

3차원 비선형 정자장 문제의 유한요소 해석을 위한 적응 요소분할 기법

論 文
55B-6-4

An Adaptive Mesh Refinement Scheme for 3D Non-Linear Finite Element Analysis of Magnetostatic Problems

崔容權** · 柳在燮* · 高彰燮†
(Yong-Kwon Choi · Ryu-Jae Seop · Chang-Seop Koh)

Abstract - A three dimensional adaptive finite element refinement algorithm is developed for non-linear magnetostatic field problems. In the method, the edge elements are used for finite element formulation, and the local error in each element is estimated from the fact that the tangential components of magnetic field intensity and the normal components of magnetic flux density should be continuous at the interface of the two adjacent elements. Based on the estimated error, the elements which have big error are divided into several elements using bisection method. The effectiveness of the developed algorithm is proved through numerical examples.

Key Words : 3차원 적응유한요소법, 변요소, 오차추정, 이분법

1. 서 론

유한요소법을 이용한 전기기기의 자계분포 및 특성해석에서 요소분할은 지배방정식의 정식화 방법과 더불어 해석 결과의 정확도에 많은 영향을 미친다. 정자계 문제의 지배방정식은 주로 자기 벡터 포텐셜(Magnetic vector potential)을 이용하여 표현되고, 유한요소법의 특성상 한 요소 내에서의 포텐셜의 분포는 대개의 경우 1차 또는 2차의 간단한 함수로 근사화되기 때문에, 정확한 해석 결과를 얻기 위해서는 포텐셜의 변화가 클 것으로 예상되는 영역을 미리 예측하고, 그 부분의 요소를 조밀하게 요소 분할하여야 한다. 그러나 유한요소법을 이용한 실제 모델의 해석에서는, 특히 3차원 형상을 가진 모델을 해석하는 경우에는 포텐셜의 변화가 큰 부분을 정확히 예측하기가 쉽지 않고, 조밀한 요소분할 또한 어렵다. 이러한 문제점을 해결하고, 상대적으로 적은 수의 요소 분할로 정확한 해석 결과를 얻기 위하여 2차원 문제를 위주로 적용 요소분할 기법이 개발되어 널리 이용되고 있고, 최근에는 상용 프로그램에도 적용이 되어 널리 이용되고 있는 실정으로 그 유용성이 이미 인정되고 있다[1-6].

일반적으로 적응 유한요소법의 전체적인 적용 과정은 크게 유한요소법을 이용한 특성해석, 각 요소의 부분오차(local error) 추정, 오차가 큰 요소의 세분(refinement)으로 구성되며, 다음과 같이 요약된다.

- i) 초기 요소망에 대하여 유한요소법을 적용하고 포텐셜 및 자속밀도의 분포를 계산한다.
- ii) 계산된 포텐셜 및 자속밀도 등을 이용하여 해석하고자 하는 특성을 계산하고, 각 요소에서의 부분 오차(local error)를 추정한다.
- iii) 모든 요소에서의 부분오차가 원하는 수준 이하로 작게 유지되면, 충분히 정확한 해석이 이루어진 것으로 간주하고 계산을 종료한다. 경우에 따라서는 해석하고자 하는 특성의 변화추이로부터 충분히 정확한 해석이 이루어졌는지의 여부를 판단하여 계산을 종료한다.
- iv) 모든 요소에서의 부분오차가 원하는 수준보다 크거나, 또는 해석하고자 하는 특성이 수렴하지 않은 경우에는, 상대적으로 오차가 큰 요소를 선별하고, 오차가 큰 요소는 그 오차의 크기에 따라 몇 개의 요소로 세분하여 새로운 요소망을 생성한다.
- v) 새로운 요소망에 대하여 유한요소법을 적용하고, 위의 과정 ii) - iv)를 반복한다.

적용 요소분할 기법을 도입하는 이유가 유한요소 해석 결과 오차가 큰 부분만을 조밀하게 요소 분할하여 정확한 해석이 가능하도록 한다는 점을 감안하면, 위 과정에서 가장 중요한 부분은 각 요소별 부분 오차를 추정 방법과 오차가 큰 요소의 세분 방법이라고 할 것이다. 3차원 유한요소법을 적용하는 경우, 이에 대한 기존의 연구를 보면 스칼라 포텐셜을 미지수로 하고 절점요소(Nodal element)를 이용하는 정전계 문제의 경우에는 요소별 부분 오차의 추정 방법과 요소세분에 대한 방법이 비교적 소상히 연구되었다 [1-6]. 그러나 오늘날 자계문제의 해석을 위하여 세계적으로 가장 널리 이용되는 벡터 자기 포텐셜과 변요소(Edge element)를 이용한 3차원 해석의 경우에 대해서는 아직까지 연구가 미미한 실정이다.

† 교신저자, 正會員 : 忠北大學校 電氣電子컴퓨터工學部 敎授
E-mail : kohcs@chungbuk.ac.kr
* 正會員 : LS산전, 電力研究所
** 學生會員 : 忠北大學校 大學院 電氣工學科
接受日字 : 2006年 4月 6日
最終完了 : 2006年 5月 6日

본 논문에서는 벡터 자기 포텐셜과 변요소를 이용한 3차원 유한요소법에 적용할 수 있도록 각 요소의 부분 오차 추정법을 제안하고, 이분법을 이용한 적응 요소 분할기법을 제시하고 사례연구를 통하여 그 유용성을 확인하였다.

