

論文

구조물의 효율적인 해석을 위한 모델 축소기법 연구

박영창* · 황재혁**

A Model Reduction Method for Effective Analysis of Structures

Young-Chang Park and Jai-Hyuk Hwang

ABSTRACT

Substructure coupling or component mode synthesis may be employed in the solution of dynamic problems for large, flexible structures. The model is partitioned into several subdomains, and a generalized Craig-Bampton representation is derived. In this paper the mode sets(normal modes, constraint modes) is employed for model reduction. A generalized model reduction procedure is described. Various reduction methods that use constraint modes is described in detail. As examples, a flexible structure and a 10 DOF damped system are analyzed. Comparison with a conventional reduction method based on a complete model is made via eigenpair and dynamic responses.

Key Words : component mode synthesis(구성품 모드 합성), constraint mode(구속조건 모드), model reduction(모델 축소), substructure coupling(부분구조물 결합)

1. 서 론

완성된 구조물은 일반적으로 매우 복잡하여 적절한 형태로 전체 구조물을 유한요소 모델로 조합하는 것은 어려운 것이 사실이다. 또한 전체 구조물의 유한요소 모델은 큰 자유도를 갖음에 따라 유한요소 방정식에 기초한 동역학적인 해석을 수행하는데 어려울 경우가 발생할 수 있다. 이러한 이유로 전체 구조물을 근사적인 수학적 모델로 개발하여 구성품 또는 부분 구조물로 분할하여 구조물 해석에 이용하는 방법들이 개발되었다. 이런 방법들을 구성품 모드 합성법 또는 부분 구조물 결합 방법이라고 부른다[1]. 구성품 모드 합성법은 모드를 이용한 축소 기법으로 Craig - Bampton[2] 방법이 가장 많이 사용되고

있다. 이 방법은 Guyan[3] 방법을 개선한 것으로 Guyan은 정적인 구조물의 해석을 위하여 질량과 강성 행렬을 축소시키는 방법을 제안하였다. Guyan이 제안한 방법은 여러 문헌에서 새로운 기법을 연구하는 기초가 되었으며 정적인 상태에서는 매우 정확함이 입증되었다. 이 후로는 구성품 모드 합성법에서 제안한 모드를 이용하여 모델을 축소시키는 방법이 연구되었으며 원래의 모델에 최대한 정확한 축소 모델을 제안하는 방법이 제시되었다[4-10].

본 논문은 모델 축소 기법에 대한 이론적인 해석을 통해서 구조물 사이의 특성을 이용한 축소 기법을 연구하여 그 적용 방안을 제시하였다. 사용한 방법은 고유 모드를 이용한 축소 방법과 고유 모드와 구속조건 모드를 합성한 방법을 이용하였으며 각 시스템의 고유치 및 응답 특성을 비교하였다. 해석에 이용한 모델은 두 종류이며, 첫 번째는 힌지로 연결된 유연한 구조물의 고유치를 비교하였으며, 두 번째는 10자유도 모델 각각 3, 5, 7 자유도로 축소하였을 때 주파수 응답 특성을 비교하였다.

* 한국항공대학교 대학원/국방품질관리연구소 책임연구원

E-mail : morecomo@yahoo.co.kr

** 한국항공대학교 항공우주 및 기계공학부

2. 부분구조물의 특성을 이용한 모델 축소기법

2.1 구성품 모드 합성법

Fig. 1의 외팔보를 두 개의 구성품 α, β 로 나누고 구성품의 물리적 좌표 p 를 결합된 좌표 J (변위는 x_j)와 내부 좌표 I (변위는 x_i)로 분할하면 구성품에 대한 비감쇠 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_{ii} & m_{ij} \\ m_{ji} & m_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (1)$$

실제좌표 x 를 구성품의 일반좌표 p 를 이용하여 다음과 같이 좌표 변환을 한다.

$$x = \Psi p \quad (2)$$

여기서 Ψ 는 사전에 선정된 구성품 모드 행렬이며 일반적으로 강체 모드, 고유 모드, 구속조건 모드 및 어태치먼트(Attachment) 모드 등이 사용된다.

