

슬라이딩 섹터를 갖는 다중 입출력 가변 구조 제어 시스템

MIMO Variable Structure Control System with Sliding Sector

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract : In this paper, we propose a method to design variable structure systems with sliding sector for multi-input multi-output systems with mismatched uncertainties in the state matrix. For the uncertain systems we define sliding sectors within which a norm of the state decreases with zero input despite of mismatched uncertainties. Using the notion of the sliding sector we give simple design algorithms of variable structure control laws that can reduce the chattering. Finally, we give a design example in order to show the effectiveness of our method

Keywords : LMI(Linear Matrix Inequality), variable structure system, uncertain system, sliding sector

I. 서론

최근 여러 저지들에 의하여 가변 구조 제어기 설계방법이 제안되었고 로보트, 고성능 모터, 전력계통 등 다양한 공학 시스템에 성공적으로 적용되었다. 가변 구조 제어 시스템에서는 고속의 스위칭 궤환 제어기를 사용하여 시스템의 구조를 일부러 변경한다. 가변 구조 제어 시스템의 가장 중요한 특성은 스위칭 평면에서의 슬라이딩 모드라는 것으로 스위칭 평면에서는 정합조건을 만족시키는 외란에 대하여 영향을 전혀 영향을 받지 않는 것이다. 실제 가변 구조 제어 시스템에서는 스위칭 주파수가 유한한 특성과 스위칭 지연으로 인하여 채터링이 발생하는 단점이 있다. 이를 해결하기 위해 [3]에서처럼 스위칭입력을 연속적인 함수로 근사화하는 방법 등을 사용할 수 있으나 이는 추종성능을 저하시킨다. 최근에 Furuta와 Pan[1]은 그들이 1995년 논문 [2]에서 제안한 슬라이딩 섹터(sliding sector)라는 개념을 사용하여 추종성능을 저하시키지 않고 채터링을 줄이는 방법을 제안했다. 그러나 [1]에서는 정합조건을 만족시키는 불확실성을 갖는 단일입력 시스템만 고려되었다. 이를 감안하여 본 논문은 [1]의 슬라이딩 섹터 방법을 일반화시켜 상태행렬에 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성을 갖는 MIMO 시스템에 적용가능하도록 보완한다. [1]의 방법에서는 슬라이딩평면이 어떤 구속 조건을 만족시키는 상황에서만 채터링을 경감시키는 제어기의 설계가 가능해 [1]을 이용하려면 주어진 방법에 따라서만 슬라이딩 평면을 설계해야 하는 단점이 있으나 본 논문에서 제안된 방법에서는 [3-6], [11-14] 등과 같은 기존 결과의 다양한 패러다임에 따라 설계된 슬라이딩 평면에 대하여서도 채터링을 경감시키는 제어 시스템을 설계할 수 있는 장점을 갖는다.

II. 대상 시스템과 예비 결과들

본 논문에서는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 다룬다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t)$$

여기에서 $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ 로 각각 상태, 입력을 가리키며 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: 모든 상태가 측정 가능하여 궤환에 이용 가능하다.

A2: $\text{rank}(B) = m$ 을 만족시킨다.

A3: $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ 는 연속이다.

A4: $\Delta A(t) = DF_1(t)E$ 로 표현가능하고 $F_1(t)$ 는 $\|F_1(t)\| \leq 1$ 를 만족시킨다.

A5: $\Delta B(t) = BF_0(t)$ 로 표현가능하고 $F_0(t)$ 는 기지의 ϕ 에 대해 $\|F_0(t)\| \leq \phi < 1$ 를 만족시킨다.

위의 가정들을 이용하여 위의 시스템은 다음과 같이 고쳐 표현할 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = [A + DF_1(t)E]x + B[u + F_0(t)u] \quad (1)$$

결국 불확실한 시스템 (1)에 대하여 슬라이딩 섹터를 갖는 가변 구조 제어기 설계 방법을 제안하는 것으로 문제를 설정할 수 있겠다.

III. 슬라이딩 섹터

선형 스위칭 평면을 $\Omega = \{x: \sigma(x) = Sx = 0\}$ 라고 정의하자. 여기에서 S 는 $m \times n$ 의 행렬이다. 기존 [3-6]의 결과에 따라 다음의 성질이 만족된다고 가정하는 것은 매우 타당하다.

P1: SB 는 역행렬이 존재한다.