2. 변 요소를 이용한 적응 유한요소법

2.1 변 요소를 이용한 유한요소 정식화

외부에서 인가되는 전류와 영구자석을 포함하는 비선형 자계문제의 지배방정식은 Maxwell 방정식으로부터 다음과 같이 유도된다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A} - \vec{B}_r) = \vec{J} \quad (1)$$

여기서 μ 는 매질의 투자율(magnetic permeability), \vec{B}_r 은 영구자석의 잔류자속밀도(residual magnetic flux density), \vec{J} 은 외부 인가 전류밀도, 그리고 \vec{A} 는 자기벡터 포텐셜(magnetic vector potential)이다. 변 요소를 이용한 3차원 유한요소 해석에서, 사면체 요소를 이용하면 요소 (e) 내의 임의의 점에서의 자기 벡터 포텐셜 $A^{(e)}$ 는 벡터 보간 함수 \vec{N}_i 를 이용하여 다음 식으로 표현되어진다.

$$\vec{A}^{(e)} = \sum_{i=1}^6 \vec{N}_i A_i \quad (2)$$

여기서, A_i 는 요소 (e)의 i 번 변에서 다음과 같이 정의되고

$$A_i = \int_{i \text{ th Edge}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

\vec{N}_i 는 그 변에서 정의되는 벡터 보간 함수이다 [7].

지배방정식에 Galerkin 근사화를 적용하면 다음식이 구해지고,

$$G_i = \int_{\Omega} \vec{N}_i \cdot \left\{ \nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A} - \vec{B}_r) - \vec{J} \right\} dv = 0 \quad i=1,2,\dots,N \quad (4)$$

여기서 N 은 전체 변의 수이다. 여기에 식 (2)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} G_i &= \sum_e G_i^{(e)} \\ &= \sum_e \left(\sum_{i=1}^6 v^{(e)} \cdot K_{ii}^{(e)} \cdot A_i^{(e)} - F_{ji}^{(e)} - F_{Mi}^{(e)} \right) \\ &= 0, \quad i=1,2,\dots,N \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 각각의 계수는 다음과 같이 정의된다.

$$K_{ii}^{(e)} = \int_{\Omega_e} (\nabla \times \vec{N}_i) \cdot (\nabla \times \vec{N}_i) dv \quad (6)$$

$$F_{ji}^{(e)} = \int \vec{N}_i \cdot \vec{J} dv \quad (7)$$

$$F_{Mi}^{(e)} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega_e} (\nabla \times \vec{N}_i) \cdot \vec{B}_r dv \quad (8)$$

여기서 $v^{(e)}$ 는 요소 (e)에서의 자기 저항률이다.

매질의 비선형성을 고려하기 위하여 Newton-Raphson법을 식 (5)에 적용하면, ($k+1$)회 반복계산에서 미지 변수 벡터 포텐셜은 다음과 같이 구해진다.

$$[A]^{(k+1)} = [A]^{(k)} + [\delta A]^{(k)} \quad (9)$$

$$[\delta A]^{(k)} = - \left[\frac{\partial G_i}{\partial [A]} \right]^{-1} [G_i]^{(k)}, \quad i=1,2,\dots,N \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial G_i}{\partial [A]} \right] = \sum_e \left[\frac{\partial G_i^{(e)}}{\partial [A]} \right] \quad (11)$$

식 (11)의 우변은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i^{(e)}}{\partial A_i} &= v^{(e)} K_{ii}^{(e)} \delta_i^{(e)} \delta_i^{(e)} \\ &+ \frac{\partial v^{(e)}}{\partial A_i} \sum_{k=1}^6 K_{ki}^{(e)} \cdot A_k^{(e)} \delta_i^{(e)} \delta_k^{(e)} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 각각의 계수는 다음과 같다.

$$K_{ii}^{(e)} = \int_{\Omega_e} (\nabla \times \vec{N}_i) \cdot (\nabla \times \vec{N}_i) dv \quad (13)$$

$$\frac{\partial v^{(e)}}{\partial A_i} = \frac{\partial v^{(e)}}{\partial B_{(e)}^2} \cdot \frac{\partial B_{(e)}^2}{\partial A_i} \quad (14)$$

$$\frac{\partial B_{(e)}^2}{\partial A_i} = 2 \sum_{k=1}^6 K_{ik} \cdot A_k \quad (15)$$

여기서, $v^{(e)}$ 는 자속밀도의 함수로 $v^{(e)} = f(B^2)$ 로 표현이 되 어지며, $B_{(e)}$ 는 요소 (e)에서의 자속밀도이고, $\delta_i^{(e)}$ 와 $\delta_k^{(e)}$ 는 각각 요소 (e)에 i 번 변과 k 번 변이 포함되는 경우에 1의 값을 갖고, 그 외의 경우에는 0을 갖는 함수이다.

식 (9)와 식 (10)의 과정을 반복하면 수렴된 벡터 포텐셜 분포를 구할 수 있으며, ($i+1$)회 반복과정에서 비선형 해석의 수렴 판단 기준은 다음과 같다.

$$\text{Max}_{1 \leq i \leq M} \left(\frac{|\vec{B}|_i - |\vec{B}|_{i+1}}{|\vec{B}|_i} \right) < 0.05\% \quad (16)$$

여기서, M 은 전체 요소수이고 첨자 i 와 ($i+1$)은 모두 반복 횟수를 나타낸다.

2.2 오차 추정

정자계의 연속조건에 의하면, 그림 1과 같이 요소 e_1 과 e_2 의 경계면 S 에서 다음의 연속조건을 만족해야 한다[1].