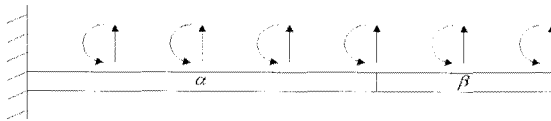


Fig. 1a Coupled structure

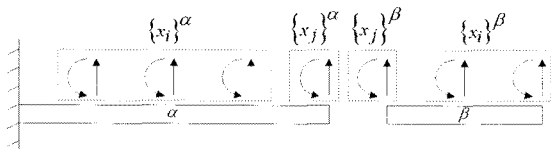


Fig. 1b Substructure physical coordinates

2.2 부분 구조물의 결합 절차

여러 가지 모드를 이용하여 구성품의 운동방정식을 구한 후 구성품을 합성하여 원래의 시스템과 유사하도록 합성하는 방법이다. 일반좌표계를 사용하여 Fig. 1과 같은 구조물의 운동방정식을

기술하기 위해, 라그랑즈 방정식을 이용한다. 그에 따라 운동에너지, 위치에너지 및 구속조건식이 필요하다. 먼저 라그랑즈 함수 유도에 필요한 변수를 정의하면 다음과 같다.

$$x = \begin{Bmatrix} x^\alpha \\ x^\beta \end{Bmatrix} \quad (2a)$$

$$m = \begin{bmatrix} m^\alpha & 0 \\ 0 & m^\beta \end{bmatrix} \quad (2b)$$

$$k = \begin{bmatrix} k^\alpha & 0 \\ 0 & k^\beta \end{bmatrix} \quad (2c)$$

$$f = \begin{Bmatrix} f^\alpha \\ f^\beta \end{Bmatrix} \quad (2d)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi^\alpha & 0 \\ 0 & \Phi^\beta \end{bmatrix} \quad (2e)$$

$$p = \begin{Bmatrix} p^\alpha \\ p^\beta \end{Bmatrix} \quad (2f)$$

시스템의 운동에너지와 위치에너지 식은 다음과 같으며 부분 구조물 좌표 p 는 독립적이지 않다.

$$T = \frac{1}{2} \dot{x}^T m \dot{x} = \frac{1}{2} \dot{p}^T \mu \dot{p} \quad (3a)$$

$$U = \frac{1}{2} x^T k x = \frac{1}{2} p^T \kappa p \quad (3b)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu^\alpha & 0 \\ 0 & \mu^\beta \end{bmatrix} = \Phi^T m \Phi \quad (4a)$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa^\alpha & 0 \\ 0 & \kappa^\beta \end{bmatrix} = \Phi^T k \Phi \quad (4b)$$

공유영역에서 변위와 구속조건 방정식은 다음과 같다.

$$x_j^\alpha = x_j^\beta \quad (5)$$

$$Bp = 0 \tag{6}$$

공유영역에서 힘에 대한 평형방정식은 식(7)과 같으며 p의 항으로 쓰면 식(8)과 같다.

$$f_j + f_j^a = 0 \tag{7}$$

$$Ap = 0 \tag{8}$$

라그랑지 함수는 식 (9)와 같다.

$$L = \frac{1}{2} \dot{p}^T \mu \dot{p} - \frac{1}{2} p^T \kappa p + \eta^T Ap + \nu^T Bp \tag{9}$$

여기서 η, ν 는 Lagrange multiplier vector이다. 식 (9)를 식 (10)과 같이 정리하고 시스템의 운동 방정식을 구하면 식 (12)와 같다.

$$L = \frac{1}{2} \dot{p}^T \mu \dot{p} - \frac{1}{2} p^T \kappa p + \sigma^T Cp \tag{10}$$

여기서

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \tag{11a}$$

$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \eta \\ \nu \end{bmatrix} \tag{11b}$$

$$\mu \ddot{p} + \kappa p = \Phi^T f + C^T \sigma \tag{12}$$

구속조건은

$$Cp = 0 \tag{13}$$

식 (12), (13)을 식 (14)를 이용하여 선형변환 시키며 p를 비독립적인 좌표 p_a 와 선형적으로 독립된 좌표 p_l 로 나누면 식(13)은 식 (15)와 같다.

