치는 급전기에서 케이블에 수직선을 그어 가장 짧은 점으로 선정하며, 케이블 접촉점 위치가 선정되면 위의 방법에 의하여 그 접촉점에서의 변위, 속도, 가속도를 구할 수 있다.

운동방정식을 수치적분할 때에 시간을 t , 시간 간격을 Δt 라고 한다. 그러면 전력선과 급전기 사이의 접촉력을 p , 그 사이의 침입된 수직 간격을 s

라고 하면 접촉점에서 다음과 같은 형태의 접촉조건이 시간 $t+\Delta t$ 에서 만족되어야 한다.

$$\begin{aligned} p^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ s^{t+\Delta t} &\leq 0 \\ p^{t+\Delta t} &= 0 \text{ if } s^{t+\Delta t} < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

위의 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 augmented Lagrange multiplier method (참고문헌 (20) 참조)를 사용하여 풀기 위하여 다음과 같은 접촉 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} e^{t+\Delta t} &= s^{t+\Delta t} \text{ if } p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } s^{t+\Delta t} > 0 \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (5)$$

그러면 접촉 조건은 다음 식으로 변환된다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \text{ and } e^{t+\Delta t} = 0 \quad (6)$$

그런데 동적 접촉의 경우 위와 같이 변위 수준의 접촉조건만 적용할 경우, 운동방정식은 미분방정식이지만 접촉조건은 대수 부등식으로 이루어지므로, 기존 수많은 연구에서 밝혀진 바와 같이 수치적 불안정성으로 인하여 해를 구할 수 없다. 따라서 접촉점에서 접촉점의 속도 구속조건 및 가속도 구속조건을 부과하여야 한다. 그런데 케이블과 급전기 접촉점 사이의 접촉력은 표면에 수직이므로 구속조건 역시 표면에 수직인 방향을 고려한다. 고속전철의 주행 속도를 V , 전력 케이블이 급전기와 접촉점에서 주행 방향과 이루는 각도를 q 라고 하며 (즉 케이블의 수직 방향 변위로 인하여 접촉점에서 케이블이 지상과 각도 q 를 이루고 있다고 하며), 케이블과 접촉하는 점에서 급전기의 수직 방향 속도를 v_p 라고 하면 접촉점에서 케이블과 급전기 사이의 상대 속도 (케이블 수직방향 상대속도)는 다음과 같다.

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{dy}{dt} - V \sin \theta + v_p \quad (7)$$

위의 속도 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 풀기 위하여 다음과 같은 속도 접촉 오차를 정의한다.

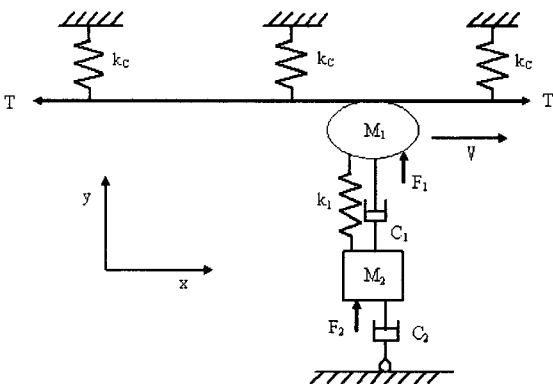


Fig. 1 A model for catenary-pantograph dynamics with contact condition

$$\begin{aligned} \mu^{t+\Delta t} &= \frac{ds^{t+\Delta t}}{dt} \text{ if } (p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } \frac{ds^{t+\Delta t}}{dt} > 0) \\ &\quad \text{and } (p^t < 0 \text{ or } e^{t+\Delta t} > 0) \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (8)$$

그러면 속도 접촉 조건은 다음 식과 같다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \quad \text{and} \quad \mu^{t+\Delta t} = 0 \quad (9)$$

또한 접촉점에서 케이블의 회전 각속도를 ω , 접촉점에서 케이블의 곡률 반경을 r , 케이블과 접촉하는 점에서 급전기의 수직 방향 가속도를 a_p 라고 하면 케이블과 급전기 사이의 상대 가속도는 다음과 같다.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega V \cos\theta + \frac{(V \cos\theta)^2}{r} + a_p \quad (10)$$