P2: 스위칭평면에 구속된 $n-m$ 차의 슬라이딩 모드 동역학은 광역적으로 quadratically 안정하다.

그러면 다음의 정리를 증명할 수 있다.

정리 1: 시스템 (1)을 고려하자. $m \times n$ 행렬 S 가 P1-P2를 보장할 필요충분 조건은 S 가 다음을 만족시키는 것이다.

$$\begin{bmatrix} X > 0, SX = NB^T, \\ \Phi^T (AX + XA^T) \Phi & \Phi^T XE^T & \Phi^T D \\ * & -I & 0 \\ * & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 7. 15., 채택확정 : 2006. 3. 11.

최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

여기에서 $*$ 는 대칭성을 이용하여 유추될 수 있는 행렬블록을 의미하고, $N \in R^{m \times m}$ 은 역행렬이 존재하는 행렬이고, $\Phi \in R^{n \times (n-m)}$ 는 $B^T \Phi = 0$, $\Phi^T \Phi = I$ 를 만족시키는 행렬이다.

증명: (\Rightarrow) 아래의 변환행렬과 벡터 $M, v = Mx$ 를 고려해보자.

$$M = \begin{bmatrix} \Phi^T \\ B_g^T \end{bmatrix}, M^{-1} = [\Phi, B], v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T x \\ B_g^T x \end{bmatrix}$$

(1)은 아래와 같은 regular 형태로 변환가능하다.

$$\dot{v} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} [u + F_0(t)u]$$

여기에서

$$A_{11} = \Phi^T [A + DF_1(t)E] \Phi, A_{12} = \Phi^T [A + DF_1(t)E] B \\ A_{21} = B_g^T [A + DF_1(t)E] \Phi, A_{22} = B_g^T [A + DF_1(t)E] B$$

스위칭평면 $Sx = SM^{-1}v = S\Phi v_1 + SBv_2 = 0$ 가 성질 P1-P2를 보장하므로 $(SB)^{-1}$ 이 존재하고 스위칭평면에 구속된 슬라이딩 모드 동역학은 다음처럼 주어짐을 위의 regular 형태로 부터 쉽게 유추할 수 있다.

$$\dot{v}_1 = [A_{11} - A_{12}(SB)^{-1}S\Phi]v_1, v_1 = \Phi^T x$$

P2와 [9]는 다음을 만족시키는 리아푸노프행렬 H 가 존재하는 것을 보장한다.

$$\overline{A}H + H\overline{A}^T + \Phi^T D D^T \Phi + H\overline{E}^T \overline{E}H < 0$$

여기에서 $\overline{A}, \overline{E}$ 는 다음처럼 주어진다.

$$\overline{A} = \Phi^T A [I - B(SB)^{-1}S] \Phi, \overline{E} = E [I - B(SB)^{-1}S] \Phi$$

결국 Schur complement formula[7]을 이용하여 위의 부등식은 다음처럼 고쳐 쓸 수 있다.

$$H > 0, \begin{bmatrix} \overline{A}H + H\overline{A}^T & * & \Phi^T D \\ EH & -I & 0 \\ * & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

$X \in R^{n \times n}$ 를 다음처럼 정의하자.

$$X = \begin{bmatrix} \Phi^T \\ B^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H & -H\Phi^T S^T (SB)^{-T} \\ * & I + (SB)^{-1} S \Phi H \Phi^T S^T (SB)^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T \\ B^T \end{bmatrix} \quad (4)$$

그러면 Schur complement formula[7]을 이용하여 $X > 0$ 임을 알 수 있다. (4)의 값 X 는 $N = SB$ 로 (2)를 만족시킴을 알 수 있다.

(\Leftarrow) (2)를 만족시키는 해 N, X 가 존재한다고 가정하고 $S = NB^T X^{-1}$ 로 주어진다고 하자. 그러면 P1은 명백하게 성립한다. 그리고 [6]을 이용하여 P2가 성립함을 쉽게 알 수 있다. $\nabla \nabla \nabla$

주 1: [8]의 결과를 이용하면 (2)는 다음으로 대체될 수 있음을 알 수 있다.

$$X > 0, SX = NB^T, \begin{bmatrix} AX + XA^T - \gamma BB^T & XE^T & D \\ * & -I & 0 \\ * & 0 & -I \end{bmatrix} < 0$$