$$p = sq \tag{14}$$

$$[C_{dd} \ C_{dl}] \begin{Bmatrix} p_a \\ p_l \end{Bmatrix} = 0 \tag{15}$$

여기서 C_{dd} 는 C의 부 행렬이며 식 (15)는 다음

과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} p_a \\ p_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{dd}^{-1} C_{dl} \\ I_{ll} \end{bmatrix} \tag{16}$$

여기서 $q \equiv p_l$ 이다. 식 (16)의 우측을 s라 하고 식 (16)을 식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$Cs \equiv 0 \tag{17}$$

식 (12)와 (14)는 독립된 좌표 q의 항으로 다음과 같이 시스템 식을 합병시킬 수 있다.

$$M\dot{q} + kq = s^T \Phi^T f + s^T C^T \sigma \tag{18}$$

여기서

$$M = s^T \mu s \tag{19a}$$

$$k = s^T \kappa s \tag{19b}$$

식 (17)에서 $s^T C^T \equiv 0$ 임으로 식 (18)은 식 (20)과 같이 쓸 수 있다.

$$M\dot{q} + kq = s^T \Phi^T f \tag{20}$$

식 (20)은 공유영역 평형방정식을 만족함에 따라 다음과 같이 축소된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$M\dot{q} + kq = 0 \tag{21}$$

2.3 감쇠 시스템의 축소 방법

감쇠 시스템의 진동 운동방정식을 표현하면 식 (22)와 같다.

$$M\dot{x} + D\dot{x} + Kx = \widehat{B}u \tag{22}$$

여기서 M, D, K는 각각 질량행렬, 감쇠행렬 및 강성행렬 이며, x는 크기 n개의 변위 벡터, u는 크기 m개의 입력 벡터이다. 또한 \widehat{B} 는 크기 $n \times m$ 인 입력행렬이다. 식 (22)에서 비감쇠 고유치 문제를 얻고 고유해를 구하면 다음과 같다.

$$K\Phi_n = M\Phi_n \Omega \tag{23a}$$

$$\Phi_n^T K \Phi_n = \Omega = \text{diag} \{ \omega_{\ominus}^2, i = 1, 2, \dots, n \} \quad (23b)$$

$$\Phi_n^T M \Phi_n = I_{n \times n} \quad (23c)$$

$$\Phi_n^T D \Phi_n = \Xi \quad (23d)$$

여기서 Φ_n 은 질량에 정규화 된 K와 M의 정규 모드이며 Ω 는 비감쇠 고유 치의 대각행렬로 고유주파수 ω_{mi} 의 정방행렬이며 Ξ 는 모드 감쇠 행렬이다.

큰 차수의 구조물 동역학 모델의 자유도를 m과 i로 나누면 식 (22)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{mi} \\ M_{mi}^T & M_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{mm} & D_{mi} \\ D_{mi}^T & D_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{mi} \\ K_{mi}^T & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ x_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{B}_m \\ \widehat{B}_i \end{bmatrix} u \quad (24)$$

식 (24)에서 정적인 상태인 $\widehat{B}_i u = 0$ 에서 x_i 를 구하면 다음과 같다.

$$x_i(t) = -K_{ii}^{-1} K_{mi}^T x_m(t) \quad (25)$$

식 (25)을 이용하여 x를 다음과 같이 변환 축소 연산자 형태로 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} I \\ -K_{ii}^{-1} K_{mi}^T \end{bmatrix} x_m(t) = \Phi_c x_m(t) \quad (26)$$

식 (26)에서 Φ_c 는 구성품 모드 합성 이론의 구속 조건 모드를 갖는다. 식 (26)을 식 (24)의 K, D, M으로 변환시키면 다음과 같이 감소된 강성, 감쇠 및 질량 행렬을 얻게된다.

$$\overline{K} = \Phi_c^T K \Phi_c = K_{mm} - K_{mi} K_{ii}^{-1} K_{mi}^T \quad (27a)$$

$$\overline{D} = \Phi_c^T D \Phi_c \quad (27b)$$

$$\overline{M} = \Phi_c^T M \Phi_c \quad (27c)$$

최종적인 모델은 더 이상 K와 M에 대한 고차 모드의 동역학을 포함하지 않는다. 그러나 존속된 자유도 x_m 에 의해 크게 영향을 받는 저차 모드에 대한 일반적인 특성을 보존하게 된다.