이 논문에서 케이블 접촉점의 변위 y , 속도 dy/dt , 가속도 d^2y/dt^2 는 절점의 해당 변위, 속도, 가속도를 이용하여 cubic spline interpolation에 의하여 계산하고, 각속도 ω 는 $d(dy/dt)/dx$, 반경 r 은 $\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2} / (d^2y/dx^2)$ 에 의하여 계산한다. 위에서 오른쪽 2번째 항은 코리올리스 가속도이고 3번째 항은 구심 가속도이다. 가속도 접촉 조건을 운동방정식과 동시에 풀기 위하여 다음과 같은 가속도 접촉 오차를 정의한다.

$$\begin{aligned} v^{t+\Delta t} &= \frac{d^2s^{t+\Delta t}}{dt^2} \text{ if } (p^{t+\Delta t} < 0 \text{ or } \frac{d^2s^{t+\Delta t}}{dt^2} > 0) \\ &\quad \text{and } (p^t < 0 \text{ or } e^{t+\Delta t} > 0) \\ &= 0 \text{ otherwise} \end{aligned} \quad (11)$$

그러면 가속도 접촉 조건은 다음 식과 같다.

$$p^{t+\Delta t} \leq 0 \quad \text{and} \quad v^{t+\Delta t} = 0 \quad (12)$$

케이블의 운동방정식과 급전기 운동방정식의 해는 케이블과 급전기 사이의 접촉점에서 접촉 조건을 만족시켜야 한다. 즉 케이블과 급전기가 접촉하는 경

우 위에서 정의한 상대 변위, 상대 속도, 상대 가속도는 모두 0이 되어야 한다. 이를 위하여 본 저자의 기존 논문^(14~18)에서는 이상의 3가지 접촉 구속 조건이 부과된 운동방정식의 해를 구하기 위하여 변위 오차, 속도 오차, 가속도 오차를 사용하여 이들을 각각 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 0으로 수렴시키는 방법을 사용하였다. 먼저 변위 접촉 조건 (4)를 운동방정식에 적용시키기 위하여, 이 논문에서는 참고문헌 (14~18)에서 본 연구자가 제시한 반복계산법을 활용한다 (여기에서는 접촉점이 단 하나뿐이므로 계산 가속 기법은 활용하지 않는다). 이 논문의 반복계산법은 augmented Lagrange multiplier method와 유사한 방법으로서, 각 반복 단계는 2 단계로 구성된다. 첫 단계는 앞 반복 단계의 해에서 구해진 접촉 오차를 이용하여 접촉력을 계산하는 것이며, 두번째 단계에서는 주어진 접촉력을 이용하여 전체 운동 방정식의 해를 구하고 접촉 오차를 계산하는 것이다. 그러면 시간 $t+\Delta t$ 에서의 접촉오차 $e^{t+\Delta t}$ 는 참고문헌 (14~18)과 동일한 방법에 의하여 다음의 반복계산법에 의하여 0으로 감소함이 증명된다.

$$p^{t+\Delta t, m} = \min(p^{t+\Delta t, m-1} - \alpha e^{t+\Delta t, m-1}, 0) \quad (13)$$

위에서 m 은 반복 횟수를 나타내고, α 는 다음에서 설명되는 스칼라 양이며, $e^{t+\Delta t, m-1}$ 는 접촉력 $p^{t+\Delta t, m-1}$ 를 사용한 경우에 운동 방정식의 해에 의하여 계산되는 $e^{t+\Delta t}$ 를 나타낸다. 속도 접촉 조건 (9) 및 가속도 접촉 조건 (12) 역시 동일한 반복계산법을 사용하여 운동방정식과 연립시켜 해를 구한다. 시간 $t+\Delta t$ 에서의 기본적인 계산 과정을 다음에 요약한다.

Step 1. 처음에 $m=0$ 으로 하고, 시간 t 에서의 해를 $p^{t+\Delta t, 0}$ 으로 하여 step 4로 간다.

Step 2. m 을 $m+1$ 로 하고, $\alpha = 1 / (\delta s / \delta p)^{t+\Delta t}$ 로 한다.

Step 3. 반복계산법 (13)에 의하여 $p^{t+\Delta t, m}$ 를 계산한다.