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (17)$$

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (18)$$

여기서 B_n 과 H_t 는 각각 경계면에서 자속밀도의 법선 방향 성분과 자계의 세기의 접선 방향 성분을 나타낸다. 지금 요소 (e)을 구성하는 네 개의 절점을 각각 m, n, o, p 라고 하고, 변 mn 과 op 가 각각 절점 (m, n)과 (j, k)로 구성된다고 하

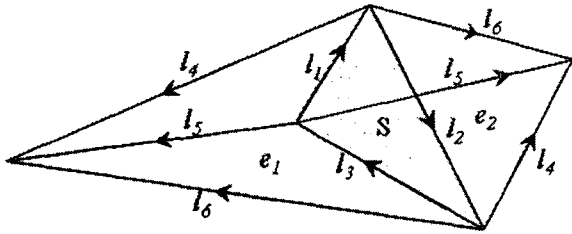


그림 1. 경계 S를 갖는 인접 요소 e_1 과 e_2
 Fig. 1 Adjacent elements e_1 and e_2 having interface S.

면, 형상함수 \vec{N}_i 은 다음과 같이 Lagrange 보간함수를 이용하여 정의된다.

$$\begin{aligned} \vec{N}_i &= \lambda_m \nabla \lambda_n - \lambda_n \nabla \lambda_m \\ &= (\vec{N}_i)_x \hat{x} + (\vec{N}_i)_y \hat{y} + (\vec{N}_i)_z \hat{z} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서, $(\cdot)_k$ 는 벡터의 k 성분을 의미하며, λ_m 과 λ_n 은 각각 절점 m 과 n 에서의 스칼라 형상함수로, 절점 m 에서의 스칼라 형상함수 λ_m 은 다음과 같이 정의된다 [7].

$$\begin{aligned} \lambda_m &= (a_m + b_m x + c_m y + d_m z) / 6V_e \\ a_m &= (-1)^m [x_n(y_p z_o - y_o z_p) + x_o(y_n z_p - y_p z_n) \\ &\quad + x_p(y_p z_p - y_n z_o)] \\ b_m &= (-1)^m [y_n(z_o - z_p) + y_o(z_p - z_n) + y_p(z_n - z_o)] \\ c_m &= (-1)^m [z_n(x_o - x_p) + z_o(x_p - x_n) + z_p(x_n - x_o)] \\ d_m &= (-1)^m [x_n(y_o - y_p) + x_o(y_p - y_n) + x_p(y_n - y_o)] \end{aligned}$$

여기서 V_e 는 요소 (e)의 체적이다. 경계면 S에서 B의 법선 방향 성분은 경계면에서의 A의 접선방향 성분만으로 표현되기 때문에, 경계면 S를 구성하는 3개 변(l_1, l_2, l_3)에서 각각 식 (3)과 식 (19)으로 정의된 포텐셜과 형상함수만으로 계산된다. 따라서 경계면 S에서 B의 법선방향 성분의 연속조건식 (17)은 해석 결과의 정확도에 상관없이 항상 자동으로 만족된다. 그러나 경계면 S에서 H의 접선방향 성분은 경계면 S를 구성하는 3개의 변(l_1, l_2, l_3)뿐만 아니라 나머지 변에서 정의된 포텐셜과 형상함수로 표현된다. 따라서 경계면 S를 요소 e_1 의 경계로 간주하고 계산한 H의 접선성분과, 경계면 S를 요소 e_2 의 경계로 간주하여 계산한 H의 접선성분은 해석 결과에 따라 달라질 수 있게 된다[2, 3]. 이는 유한요소해석의 결과가 부정확하기 때문에 발생하는 것으로, 이를 이용하여 요소 e_1 과 e_2 의 경계면 S에서의 부분 오차를 다음과 같이 추정한다.

$$\epsilon_{e_i}^S = \int_S (|H_i - \bar{H}_i| + |H_\tau - \bar{H}_\tau|) ds \quad (20)$$

여기서, l 와 τ 는 각각 경계면 S의 두 접선방향 성분을 의미하며, \bar{H}_l 와 \bar{H}_τ 는 모두 경계면 S에서 H의 접선성분의 참

값으로, 요소 e_1 과 요소 e_2 에서 계산된 값 사이에 존재하는 것으로 가정하여 다음과 같이 추정한다.

$$\bar{H}_l = \theta H_{1l} + (1 - \theta) H_{2l} \quad (21)$$

$$\bar{H}_\tau = \theta H_{1\tau} + (1 - \theta) H_{2\tau} \quad (22)$$

여기서, 첨자 1, 2는 각각 요소 e_1 과 요소 e_2 에서의 값을 나타내며, θ 는 두 요소의 형상과 투자율을 고려하여 다음과 같이 정의하였다.

$$\theta = \frac{\mu_1}{d_1} / \left(\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right) \quad (23)$$

여기서, d_i 는 i 번 요소의 중심에서 경계면까지의 거리를 나타낸다. 이를 이용하여 사면체 요소 e 에서의 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon_e = \sum_{i=1}^4 \epsilon_e^S \quad (24)$$

2.3 요소 세분 (Mesh refinement)