식 (27)의 축소된 모델은 식 (28)을 이용하여 변환시키면 새로운 축소 모델을 얻을 수 있다.

$$x(t) = \Phi_n \eta(t) = \begin{bmatrix} \phi_m \\ \phi_i \end{bmatrix} \eta(t) \quad (28)$$

식 (28)에서 ϕ_m 과 ϕ_i 는 각각 측정된, 측정하지 않은(즉 내부) 자유도의 질량에 정규화 된 고유 벡터들의 부분이다. 식 (23)과 (28)을 이용하여 구한 새로운 축소 모델의 강성, 질량 및 감쇠 행렬은 다음과 같다.

$$\overline{K} = [\phi_m \Omega^{-1} \phi_i^T]^{-1} \quad (29a)$$

$$\overline{M} = \overline{K} \phi_m \Omega^{-2} \phi_m^T \overline{K} \quad (29b)$$

$$\overline{D} = \overline{K} \phi_m \Omega^{-1} \Xi \Omega^{-1} \phi_m^T \overline{K} \quad (29c)$$

식 (29)의 축소된 시스템 행렬은 식 (24)의 전체 고유치 스펙트럼을 측정된 것처럼 한정된 범위 내에서 Guyan 방법과 이론적으로 일치한다.

3. 해석 결과 및 토의

3.1 비감쇠 시스템의 모델 축소

Fig. 2는 힌지로 연결된 구조물 시스템으로 A와 B는 스프링으로 연결된 강체 디스크이며 주어진 질량은 Kg이고 강성은 N-m/rad 이다. 시물레이션은 각 각에 대한 운동방정식을 구한 후 전체 시스템으로 중첩하여 고유치와 고유 벡터를 구한 후 원하는 모델로 축소하여 고유치를 비교 하였으며, 시물레이션은 Matlab을 사용하여 구하였다.

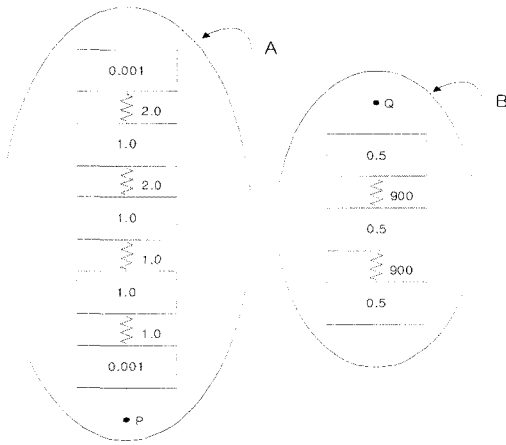


Fig. 2 Mass-spring example

(1) 운동방정식

Fig. 2의 전체 시스템에 대한 운동방정식은 다음이 쓸 수 있다.

$$M\dot{x} + Kx = F \tag{30a}$$

$$x = \Phi y \tag{30b}$$

$$I\ddot{y} + \Lambda y = \Phi^T F \tag{30c}$$

여기서 x 는 힘 함수 F 에 의한 응답, M 는 시스템 전체의 질량 행렬, K 는 시스템 전체의 강성 행렬이며, I 는 단위행렬, Λ 는 대각행렬(ω^2)을 뜻한다. 자유도 n 은 $n < n_A + n_B$ 가 된다. 식 (30)을 구조물 A와 B에 대한 운동방정식으로 나타내기 위해서는 두 번의 좌표 변환을 통해 구할 수 있으며 다음과 같다. 최종적으로 구한 구조물 A의 운동방정식은 식 (31)과 같으며 구조물 B도 동일한 운동방정식을 갖게된다.

$$I_A \ddot{v}_A + \lambda_A v_A = \zeta_A^T \Phi_A^T F_A \tag{31a}$$

$$\Psi_A = \Phi_A \zeta_A \tag{31b}$$

여기서

$$x_A = \Phi_A u_A \tag{32a}$$

$$u_A = \zeta_A v_A \tag{32b}$$

(2) 시뮬레이션 결과 및 해석

구조물 A와 B의 고유치 및 고유 벡터를 구한 결과는 다음과 같다.