Step 4. 급전기 접촉점에서 케이블에 수직선을 그어서 케이블 위의 접촉점 위치를 결정한다. 접촉력 $p^{t+\Delta t, m}$ 를 급전기와 케이블의 양쪽 접촉점에 가하

고, 케이블 및 급전기 시스템 전체의 운동방정식의 해를 상미분 방정식 수치 적분에 의하여 구한다 (예로써 룬지쿠타 방법 (Runge Kutta method) 등 사용). 이렇게 구한 케이블 및 급전기 운동방정식 해로부터 식 (5)에 의하여 접촉오차 $e^{t+\Delta t, m}$ 를 계산한다. 만약 $|e^{t+\Delta t, m}|$ 이 허용 오차보다 작으면 시간 $t + \Delta t$ 에서의 변위는 여기에서 결정하고 step 5로 간다. 그 외의 경우 {만약 $|e^{t+\Delta t, m}| < |e^{t+\Delta t, m-1}|$ 또는 $m=0$ 이면 to step 2로 가고}, 그 외의 경우 $\alpha = \alpha/2$ 로 하여 step 3로 다시 가서 m 번째 반복 계산을 다시 수행한다.

Step 5. 속도 접촉 조건 (9)를 운동방정식에 적용시키기 위하여, 변위 접촉 오차 대신 속도 접촉 오차 (8)을 사용하여, 위의 steps 1-4에 의하여 반복 계산을 수행한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 속도는 여기에서 결정된다.

Step 6. 가속도 접촉 조건 (12)를 운동방정식에 적용시키기 위하여, 변위 접촉오차 대신 가속도 접촉 오차 (11)을 사용하여, 위의 steps 1-3에 의하여 반복 계산을 수행한다. 가속도 오차 계산시 필요한 케이블 접촉점의 각속도 및 곡률 반경은 식 (10) 밑에서 설명한 방법에 의한다. 시간 $t + \Delta t$ 에서의 가속도 및 접촉력은 여기에서 결정된다. 계속 다음 시간의 해석이 필요한 경우 시간을 Δt 만큼 증가시켜 step 1으로 가서 다음 시간의 계산을 시작한다.

3. 예제 계산

여기에서는 Fig.1과 같이 단순화된 전력선 모델에서 차량이 고속 주행하는 경우를 생각한다. 이 계산 모델에서 전력선 전체 길이는 1000m이고, 길이 50m인 구간 마다 수직 기둥 및 스프링에 의하여 수직으로 지지되어 있다고 단순화하여 계산한다(즉 Fig.1 모델에서 전력선과 수직 기둥 사이에 스프링이 존재한다고 생각하고, 수직 기둥 사이의 간격은 50m라고 생각한다). 여기에서 사용된 데이터는 전력선 장력 50 kN, 전력선 선밀도 4.336 kg/m, 전력선과 수직 기둥 사이의 스프링 강성도 $k_c=3.5$ kN/m, 집전기 모델의 질량 $M_1 = 8$ kg, $M_2 = 12$ kg, 스프링 상수는 $K_1=10$ kN/m, $C_1=120$ kNs/m, $C_2=30$ kNs/m이다. 이 예제 계산에서는 $Wu^{(9)}$ 경우

처럼 전력선 케이블의 운동방정식에 점성 감쇠력 Cdy/dt 을 고려하였으며 상수 C 는 $0.04\sqrt{k_c M_1}$ (6.7 sN/m²)로 하였다. 또한 이 논문은 전력선과 접촉하며 주행하는 물체의 운동방정식 해의 타당성을 점검하는 것이 주목적이므로 힘 $F_1=100$ N, $F_2=0$ 으로 하였다. 급전기는 계산 초기에 Fig.1 모델 전력선의 제일 왼쪽 기둥을 접촉하며 출발한다고 생각하였으며, 초기조건으로서 전력선의 제일 왼쪽 기둥에 부착된 스프링의 정역학적 평형에 의한 변형을 고려하였다. 전체 케이블은 1000개 요소로 등분하였으며 (여기에서 요소는 케이블의 절점과 절점 사이를 뜻함) Δt 는 0.5 ms로 하여 4차 룬지쿠타 방법(Runge Kutta method)에 의하여 운동방정식을 시간 적분하였다.