정리 2: 시스템 (1)을 고려하자. P1-P2를 보장하는 S 가 주어졌다고 가정하자. 그러면 임의의 $\delta > 0$ 과 양한정 행렬 Y 에 대하여 다음을 만족시키는 양한정 행렬 $P \in R^{n \times n}$ 이 존재한다.

$$[P - S^T Y S] [A + DF_1(t)E] + * - 2\delta S^T S < 0, \quad (5) \\ PB = S^T Y S B$$

증명: 정리 1에 따라 (2)를 만족시키는 X 가 존재하고 Schur complement formula[7]을 이용하면 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$W = \Phi^T (AX + XA^T + DD^T + XE^T E X) \Phi < 0$$

P 를 다음과 같이 정의하자.

$$P = \begin{bmatrix} \Phi^T \\ NB^T X^{-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \zeta (\Phi^T X \Phi)^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T \\ NB^T X^{-1} \end{bmatrix} \\ = \zeta \Phi (\Phi^T X \Phi)^{-1} \Phi^T + S^T Y S \quad (6)$$

여기에서 ζ 는 다음을 만족시키는 작은 양수이다.

$$\zeta B^T E^T E B - 2\delta B^T S^T S B \\ < \zeta B^T (A^T + E^T E X) \Phi W^{-1} \Phi^T (A + XE^T E) B \quad (7)$$

여기에서 $B^T S^T S B > 0$ 이므로 (7)을 만족시키는 작은 양수 ζ 가 항상 존재함에 유의하라. (6)은 $P > 0$ 를 의미한다. (6)을 이용하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$B^T P = B^T S^T Y S$$

그러므로 다음을 보이기만 하면 된다.

$$\zeta \Phi (\Phi^T X \Phi)^{-1} \Phi^T [A + DF_1(t)E] + * - 2\delta S^T S < 0$$

변환행렬 $[X\Phi, B]$ 를 사용하면 위의 부등식이 다음과 동치임을 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \zeta \Phi^T (A + DF_1(t)E) X \Phi + * & * \\ \zeta B^T (A + DF_1(t)E)^T \Phi & -2\delta B^T S^T S B \end{bmatrix} < 0$$

[11]의 결과는 위의 부등식이 다음을 만족하면 성립함을 의미한다.

$$\begin{bmatrix} \zeta W & \zeta \Phi^T (A + XE^T E) B \\ * & \zeta B^T E^T E B - 2\delta B^T S^T S B \end{bmatrix} < 0$$

Schur complement formula[7]은 위의 부등식은 ζ 가 (7)을 만족시키면 성립함을 의미한다. $\nabla \nabla \nabla$

주 2: 정리 2와 [9]의 결과는 P1-P2를 보장하는 S 가 주어졌다면 임의의 $\delta > 0, Y > 0$ 에 대하여 다음을 만족시키는 $\gamma > 0, P > 0$ 이 항상 존재함을 의미한다.

$$PB = S^T Y S B, \\ (P - S^T Y S)A + * + \frac{1}{\gamma} E^T E - 2\delta S^T S \\ < -\gamma (P - S^T Y S) D D^T (P - S^T Y S) \quad (8)$$

주 3: 정리 2와 주 2는 다음을 의미한다.

$$\{x: Sx = 0, x \neq 0\} \subset \{x: x^T A x < 0\}$$

여기에서 $A = PA + A^T P + \frac{1}{\gamma} E^T E + \gamma P D D^T P$ 이다.

위의 정리들과 주를 이용하여 다음처럼 슬라이딩 섹터를 정의할 수 있다.

정의 (슬라이딩 섹터): 슬라이딩 섹터 Σ 는 R^n 의 부분집합으로 다음처럼 정의된다.

$$\Sigma = \{x: x^T A x \leq -x^T Q x\} \tag{9}$$

여기에서 Q 는 다음을 만족시키는 양한정 행렬이다.

$$Q \leq Q_m = (S^T Y S - P) A + * + 2 \delta S^T S - \gamma (S^T Y S - P) D D^T (S^T Y S - P) - \frac{1}{\gamma} E^T E \tag{10}$$

주 4: 슬라이딩 섹터 Σ 는 공집합이 아니다. 항상 $x=0$ 을 포함하고 스위칭평면 $Sx=0$ 도 역시 포함한다. 슬라이딩 섹터는 다음과 같이 고쳐쓸 수 있다.

$$\Sigma = \{x: \|e\|^2 \leq x^T E x\} \tag{11}$$

여기에서 $\sigma = Sx$ 그리고

$$E = S^T S - \frac{1}{\epsilon} (A + Q), \quad \epsilon > 0 \tag{12}$$

위의 (11)은 슬라이딩 섹터가 cone임을 의미한다. 만약 δ_0 를 $Q_m \geq Q$ 를 보장하는 양수라고 가정하고 $Q = 2\delta_0 S^T S - A$ 로 설정하면 슬라이딩 섹터 Σ 는 슬라이딩평면 $Sx=0$ 와 일치된다.