$$A_A = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1001 \end{bmatrix} \tag{33a}$$

$$\Phi_A = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.4924 & 0.4472 & -0.4130 & 0.0000 \\ -0.0100 & -0.4912 & 0.4472 & -0.4127 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.6718 & 0.4472 & -0.1511 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.1799 & 0.4472 & 0.5637 & -0.0010 \\ 0.0000 & -0.1807 & 0.4472 & 0.5644 & 1.0000 \end{bmatrix} \tag{33b}$$

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1800 & 0 \\ 0 & 0 & 5400 \end{bmatrix} \tag{34a}$$

$$\Phi_B = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7071 & 0.4082 \\ 0.5774 & 0.0000 & -0.8165 \\ 0.5774 & -0.7071 & 0.4082 \end{bmatrix} \tag{34b}$$

구조물 A와 B의 총 자유도는 8이며 이를 자유도 7인 시스템으로 결합시키면 질량 및 강성 행렬은 다음과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.501 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{35a}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2.0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.0 & 4.0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.0 & 3.0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.0 & 2.0 & -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.0 & 901 & -900 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -900 & 1800 & -900 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -900 & 900 \end{bmatrix} \tag{35b}$$

결합된 원래의 시스템의 고유치와 고유 벡터는 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1799.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5398.5 \end{bmatrix} \quad (36a)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0.4845 & 0.3780 & -0.3407 & -0.4186 & 0 \\ 0.0010 & 0 & 0.4834 & 0.3780 & -0.3403 & -0.4185 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6786 & 0.3780 & 0.0554 & -0.3061 & 0 \\ 0 & -0.0004 & 0.2568 & 0.3780 & 0.7180 & 0.9830 & -0.0001 \\ 0 & 0.7069 & -0.0411 & 0.3780 & -0.2878 & -0.4276 & 0.4075 \\ 0 & -0.0003 & -0.0414 & 0.3780 & -0.2885 & 0.4278 & -0.8167 \\ 0 & -0.7073 & -0.0415 & 0.3780 & -0.2889 & 0.4279 & 0.4085 \end{bmatrix} \quad (36b)$$

식 (36b)에서 처음 3열 벡터를 이용하여 원래의 모델을 3자유도로 축소시키기 위해 ϕ_A 와 ϕ_B 를 다음과 같이 선택한다. 여기서 ϕ_A 와 ϕ_B 는 고유 모드이며 시스템 A의 축소된 질량 행렬 \bar{M}_A 와 강성 행렬 \bar{K}_A 은 다음과 같다.

$$\phi_A = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0.4845 \\ 0.0010 & 0 & 0.4834 \\ 0 & 0 & -0.6786 \\ 0 & -0.0004 & 0.2568 \\ 0 & 0.7069 & -0.0411 \end{bmatrix} \quad (37a)$$

$$\phi_B = \begin{bmatrix} 0 & 0.7069 & -0.0411 \\ 0 & -0.0003 & -0.0414 \\ 0 & -0.7073 & -0.0415 \end{bmatrix} \quad (37b)$$

$$\bar{M}_A = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005 & -0.0001 \\ 0 & -0.0001 & 0.7603 \end{bmatrix} \quad (38a)$$

$$\bar{K}_A = \begin{bmatrix} 2.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5003 & -0.2111 \\ 0 & -0.2111 & 3.6641 \end{bmatrix} \quad (38b)$$

3자유도로 축소된 모델의 고유치와 고유 벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_A = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 \\ 0 & 1000.8 & 0 \\ 0 & 0 & 4.7 \end{bmatrix} \quad (39a)$$

$$\psi_A = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0.3893 \\ 0 & -0.0001 & 0.9211 \end{bmatrix} \quad (39b)$$

식 (39a)에서 축소되기 전의 고유치인 식 (33a)와

비교할 경우 1차 및 2차 모드는 정확하게 일치함을 알 수 있었으며 5차 모드는 0.02% 정도의 오차를 보임을 알 수 있었다. 마찬가지로 B 시스템에 대하여 동일한 방법으로 구하면 축소된 질량 및 강성 행렬은 각각 다음과 같다,

$$\bar{M}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.001 \\ 0 & 0.001 & 0.0026 \end{bmatrix} \quad (40a)$$

$$\bar{K}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 899.9998 & 0.2111 \\ 0 & 0.2111 & 0.0001 \end{bmatrix} \quad (40b)$$

고유치와 고유 벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_B = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1800 \end{bmatrix} \quad (41a)$$

$$\psi_B = \begin{bmatrix} -1.0 & -1.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (41b)$$

B 시스템의 축소된 모델의 고유치는 앞에서 구한 원래 시스템의 고유치 식 (34a)와 정확하게 일치함을 볼 수 있다.