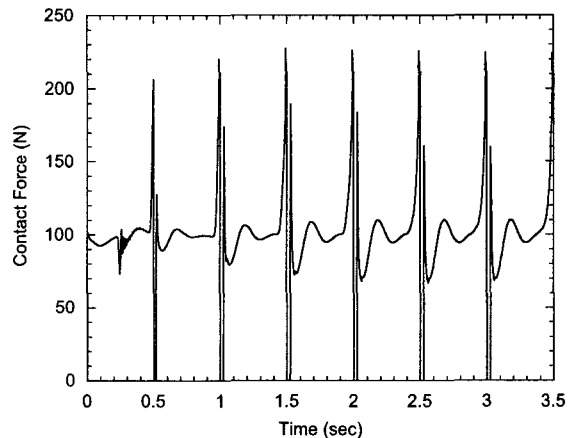


Fig. 2 Contact force v.s. time (360 km/h)

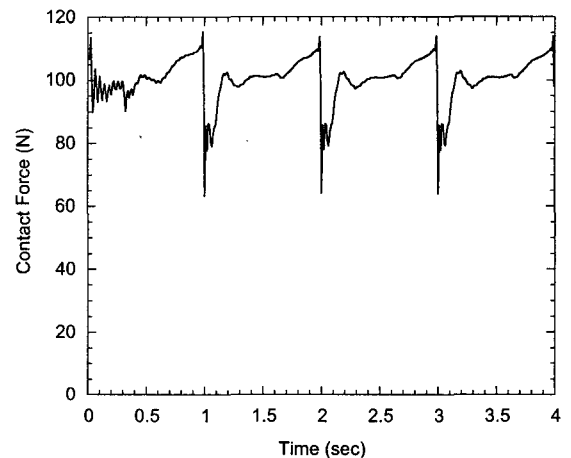


Fig. 3 Contact force v.s. time (180 km/h)

먼저 차량 속도가 360 km/h 인 경우와 180 km/h인 경우의 결과는 Fig. 2와 Fig. 3에 표시되어 있다. 그런데 케이블에서 파동 전파 속도는 $\sqrt{T/\rho}$ 이므로 계산 도중 발생한 파동은 유한한 길이의 모델 오른쪽 끝에서 반사되어 돌아와서 해에 영향을 주게 된다. 이 계산에서는 반사된 파동이 돌아오기 전까지의 시간에서만 계산하여 제시한 것이며, 따라서 2번째 기동 특과 이후 50 m 구간마다 비교적 유사한 모양이 반복되고 있다. 먼저 차량 속도가 360 km/h 인 경우의 접촉력이 Fig. 2에 그려져 있으며 급전기와 전력선 사이에서는 분리되는 경우가 발생한다. 그러나 열차 속도가 180 km/h인 경우에는 Fig. 3과 같이 분리되는 경우가 없다. 이 예제에서는 50 m 구간의 수직 기동마다 수직 방향의 스프링이 존재한다고 가정하였으므로 차량이 고속으로 수직 기동 통과 후 전력선과 급전기 사이의 접촉이 끊어질 수 있는 것이다. 또 차량 속도가 360 km/h 인 경우에도 전력선의 밀도를 30%로 줄이면 Fig. 4와 같이 분리되지 않는다. 이 예제 계산의 그림에서는 편의상 접촉력을 0보다 크게 하여 표시하였다.

이 예제를 3배 이상의 요소를 사용하여 다시 계산하여도 거의 동일한 결과가 나오며 Δt 를 줄이거나 늘려서 계산해도 동일한 결과가 나오므로 이 계산의 타당성이 입증된다. 이 논문에서는 접촉점에서 변위 접촉조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하였는데, 만약 속도 및 가속도 조건을 부과하지 않으면 그 해는 발산한다. 또한 접촉점의 코리올리

스 가속도 및 구심 가속도는 대단히 큰 값이며 이를 접촉점의 가속도에 포함시키지 않는 경우 Fig. 5처럼 그 해는 수렴하지 못하고 발산한다. 특히 이 경우 수치 불안정으로 인하여 접촉점에서의 변위 구속조건, 속도 구속조건, 가속도 구속조건을 적용시킨 해가 서로 다르게 나오고 있다. 따라서 계산의 정밀도 및 안정성을 위하여는 이 논문과 같이 변위, 속도, 가속도 구속조건이 접촉점에서 정확히 만족되어야 하며 접촉점의 코리올리스 가속도 및 구심 가속도를 정확히 계산해야 함을 알 수 있다.