위에서 추정된 오차를 기준으로 상대적으로 큰 오차를 갖는 요소는 오차의 크기에 따라 세분된다. 본 논문에서는 전체 요소에서의 평균 오차와 표준편차를 각각 ϵ_m 과 σ 라 할 때, e 번 요소의 오차 ϵ_e 가 $\epsilon_m + 2\sigma \leq \epsilon_e < \epsilon_m + 3\sigma$ 인 경우에는 1개의 변을, $\epsilon_m + 3\sigma \leq \epsilon_e < \epsilon_m + 4\sigma$ 인 경우에는 2개의 변을, 그리고 $\epsilon_e \leq \epsilon_m + 4\sigma$ 인 경우에는 3개의 변을 이분하도록 하였다. 요소를 세분하는 방법으로는 이분법(Bisection method)을 사용하였다. 이분법은 요소를 구성하는 변들 중에서 길이가 가장 긴 변을 이분하는 것으로 하고, 이 변을 포함하지 않는 두 절점과 이분되는 변의 중점에 발생된 새로운 점으로 구성되는 면을 새로 발생시켜 두 개의 요소로 분할하는 것이다 [1-4]. 이분법에 의하여 발생된 새로운 요소망은 초기 요소망의 질이 양호한 경우에는 요소 세분의 과정을 반복하여도 요소망의 질이 크게 저하되지 않고, 또한 계산시간이 많이 단축되는 장점을 갖는다[1-4]. 그림 2는 이분법을 이용하여 하나의 사면체 요소를 4개의 요소로 세분하는 경우, 즉, 요소를 구성하는 6개의 변 중에서 길이가 긴 3개의 변(l_1, l_2, l_3)이 이분되는 경우를 나타내고 있다. 그림에서 보듯이 세분되어 새로 생성되는 요소들의 질을 양호하게 하기 위하여 항상 길이가 가장 긴 변을 이분하게 된다. 또한 세분되어 새로 생성된 요소에 대하여도 (예를 들면 그림 2의 Element 2부터 Element 7까지) 이분되어질 변이 남아있는 경우에는 동일한 과정으로 다시 세분하였다. 즉, 한 요소를 구성하는 6개의 변 중에서 길이가 가장 긴 변을 이분함으로써 두개의 요소로 세분하는 과정을 더 이상 분할해야 할 변이 없을 때 까지 반복함으로써 새로운 요소망을 형성하였다. 다만, 일단 한번 분할된 변은 비록 그 길이가 새로 분할될 다른 변의 길이보다 긴 경우에도 다시 분할하지 않았다. 이러한 경우는 하나의 요소를 구성하는 어떤 변의 길이가 다른 변의 길이의 2배 이상이 되는 경우로 초기 요소망의 질이 적절히 양호한 경우에는 발생되지 않는다.

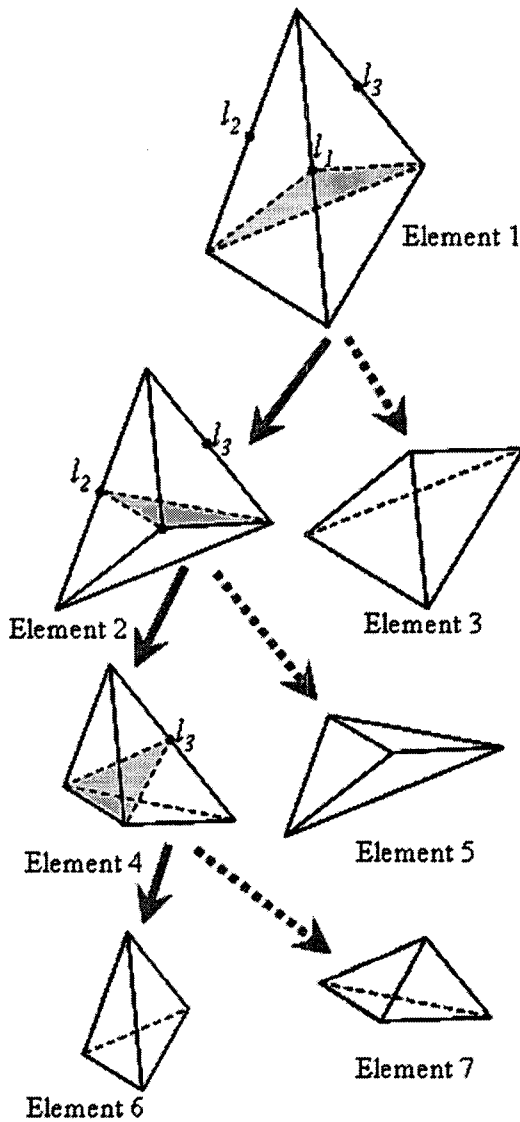


그림 2. 이분법에 의한 요소 세분 과정
 Fig. 2 Mesh refinement using Bi-section method

한편 오차가 상대적으로 작아 세분될 필요가 없는 요소의 경우에도, 이웃한 요소가 세분되는 과정에서 공유하는 변이 이분됨으로 인하여 세분되는 경우가 발생할 수 있는데, 이 경우에도 길이가 가장 긴 변부터 차례로 이분함으로써 새로운 요소망의 질이 양호하게 유지되도록 하였다. 예를 들면, 인접한 요소의 6개 변 중에서 4번째로 긴 변이 이웃 요소의 세분과정에서 분할되는 경우, 단순히 해당 변 (4번째로 길이가 긴 변)을 이분하여 2개의 요소로 세분하지 않고, 그림 2의 요소세분 절차에 따라 길이가 가장 긴 변부터 해당 변 (4번째로 길이가 긴 변)까지의 모든 변을 차례로 이분하여 요소를 세분하였다.

3. 적용 사례

3.1 구형 자성체에 의한 균등자계의 변화

제안된 알고리즘을 1[T]의 균등한 자계 내에 구형 자성체가 있는 경우의 3차원 정자장 문제의 해석에 적용하였다. 자

성체의 비투자율은 1,000으로 하였으며, 초기 요소망은 그림 3 (a)에 나타난 것과 같이 11개의 사면체 요소로 구성되어 있다.