주 5: 위의 정리와 [8]의 결과를 이용하여 $0 < Q < Q_m$ 일 때 충분히 큰 ϵ 에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$A + Q < 2\epsilon S^T S, \quad PB = S^T Y S B$$

그리고 이는 $0 < Q < Q_m$ 일 때 충분히 큰 ϵ 에 대하여 $E > 0$ 가됨을 의미한다.

IV. 슬라이딩 섹터를 사용한 제어기

성질 P1-P2를 보장하는 S 가 주어졌다고 가정하고 어떤 $Y > 0$ 에 대하여 reachability 조건 $\sigma^T Y \sigma < 0$ 을 만족시키고 부가적으로 $\sigma^T Y \sigma < -\delta \sigma^T \sigma$ 가 $\delta > 0$ 에 대하여 만족시키는 스위칭 궤환 제어 규칙들의 집합을 Π 라고 하자. 그러면 슬라이딩 섹터의 정의를 이용하여 다음의 정리를 얻을 수 있다.

정리 3: 시스템 (1)을 고려하자. P1-P2를 보장하는 S 가 주어졌다고 가정하고 다음과 같은 스위칭 궤환 제어기가 사용된다고 가정하자.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & x \in \Sigma \\ u_N & x \notin \Sigma \end{cases} \tag{13}$$

여기에서 $u_N \in \Pi$. 그러면 (1)과 (13)의 폐회로 시스템의 응답은 quadratically 안정하다.

증명: 정리 2에 따라 (5)를 만족시키는 $p > 0$ 가 존재하므로 리아푸노프 함수를 $V = x^T P x$ 로 정할 수 있다. 그리고 도함수는 다음처럼 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P [A + DF_1(t)E]x + 2x^T P B [u + F_0(t)u] \\ &= 2x^T P [A + DF_1(t)E]x + 2\sigma^T Y S B [u + F_0(t)u] \\ &\quad + 2\sigma^T Y S [A + DF_1(t)E]x \\ &= 2x^T [P - S^T Y S] [A + DF_1(t)E]x + 2\sigma^T Y \sigma \end{aligned}$$

정리 2, [11]의 결과, (10)을 사용하여 Σ 외부에서 \dot{V} 가 다음을 만족시킴을 알 수 있다.

$$\dot{V} \leq -x^T Q x + 2\delta \sigma^T \sigma + 2\sigma^T Y \sigma$$

그런데 u_N 은 $\sigma^T Y \sigma \leq -\delta \sigma^T \sigma$ 를 만족시키므로 Σ 외부에서 \dot{V} 는 다음을 만족시킨다.

$$\dot{V} \leq -x^T Q x$$

한편 Σ 내부에서는 (9)와 [11]의 결과를 이용하여 \dot{V} 가 다음을 만족시킴을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P A x + 2x^T P D F_1(t) E x \\ &\leq 2x^T P A x + \gamma x^T P D D^T P x + \frac{1}{\gamma} x^T E^T E x \\ &\leq -x^T Q x \end{aligned}$$

결국 폐회로 시스템이 안정함을 알 수 있다. $\nabla \nabla \nabla$

주 6: 위의 정리와 주 4를 이용하여 우리는 $x^T P x$ 의 최소감쇠율은 $\lambda_{\min}(Q)$ 가 감소함에 따라 감소함을 알 수 있다.