그런데 이 논문의 운동방정식 (3)은 전력선 케이블의 절점과 절점 사이 변위를 x 의 1차식으로 가정하여 얻어진 것인데, 접촉조건 적용시에는 절점과 절점 사이의 케이블 변위를 x 의 3차식으로 가정하여 cubic spline interpolation을 적용하였으므로 케이블 절점과 절점 사이에서 접촉력 계산시 불필요한 진동이 포함되는데, 이러한 진동을 제거하기 위하여 케이블의 절점과 절점 사이에서 계산된 접촉력의 평균치를 사용하였다. 앞에서 설명된 것처럼 접촉점의 코리올리스 가속도 및 구심 가속도는 계산의 안정성 및 정밀도에 결정적 역할을 하며, 이들 가속도에는 수직 변위를 2번 미분한 항이 포함되므로, 이들 가속도의 연속성을 위하여는 절점과 절점 사이의 케이블 변위를 x 의 3차식인 cubic spline interpolation을 사용하여 표시하는 것이 불가피하다. 현재 발표되어있는 Wu 등 기존 논문의 경우 접촉력의 시간에

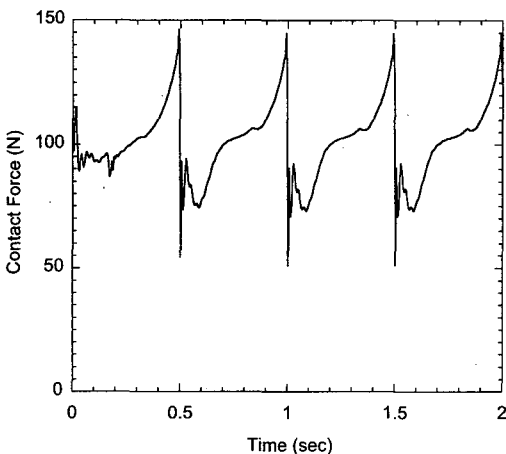


Fig. 4 Contact force v.s. time (360 km/h, 70% reduced density)

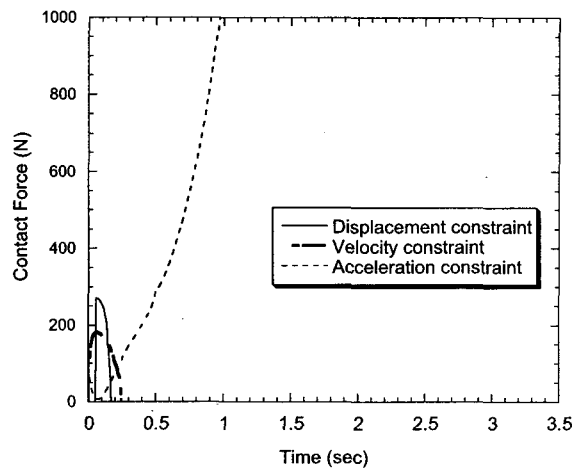


Fig. 5 Contact force v.s. time (360 km/h, without considering Coriolis and centripetal accelerations)