본 모델의 경우, 매질의 경계면이 구면의 형상을 하고 있기 때문에 요소의 세분과정에서 새로운 절점이 그림 2와 같이 변의 중점에 발생되면 경계면의 형상을 적절히 표현하지 못하게 된다. 따라서 본 논문에서는 경계면의 형상이 평면인 경우, 구형인 경우 그리고 원통형인 경우로 구분하고, 형상이 구형 또는 원통형인 경우에는 그 경계면에 존재하는 각각의 변에 대하여 중심점의 좌표와 반경을 기억함으로써, 새로운 절점이 생성될 때 변의 중점이 아니라 해당 구면 또는 원통면에 새로운 절점이 발생되도록 하였다. 이러한 과정을 통하여 요소가 세분됨에 따라 새로 발생하는 절점들이 매질의 경계면에 위치하게 되고, 따라서 매질의 경계면은 더욱 정밀하게 묘사된다.

오차 추정과 요소 세분의 과정을 반복함에 따라 요소수가 점차로 증가하여, 적응 요소 분할 과정을 6회 반복한 후 그림 3 (b)에 나타난 51,297개의 요소가 얻어졌다. 그림 4는 적응 요소분할을 6회 반복한 후 해석된 자계의 분포를 나타내고 있다. 표 1은 적응 요소분할 과정을 반복함에 따라 요소 수의 증가와 요소들 중에서 가장 질이 나쁜 요소의 질의 변화를 나타낸 것이다. 요소의 질은 정 사면체의 경우 그 질이 가장 좋은 것으로 하고, 요소의 각 절점에서 계산한 입체각들 중에서 가장 작은 입체각이 클수록 요소의 질이 양호한 것으로 하였다[4]. 표에서 알 수 있듯이, 전체 요소 중

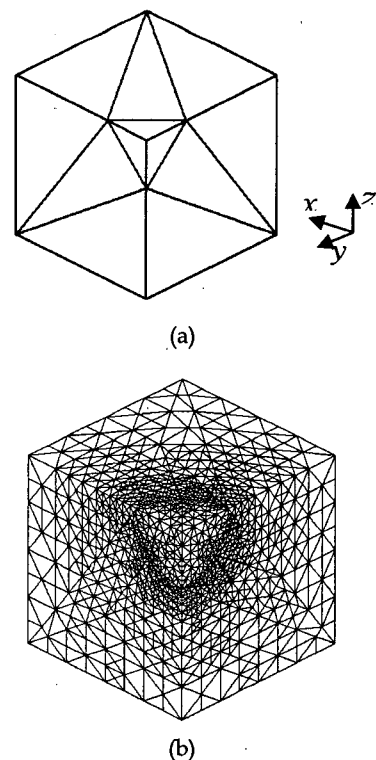


그림 3. 초기 요소망과 세분된 요소망, (a) 초기요소망, (b) 세분된 요소망

Fig. 3 Initial and refined grids

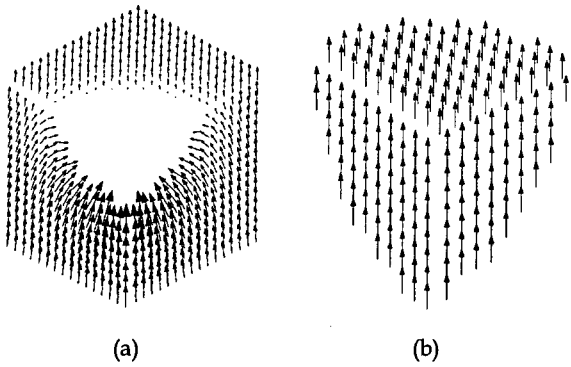


그림 4. 최종 요소망에서 해석한 자계분포, (a) 자성체 외부, (b) 자성체 내부

Fig. 4 Magnetic field distribution at the final grid, (a) outside the magnetic material, (b) inside the magnetic material

표 1. 요소 세분 결과

Table 1. Result of mesh refinement

Iterations	Elements	Minimum solid angle	Relative solid angle
0	11	0.0636	1.0
1	78	0.0553	0.87
2	209	0.0409	0.64
3	846	0.0409	0.64
4	3898	0.0409	0.64
5	15501	0.0409	0.64
6	51297	0.0373	0.59

에서 가장 질이 나쁜 요소의 질이 요소세분을 반복함에 따라 다소 나빠짐을 알 수 있다. 그러나 전체적으로는 요소의 수가 50,000개를 넘는 경우에도 초기 요소망에 비하여 요소망의 질이 크게 나빠지지 않음을 알 수 있으며, 이것은 참고 문헌 [4]의 결과와 비교하여 비슷한 수준이다. 또한 이 결과는 구형인 매질의 경계면에 위치한 요소가 세분되는 경우, 앞서 설명한 바와 같이 새로운 절점이 변의 중심에 발생되지 않고 구면에 발생되기 때문에, 정상적인 이분법에 의하여 세분되는 요소에 비하여 요소의 질이 떨어지게 됨을 감안하면 전체적으로는 요소의 질이 크게 나빠지지 않음을 알 수 있다.

그러나 이러한 요소세분의 과정을 계속하여 반복하는 과정에서 매질의 경계면에 이웃한 요소들이 계속하여 세분되는 경우에는, 새로 발생하는 절점이 이미 형성되어 있는 인접 요소를 침범하는 경우가 발생하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 이미 발생된 절점들의 위치를 조정하여 새로운 요소망을 형성하거나, 또는 발생된 전체 절점들을 대상으로 Delaunay법 등을 이용하여 새로운 요소망을 형성해야 하며, 이 과정은 적용 요소분할의 범위를 넘어서 자동 요소분할에 관한 내용으로 귀착된다. 본 논문에서는 상용 프로그램 등 기존의 자동요소분할 프로그램을 이용하여 충분히 양호한 초기 요소망이 제공되는 경우를 가정하여 이러한 문제점은 고려하지 않았다.