다음은 고유 모드와 구속조건 모드를 합성하여 고유치를 구한 결과이다. 구속조건 모드는 다음과 같다.

$$\Phi_{con} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

고유 모드와 구속조건 모드의 차원을 3x5로 구성하기 위해 사용된 새로운 모드는 다음과 같다.

$$\bar{\Phi}_{conA} = \begin{bmatrix} 1.0000 & -0.4924 & 1.0000 \\ -0.0100 & -0.4912 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.6718 & 1.0000 \\ 0.0000 & -0.1799 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (43)$$

이 모드를 이용하여 앞에서 구한 방법과 동일하게 축소된 A시스템의 새로운 질량 및 강성 행렬을 구한 후 이것을 이용하여 고유치와 고유 벡터를 구한 결과는 다음과 같다.

$$\bar{\lambda}_{conA} = \begin{bmatrix} 2002 & 0 & 0 \\ 0 & 4.80 & \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44a)$$

$$\bar{\psi}_{conA} = \begin{bmatrix} -1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & -0.0001 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (44b)$$

식 (44a)에서 전체 시스템의 고유치인 식 (35a)의 1차 및 3차 모드 고유치와 정확하게 일치함을 볼 수 있다. 마찬가지로 B 시스템에 대해서도 동일한 방법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\bar{\Phi}_{conB} = \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.7071 & 1.0000 \\ 0.5774 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (45)$$

고유치와 고유 벡터를 구하면 다음과 같다.

$$\bar{\lambda}_{conB} = \begin{bmatrix} 5400 & 0 & 0 \\ 0 & 1800 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46a)$$

$$\bar{\psi}_{conB} = \begin{bmatrix} -0.7661 & 0.7071 & 0 \\ 0.6255 & 0.5774 & 0 \\ 0.1474 & -0.4082 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (46b)$$

식 (46a)에서 고유치는 전체 시스템의 2차 및 7차 모드의 고유치와 거의 오차가 없음을 볼 수 있다.

3.2 감쇠 시스템의 모델 축소

다음은 Fig. 3과 같은 시스템을 2개 연결한 10 자유도 모델을 각각 3, 5, 7 자유도로 축소하였을 때 주파수 응답 특성을 비교하였다.

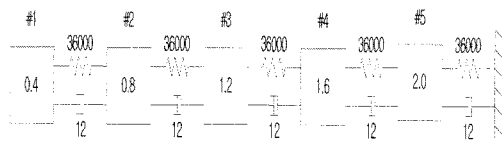


Fig. 3 Mass-damping-stiffness example

Fig. 4, 5, 6은 10자유도 시스템을 고유 모드를 이용하여 축소하였을 때와 고유 모드와 구속조건 모드를 이용하여 각각 3, 5, 7자유도로 축소하였

을 때 주파수 응답 특성을 비교한 것이다. 그림에서 첫 번째 모드에서는 매우 일치함을 볼 수 있었으며 구속조건 모드를 이용한 경우가 고유 모드를 이용한 것 보다 원래 모델의 응답 특성에 근사적으로 접근함을 볼 수 있었다.

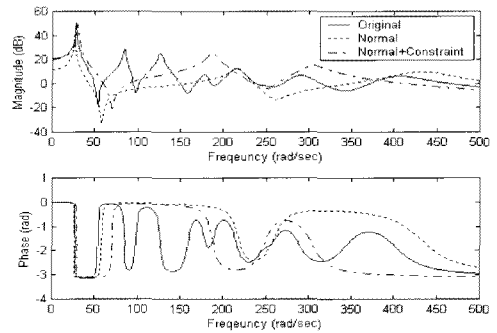


Fig. 4 Comparison of frequency response (3 DOF reduced model)