대한 변화가 나와 있는 그래프가 없으므로 이 논문의 결과와 직접 비교할 수는 없다. 그러나 이 예제를 3배 이상의 요소를 사용하여 다시 계산하여도 거의 동일한 결과가 나오며, 시간 간격 Δt 를 줄이거나 늘려서 계산해도 동일한 결과가 나오며, augmented Lagrange multiplier method를 적용하기 위한 반복 계산법에서 변위 접촉오차, 속도 접촉오차, 가속도 접촉오차의 어느 오차에 의한 계산도 동일한 결과가 나오므로 이 계산의 타당성이 입증된다. 또한 Figs. 2~4에서 계산된 접촉력을 보면, 급전기가 기둥을 통과하면 접촉력은 크게 감소하며, 일반적으로 기둥과 기둥 사이 거리의 중간까지 구간에서는 접촉력이 작은 편이고, 기둥과 기둥 사이의 중간쯤 되는 지점을 통과하면 접촉력은 크게 증가하기 시작하는데, 이러한 현상은 전력선의 질량 (관성) 효과 및 Wu⁽⁹⁾가 지적한 수직방향 강성도 변화가 합해진 결과 때문이라고 판단된다. 즉 급전기가 기둥을 통과할 당시에 전력선은 이미 위로 향하는 속도가 있는데 급전기가 기둥을 통과한 직후 수직방향 강성도는 작아지므로 접촉력은 크게 감소하며, 급전기가 전력선의 기둥과 기둥 사이의 중간 지점을 통과할 때까지는 참고문헌(9)에서 보인 것처럼 수직방향 강성도가 작아지므로 접촉력이 별로 증가하지 못한다. 그러나 급전기가 전력선의 기둥과 기둥 사이의 중간 지점 이후를 지나면 전력선의 수직방향 강성도는 다시 증가하므로 접촉력이 따라서 증가한다고 판단된다 (물론 전력선과 기둥 사이에 지지선 및 드롭퍼가 장착되어 Fig. 1보다 복잡한 전력선 모델이 되면 이러한 현상은 상당히 달라질 것임).

4. 결 론

고속 주행 차량 급전기의 운동방정식 및 전력선의 운동방정식을 접촉 조건을 부과하여 정확히 풀 수 있는 수치해석 기법을 제시하였다. 전력선은 인장력 및 질량을 고려한 케이블 운동방정식을 사용하였으며 접촉 조건에는 변위 조건뿐 아니라 속도 및 가속도 조건도 함께 부과하여 대수 부등식이 포함된 미분방정식 수치적분의 안정성을 도모하였다. 특히 고속 이동하는 접촉점의 가속도 계산시 코리올리스 가속도 및 구심 가속도를 무시해서는 안됨을 설명하였다. 차량이 고속 주행하는 경우에 급전장치가 전력

선과 접촉 분리가 반복되는 경우에도 이 논문의 방법에 의하여 운동방정식을 정확하고 안정적으로 풀 수 있음을 설명하였다. 이 논문에서 제시한 방법은 augmented Lagrange multiplier method를 사용하여 접촉조건이 부과된 케이블-급전기 시스템 운동방정식을 시간적분을 사용하여 정확히 안정적으로 풀 수 있다는 것을 설명한 것이며, 따라서 기존 참고문헌의 경우와 같이 사용된 벌칙함수의 종류 및 크기 등에 좌우되지 않고 정확한 해석이 가능하다.

실제 현상의 경우 전력선에는 뎀핑이 존재할 것이며 전력선도 전력선 자체와 지지선으로 구성되어 복잡할 것이다. 또한 실제의 급전기 역시 상당히 복잡한 다물체로 구성되어 있다. 본 논문의 경우 각 구성체의 운동방정식을 독립적으로 수치적분하며 그 사이에 augmented Lagrange multiplier를 이용하여 접촉 조건을 부과하는 것이므로 시스템이 복잡해 지더라도 본 저자의 기존 참고문헌 (16)에서 설명된 것처럼 접촉 조건과 기구학적 구속조건이 동시에 부과된 시스템 전체의 정확한 동역학 해석이 가능할 것이다. 이 논문 목적은 전력선과 급전기 사이에 접촉조건을 부과한 경우에 안정된 수치해석 해를 구할 수 있음을 설명하는 것이므로 비교적 단순한 전력선 모델을 사용하였다. 실제 고속전철에서는 전력선이 지지선에 의하여 지지되고 그 사이가 드롭퍼 등으로 연결되어 있으므로 접촉력 변화 모양은 이 논문 예제 계산 결과와 상당히 다를 것이며 추후에 실제의 전력선 및 급전기를 모델로 한 정확한 계산이 요망된다.

후 기

이 논문은 2004년도 한국학술진흥재단의 지원 (KRF-2004-002-D00018)에 의하여 연구되었음.