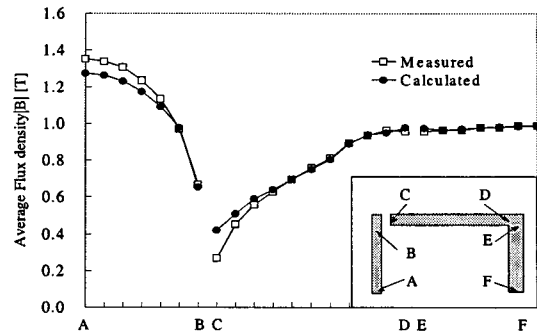


그림 9. 자성체 단면에서의 평균 자속밀도 비교

Fig. 9 The average magnetic flux density at the cross section of magnetic material

3.2 TEAM Workshop Problem 13

개발된 알고리즘을 자성체의 비선형성이 매우 강한 모델의 해석에 적용하였다. 그림 5는 TEAM Workshop Problem 13번 모델로 코일은 등근 모양을 하고 있으며, 인가전류는 1,000[AT]이다[8]. 변 요소를 이용하여 3차원 문제를 해석하는 경우에는 인가전류가 전류의 연속조건을 만족하지 않으면 해가 수렴하지 않기 때문에 각 요소에서의 전류밀도를 전류

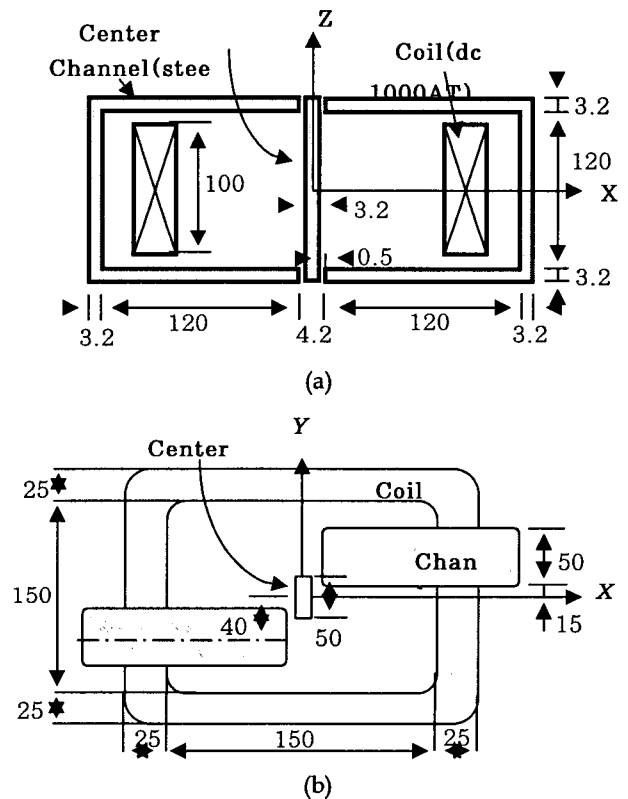


그림 5. 3차원 비선형 해석 모델(TEAM 13), (a) 정면도, (b) 평면도

Fig. 5 3-D non-linear analysis model, (a) front view, (b) plane view

과 같다. 해석의 정확도를 비교하기 위하여 자성체 channel 바로 아래 부분에서 자속밀도를 계산하여, 적응 유한요소법을 이용하지 않은 경우(요소수 57,424개)의 해석 결과, 그리고 측정된 결과와 비교한 결과를 그림 8에 나타내었다. 이로부터 적응 유한요소법을 이용하면 상대적으로 적은 수의 요소수로도 비교적 정확한 해석 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

그림 9는 자성체 단면에서의 자속밀도의 평균치를 비교한 것으로, x축 A~B는 중앙부분의 자성체(Center pole)의 단면에서의 평균 자속밀도 값이고, C~D는 위 부분의 자성체

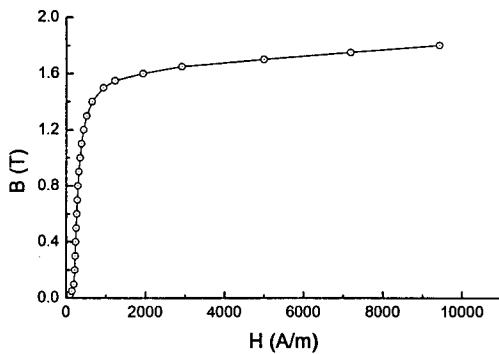


그림 6. B-H 특성 곡선
Fig. 6 B-H curve

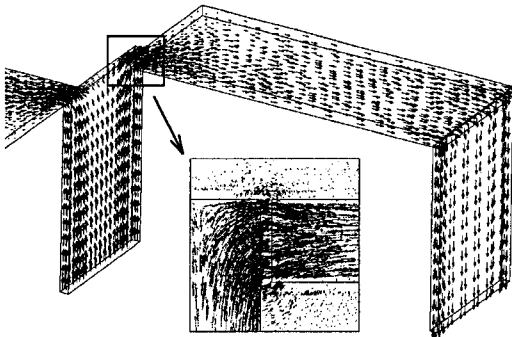


그림 7. Center Pole 부근에서의 자속밀도 분포
Fig. 7 Magnetic field distribution near the center pole

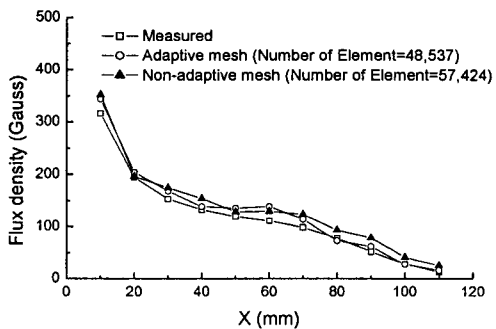


그림 8. Channel 아래 부분에서의 자속밀도 비교
Fig. 8 Comparison of magnetic flux density under channel