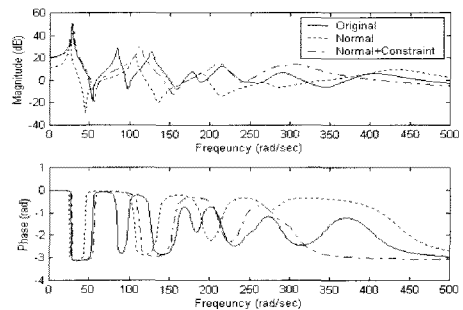


Fig. 5 Comparison of frequency response (5 DOF reduced model)

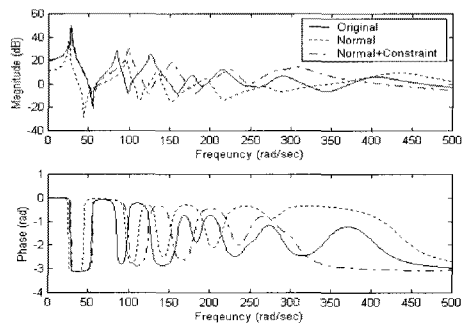


Fig. 6 Comparison of frequency response (7 DOF reduced model)

4. 결 론

본 논문에서는 구조물을 효율적으로 해석하기 위한 모델 축소 기법을 연구하였다. 모델 축소 방법은 유연한 구조물이나 대형 구조물의 해석 시 유용하게 사용할 수 있으며, 복잡한 구조물을 단순화하여 원래 모델과 매우 유사한 진동특성을 갖는 모델로 변환시킬 때 매우 유용하다. 특히 모드를 이용한 축소 방법은 고유치 뿐 만 아니라 주파수 응답 특성도 매우 잘 일치함을 볼 수 있었다.

고유 모드를 이용하여 해석한 결과 원래 시스템의 고유치와 매우 잘 일치함을 볼 수 있었으며 축소된 모델은 원래 모델의 고유치 오차 범위 내에 있음을 알았다. 또한 구속조건 모드를 사용하였을 때도 원래 모델의 특성과 잘 일치함을 알 수 있었으며 주파수 응답도 원래 모델과 유사함을 알 수 있었다.

이와 같이 본 논문에서 제안한 축소 기법을 이용할 경우 유연한 구조물이나 대형구조물의 동적 해석에 유용하게 사용될 수 있다고 판단하며, 아울러 인공위성이나 항공기와 같은 구조물에도 적용이 가능하여 진동 제어에 유용한 단순한 모델을 얻는데 활용될 수 있을 것이라고 판단된다.

참 고 문 헌

[1] R. R. Craig, Jr., "Method of Component Mode Synthesis," Shock and Vib. Digest, Naval Research Lab., Washington, DC, vol. 9, 1977,

pp. 3-10.

[2] R. R. Craig, Jr. and M. C. C. Bampton, "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis," AIAA J., vol. 6, 1968, pp. 1313-1319.

[3] R. J. Guyan, "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," AIAA J., vol. 3, 1965, p.380.

[4] R. H. MacNeal, "A Hybrid Method of Component Mode Synthesis," Comp. and Struct., vol. 1, 1971, pp. 581-601.

[5] R. R. Craig, Jr. and C-J. Chang, "On the Use of Attachment Modes in Substructure Coupling for Dynamic Analysis," AIAA/ASME 18th, San Diego, 1977, pp. 89-97.

[6] R. R. Craig, Jr. and C-J. Chang, "A Review of Substructure Coupling Methods for Dynamic Analysis," NASA CP-2001, Washington, DC, vol. 2. 1976, pp. 393-408.

[7] Robert Morris Hintz, "Analytical Methods in Component Modal Synthesis," AIAA J., vol.13, 1975, pp. 1007-1016.

[8] W. C. Hurty, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes," AIAA J., vol. 3, 1965, pp. 678-685.

[9] Xiaojian Liu. and Junjiro Onoda, "Partitioned Model Reduction for Large Space Structural Control Problem," AIAA J., vol. 34, 1996, pp. 2149-2151.

[10] K. F. Alvin, K. C. Park, and L. D. Peterson, "A Consistent Model Reduction of Measured Modal Parameters for Reduced-Order Active Control," AIAA, 1993, pp. 644-650.