참고문헌

- (1) Bathe, K. J. and Chaudhary, A. B., 1986, "A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-dimensional Contact Problems with Friction," *Comput. Struct.*, Vol. 24, pp. 855 ~ 873.
- (2) Taylor, T. L. and Papadopoulos, P., 1993,

“On a Finite Element Method for Dynamic Contact/Impact Problems,” *Int. J. Numer. Method Engng.*, Vol. 36, pp. 2123 ~ 2140.

(3) Collina, A. and Bruni, S., 2002, “Numerical Simulation of Pantograph-overhead Equipment Interaction,” *Vehicle System Dynamics*, Vol. 38, pp. 261 ~ 291.

(4) Harewell, P., Drugge, L. and Reijm, M., 2005, “Study of Critical Sections in Catenary Systems During Multiple Pantograph Operation,” *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part C, Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol. 215, pp. 203 ~ 211.

(5) Arnold, M., and Simeon, B., 2000, “Pantograph and Catenary Dynamics: A Benchmark Problem and Its Numerical Solution,” *Applied Numerical Mathematics: Transactions of IMACS*, Vol. 34, pp. 345 ~ 362.

(6) Bruni, S., Bucca, G., Collina, A., Facchinetti, A. and Melzi, S., 2005, “Pantograph-catenary Dynamic Interaction in the Medium-high Frequency Range,” *Vehicle System Dynamics*, Vol. 41 suppl., pp. 697 ~ 706.

(7) Aboshi, M. and Manabe, K., 2000, “Analysis of Contact Force Fluctuation between Catenary and Pantograph,” *Quarterly Report of RTRI*, Vol. 41, pp. 182 ~ 187.

(8) Wu, T. X. and Brennan, M. J., 1998, “Basic Analytical Study of Pantograph-catenary System Dynamics,” *Journal of Vehicle System Dynamics*, Vol. 30, pp. 443 ~ 456.

(9) Wu, T. X. and Brennan, M. J., 1999, “Dynamic Stiffness of a Railway Overhead Wire System and Its Effect on Pantograph-catenary System Dynamics,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 219, pp. 483 ~ 502.

(10) Choi, Y. S., 2000, “Time-varying Stiffness of Catenary System and Its Effect on Current Collection by Pantograph,” *The 2000 Spring Conference of Korean Society for Railway*, pp. 598 ~ 605.

(11) Kim, J. W., Park, I. K., Jang, J. H., Wang, Y. Y. and Han, C. S., 2003, “A Modeling and

Contact Force Analysis of the Catenary-pantograph System for a High-speed Rail Vehicle,” *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 13, No. 6, pp.474~483.

(12) Petzold, L., 1982, “Differential Algebraic Equations Are Not ODEs,” *SIAM Journal. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 3, pp. 367 ~ 384.

(13) Amirouche, F. M., 1992, *Computational Methods in Multibody Dynamics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

(14) Lee, K., 1994, “A Numerical Solution for Dynamic Contact Problems Satisfying the Velocity and Acceleration Compatibilities on the Contact Surface,” *Computational Mechanics*, Vol. 15, pp. 189 ~ 200.

(15) Lee, K., 1995, “A Numerical Solution for Dynamic Interaction Between Rigid Wheel and Flexible Beam,” *Commu. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 267 ~ 279.

(16) Lee, K., 1997, “A Numerical Method for Dynamic Analysis of Vehicles Moving on Flexible Structures Having Gaps,” *Int. J. Numer. Method Engng.*, Vol. 40, pp. 511 ~ 531.

(17) Lee, K., 2001, “Analysis of Dynamic Contact Between Rotating Spur Gears by Finite Element and Multi-body Dynamics Techniques,” *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part C, Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 215, pp. 423 ~ 435.

(18) Lee, K., 2004, “Dynamic Contact Analysis for the Valve Train Dynamics of an Internal Combustion Engine by Finite Element Techniques,” *Proc. Instn. Mech. Engrs, Part D, Journal of Automobile Engineering*, Vol. 218, pp. 353 ~ 358.

(19) Burden, R. and Faires, J. D., 1993, “Numerical Analysis,” PWS Publishing Company, Boston.

(20) Crisfield M. A., 1997, “Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures,” John Wiley & Sons, Chichester.