주 7: 기존 결과 [3-6] 등을 참조하여 다음의 제어규칙들이 Π 에 속함을 쉽게 알 수 있다.

$$u = -(SB)^{-1} S A x - \delta (SB)^{-1} Y^{-1} \sigma - p_r(t) \text{sign}(B^T S^T Y \sigma) \tag{14}$$

$$u = -(SB)^{-1} S A x - \delta (SB)^{-1} Y^{-1} \sigma - p_r(t) \frac{B^T S^T Y \sigma}{\|B^T S^T Y \sigma\|} \tag{15}$$

여기에서 $\delta > 0$ 이고 주어진 임의의 벡터 $y \in R^m$ 에 대하여 $\text{sign}(y) = [\text{sign}(y_1), \dots, \text{sign}(y_m)]^T$ 이며

$$\begin{aligned} p_r(t) &= \frac{1}{1-\phi} \|(SB)^{-1} S D e\| \cdot \|E x\| \\ &\quad + \frac{1}{1-\phi} [\phi (\|(SB)^{-1} S A e\| + \delta \|(SB)^{-1} Y^{-1} d\|)] \end{aligned} \tag{16}$$

위의 정리 3은 임의의 제어규칙 $u_N \in \Pi$ 는 슬라이딩 섹터 Σ 내부로 궤적을 보낼 수 있고 섹터 내부에서는 입력을 0으로 하여도 안정을 유지할 수 있음을 의미한다. 결국 [1]과 비슷하게 다음과 같은 내부 슬라이딩 섹터와 외부 슬라이딩 섹터를 도입해 채터링을 줄일 수 있겠다.

$$\Sigma_i = \{x: x^T A x + x^T Q_i x \leq 0\} \tag{17}$$

$$\Sigma_o = \Sigma \cap \{x: x^T A x + x^T Q x > 0\} \tag{18}$$

여기에서 $Q \leq Q_i \leq Q_m$. 결국 정리 3과 [1]의 결과를 참조해서 다음을 얻을 수 있다.

정리 4: 시스템 (1)을 고려하자. P1-P2를 보장하는 S 가 주어졌다고 가정하고 다음과 같은 스위칭 궤환 제어기가 사용된다고 가정하자.

$$u(t) = \text{Hys}(x, \Sigma_i, \Sigma_o)u_N \quad (19)$$

여기에서 $\text{Hys}(x, \Sigma_i, \Sigma_o)$ 는 hysteresis dead-zone 함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\text{Hys}(x, \Sigma_i, \Sigma_o) = \begin{cases} 0 & x \in \Sigma_i \\ \text{unchanged} & x \in \Sigma_o \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

그러면 (1)과 (19)의 폐회로 시스템 응답은 quadratically 안정하다.

주 8: 주 4를 참조해서 내부 슬라이딩섹터 Σ_i 와 외부 슬라이딩섹터 Σ_o 를 다음처럼 정의할 수도 있다.

$$\Sigma_i = \{x : \|d\|^2 \leq \alpha x^T E x\} \quad (21)$$

$$\Sigma_o = \Sigma \cap \{x : \|d\|^2 > \alpha x^T E x\} \quad (22)$$

여기에서 $0 < \alpha < 1$ 이고 E 는 (12)에 정의되었다.

주 9: 본 논문의 주요 결과는 다음 설계알고리즘 형태로 정리될 수 있다. ① 기존 결과 [3-6]등을 이용하여 슬라이딩 평면을 설계한다. ② 적절한 $\delta > 0, Y > 0$ 에 대하여 $\sigma^T Y \sigma < -\delta \sigma^T \sigma$ 를 만족시키는 스위칭 케환 제어기 u_N 를 정한다 (14,15 참조). ③ LMI (3)을 만족시키는 해 H 를 LMI Control Toolbox[10]과 같은 LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 찾는다. ④ (4)에 따라 X 를 구한다. ⑤ (7)을 만족시키는 ζ 를 구하라. ⑥ (6)에 따라 P 를 구하라. ⑦ 주어진 S, P, Y, δ 에 대하여 (8)을 만족시키는 $\gamma > 0$ 을 구한다. ⑧ (10)을 이용하여 Q_m 을 구하라. ⑨ 슬라이딩 섹터는 (9), (17), (18)을 이용하여 구해지고(아니면 (11), (21), (22)를 이용해서 구해진다) 채터링을 줄이는 제어기는 (19)로 구해진다.

주 10: 기존의 슬라이딩 평면 설계방법 [3-4]는 정합조건을 요구하므로 이들 방법을 통해 설계된 슬라이딩 평면 S 가 성질 P1-P2를 보장하지 않을 수도 있다. 그러나 정리 1은 정합조건을 가정하고 설계하는 기존 방법에 따른 슬라이딩 평면 S 도 (2)를 만족시키면 성질 P1-P2를 보장하는 것을 의미하므로 LMI (3)을 만족시키는 해 H 를 찾을 수만 있다면 기존 방법에 따라 설계된 슬라이딩 평면 S 도 채터링을 줄이는 제어기 (19)를 설계하는 데 쓰일 수 있다. [6]의 방법에 따라 설계된 슬라이딩 평면은 항상 (2)를 만족시키므로 (19)를 설계할 때 직접 사용될 수 있다.