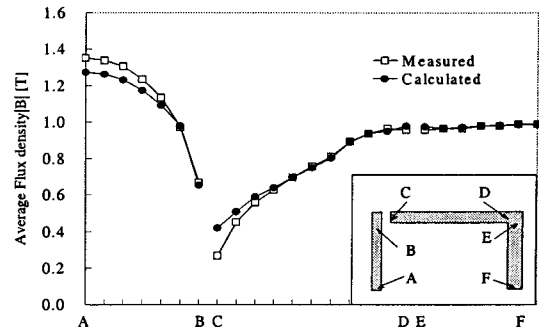


그림 9. 자성체 단면에서의 평균 자속밀도 비교
Fig. 9 The average magnetic flux density at the cross section of magnetic material

(Upper channel)의 단면에서의 평균 자속밀도 값이며, E~F는 오른쪽 자성체부분에서의 단면의 평균 자속밀도 값이다. 이로부터 해석 결과가 측정 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

3.3 3차원 액츄에이터 모델

제안된 알고리즘을 그림 10에 나타낸 3차원 액츄에이터의 요크 사이에 존재하는 중앙 pole에 작용하는 힘 계산 문제에 적용하였다. 모델에서 중앙 pole의 길이는 각각 48[mm]와 73[mm]인 경우로 조절할 수 있으며, 요크와 중앙 pole 사이의 공극은 2[mm]이다. 이용된 자성체의 B-H특성은 그림 6과 식 (24)로 표현된다. 본 모델을 해석하기 위하여 모델의 1/4를 해석하였으며, 2회의 적응 요소분할 과정을 거친 후 요소

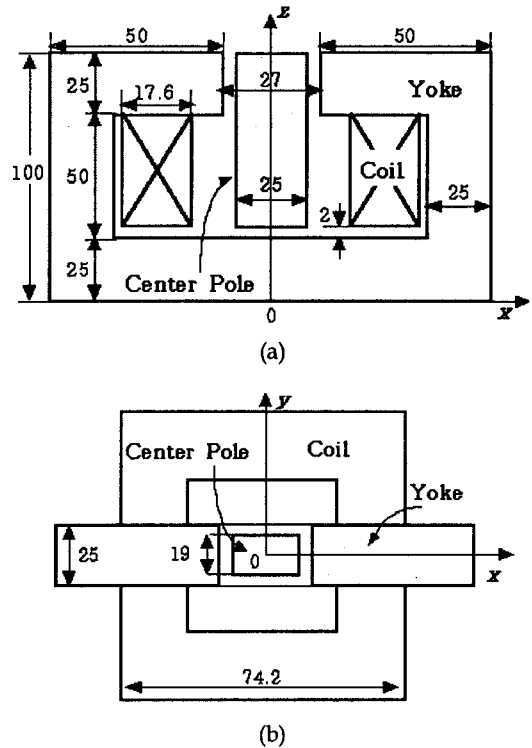


그림 10. 3차원 액츄에이터 모델, (a) 정면도, (b) 평면도
Fig. 10 3-D actuator model, (a) front view, (b) plane view

수와 변의 수는 각각 56,969개와 67,208이다.

그림 11은 중앙 pole의 길이가 73[mm]인 경우 비선형 해석 결과 얻어진 자속밀도의 분포이고, 그림 12는 중앙 pole의 길이가 73[mm]인 경우 Nodal force method[10]을 이용하여 계산된 힘의 분포이다. 그림에서 중앙 pole과 요크 사이에 작용하는 힘의 크기가 균등하지 않은 것처럼 보이는 이유는 해당 절점을 포함하는 요소들의 크기가 일정하지 않기 때문이며, 절점에 작용하는 Nodal force를 해당 절점과 관련되는 요소들의 크기를 고려하여 정규화하면 가운데 부분에서는 거의 균등한 힘의 분포를 얻을 수 있었다. 그림 13은 중앙 pole에 작용하는 힘의 크기를 계산하고, 그 결과를 실측치 및 문헌에 있는 결과와 비교한 것이다[10]. 중앙 pole의 길이가 48[mm]인 경우는 계산 결과가 실측치와 아주 잘 일치하고 있으며, 길이가 73[mm]인 경우에는 실측치와 약간의 오차가 나오으나, 이는 문헌에서 언급된 바와 같이 중앙 pole에 작용하는 힘이 커져 측정하는 과정에서 오차가 발생한 것으로 생각된다.

4. 결 론

본 논문에서는 변 요소를 이용한 3차원 비선형 적응유한요소법을 제안하였다. 제안된 방법에서는 인접한 요소의 경계면에서 자체 연속조건이 해석 결과에 따라 자동으로 만족되지 않음을 이용하여 각 요소별 부분 오차를 추정하였다. 각 요소의 오차를 추정한 결과를 바탕으로 오차가 상대적으로 큰 요소들은 이분법을 이용하여 세분함으로써 요소망의 질이 크게 저하되지 않는 새로운 요소망을 생성하였다. 제안된 방법은 간단한 정자장 문제와 비선형 문제(TEAM Workshop Problem 13)에 적용하고, 또한 3차원 엑츄에이터에 작용하는 힘을 계산하여 비교함으로써 제안된 방법의 타당성을 확인하였다. 그러나 적용 요소분할 과정을 진행함에 따라 이분법을 이용하여 생성된 새로운 요소망은 비록 그 정도가 심한 것은 아니나, 요소망의 질이 나빠짐을 발견하였다. 따라서 적응 유한요소법이 더욱 효과적이기 위해서는 초기 요소망의 질을 같은 수준으로 유지할 수 있고, 또 나아가 초기 요소망의 질이 나쁜 경우에도 양질의 요소망을 생성시킬 수 있는 요소세분 방법에 대한 연구가 이루어져야 할 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력연구원(R-2002-B-031) 주관으로 수행된 과제임.

참 고 문 헌

[1] S.Y. Hahn, et al., "A Posteriori Error Estimate for Adaptive Finite Element Mesh Generation", IEEE Trans. on Magn, Vol. 24, No. 1, pp. 315-317. Jan. 1988
 [2] H. S. Kim, H.K. Jung and S. Y. Hahn, "A Study on

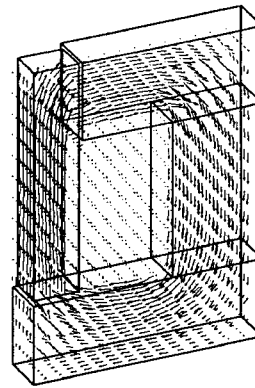


그림 11. 자성체 내부에서의 자속밀도의 분포(L=73mm 인 경우)

Fig. 11 Distribution of magnetic flux density inside magnetic material (when L=73mm)

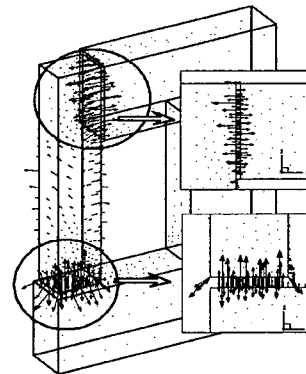


그림 12. 중앙 pole과 요크 사이에 작용하는 힘의 분포 (L=73mm 인 경우)

Fig. 12 Distribution of local forces acting between center pole and yoke (when L=73mm)

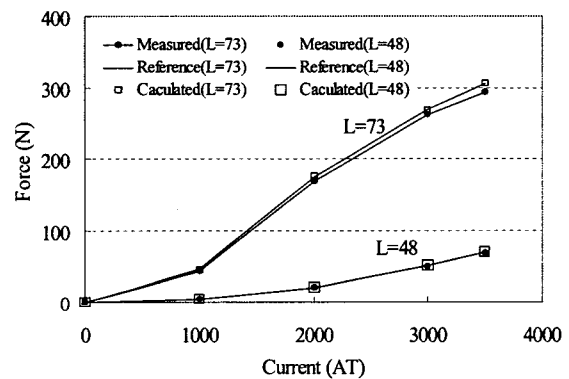


그림 13. 중앙 pole과 요크 사이에 작용하는 힘의 크기
 Fig. 13 Magnitude of force acting between center pole and yoke

Mesh Refinement for 3-D Adaptive Finite Element Method Using Tetrahedral Element", Trans. on KIEE. Vol. 39, No. 9, pp. 921-927, Sep. 1990
 [3] H.S. Kim, S.P. Hong, K. Choi, H.K. Jung and S.Y.

Hahn, "A Three Dimensional Adaptive Finite Element Method for Magnetostatic Problems", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. 27, No. 5, pp. 4081-4084. Sep. 1991

- [4] 김형석, 정현교, 한송엽, "3차원 적응 유한요소법을 위한 사면체 요소세분에 관한 연구", 전기학회 논문지, 제39권 9호, pp. 921-927, 1990년 9월
- [5] M. Koizumi, "A New Element Vector in the Volume Integral Equation Method for Nonlinear Magnetostatics", IEEE Trans. on Magn., Vol. 31, No. 3, May 1995
- [6] M. Rivara, "Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multi-grid techniques", IJNME, Vol. 20, pp. 745-756, 1984
- [7] M. L. Barton, Z. J. Cendes, "New Vector Finite Elements for Three-Dimensional Magnetic Field Computation," IEEE J. Appl. Phys., Vol. 61, No. 8, 99. 3919, 1987
- [8] TEAM Workshop: test problem(1~14), (1986-1991)
- [9] K. Fujiwara, T. Nakata, "On the Continuity of the Magnetizing Current Density in 3-D Magnetic Field Analysis with Edge Element", IEEE Trans. on Magn., Vol. 31, May 1995
- [10] A. Kameari, "Local force calculation in 3D FEM with edge elements", International Journal for Applied Electromagnetics in Materials, vol. 3, pp. 231-240, 1993

저 자 소 개

최 용 권(崔容權)



2003년 명지대학교 전자정보통신공학과 졸업, 2004년-현재 충북대학교 대학원 전기공학전공 석사과정.

Tel : 043-274-2426

E-mail : jjlee@chungbuk.ac.kr

류 재 섭(柳在燮)



1997년 충북대학교 전기전자공학부 졸업(공학사), 1999년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학 석사), 2005년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박), 2005년 2월-현재 LS산전 전력연구소, 선임연구원

E-mail : jsryu2@lsls.biz

고 창 섭(高彰燮)



1986년 서울대학교 전기공학과 졸업 (학사). 1988년 동 대학원 전기공학과 졸업(석사). 1992년 동 대학원 전기공학과 졸업(공학박). 1993~1994년 미국 Florida International University 전기컴퓨터 공학과 박사 후 연구원. 1994~1996년 삼성전기(주) 종합연구소 선임연구원. 2003년 2월-2004년 1월 미국 Texas A&M University, 전기컴퓨터공학과 객원 교수, 1996~현재 충북대학교 전기전자 컴퓨터 공학부 교수.

Tel : 043-261-2426

Fax : 043-274-2426

E-mail : Kohcs@chungbuk.ac.kr