주 11: 제안된 방법에서 $B \in R^{n \times 1}, D = B$ 라는 가정을 더하면 [1]의 결과를 도출할 수 있다. [1]의 방법에서는 슬라이딩 평면과 슬라이딩섹터는 리카치방정식을 풀어서 구해야 해 기존의 슬라이딩평면 설계방법 [3-6]들을 이용할 수 없는 단점이 있으나 본 논문에서 제안된 방법은 기존 [3-6]의 방법을 사용할 수 있다.

IV. 수치적 예

다음의 데이터를 갖는 모델 (1)를 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, F_1(t) = \theta, F_0(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.5\theta \end{bmatrix}$$

여기에서 θ 는 $|\theta| \leq 1$ 를 만족시키는 미지의 함수이다. 위의 데이터는 $\psi = 0.5 < 1$ 를 의미한다. 위의 시스템 모델 (23)은 단일입력 시스템이 아니고 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성을 갖고 있으므로 [1,2]에 주어진 방법은 적용이 불가능하다. [6]이나 [11]의 LMI기반 슬라이딩 평면 설계방법을 사용하여 다음과 같은 슬라이딩 평면을 구할 수 있다.

$$\sigma = Sx = \begin{bmatrix} 0.454 & 0.546 & 0 \\ -0.028 & 0.028 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$\delta = 2, Y = 1$ 로 하고 (15)를 이용하여 다음의 가변구조제어를 얻을 수 있다.

$$u = -S Ax - 2\sigma - p_r(t) \frac{\sigma}{\|d\|}, p_r(t) = \|S Ax\| + 2\|d\| + \|E x\| \quad (25)$$

위의 제어기를 사용하면 채터링을 유발할 것이다. 주9에 주어진 설계알고리즘을 이용하여 채터링을 줄인 제어기를 구해보자. (24)를 가지고 다음처럼 (3)의 H , (4)의 X , (7)의 ζ 를 구할 수 있다.

$$H = 1.038, X = \begin{bmatrix} 1.619 & 0.486 & 0.032 \\ * & 1.427 & -0.026 \\ * & * & 1.002 \end{bmatrix}, \zeta = 1$$

그리고 (6)의 P , (8)의 γ , (10)의 Q_m 을 다음처럼 구할 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} 0.689 & -0.235 & -0.028 \\ * & 0.781 & -0.028 \\ * & * & 1.000 \end{bmatrix}, \gamma = 1, Q_m = \begin{bmatrix} 0.595 & 0.257 & 0.370 \\ * & 1.892 & -0.370 \\ * & * & 4.000 \end{bmatrix}$$

결국 (9), (17), (18)을 참조해 $Q = 0.1I, Q_i = 0.3I$ 로 하여 $\Sigma, \Sigma_i, \Sigma_o$ 를 정의할 수 있고 (19)를 이용해 다음과 같은 슬라이딩 섹터를 갖는 제어기를 얻을 수 있다. 그림 1은 슬라이딩 섹터 Σ , 내부 슬라이딩 섹터 Σ_i , 그리고 슬라이딩 평면 $\sigma = 0$ 를 보여준다.

$$u = -\text{Hys}(x, \Sigma_i, \Sigma_o)[S Ax + 2\sigma + p_r(t) \frac{\sigma}{\|d\|}], p_r(t) = \|S Ax\| + 2\|d\| + \|E x\| \quad (26)$$

시뮬레이션 할 때 $\theta = \sin 2\pi t, x(0) = [1, 0, -1]^T$ 라고 가정했다. 그림 2의 첫번째 그림은 (23)과 (26)의 폐회로 응답의 궤적을 보여준다. 비교를 위해 (25)를 입력으로 했을 때도 시뮬레이션했다. 그림 2의 두번째 그림은 (23)과 (25)의 폐회로 응답의 궤적을 보여준다. [3]을 참조하여 (25)를 연속적인 함수로 근사화한 다음의 제어기를 입력으로 했을 때도 시뮬레이션 했다.

$$u = -S Ax - 2\sigma - p_r(t) \frac{\sigma}{\|d\| + 0.05}, p_r(t) = \|S Ax\| + 2\|d\| + \|E x\| \quad (27)$$

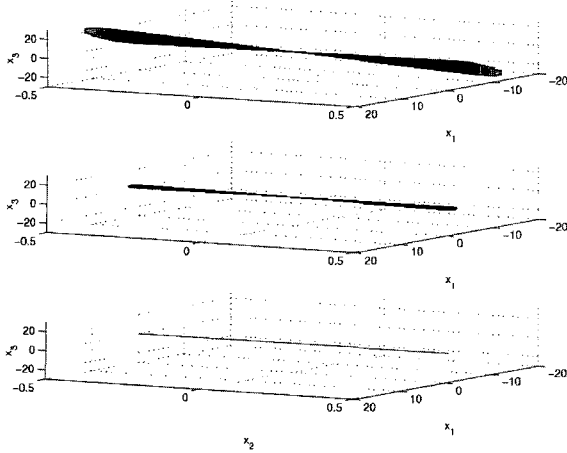


그림 1. (위): 슬라이딩 섹터 Σ , (중간): 내부 슬라이딩 섹터 Σ_i , (아래): $\sigma=0$.
 Fig. 1. (Top): Sliding sector Σ , (Middle): Inner sliding sector Σ_i , (Bottom): $\sigma=0$.

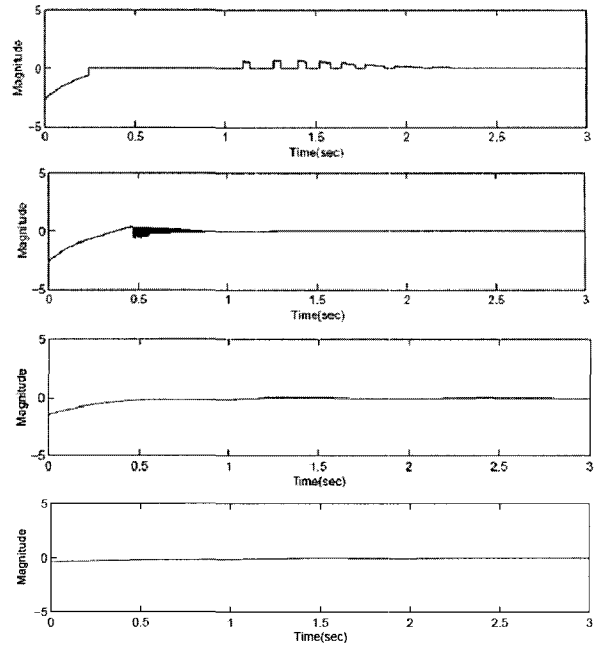


그림 3. (첫번째): (26)의 u_1 , (두번째): (25)의 u_1 , (세번째): (27)의 u_1 , (네번째): (28)의 u_1 .
 Fig. 3. (1st): u_1 of (26), (2nd): u_1 of (25), (3rd): u_1 of (27), (4th): u_1 of (28).

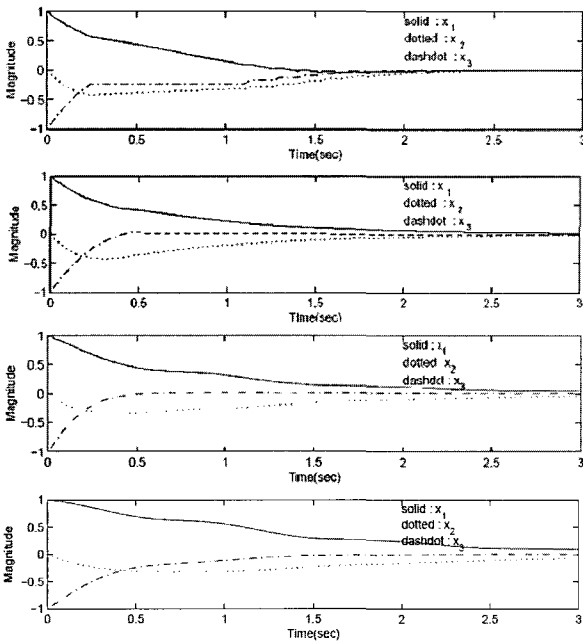


그림 2. (첫번째): (23)과 (26)의 응답, (두번째): (23)과 (25)의 응답, (세번째): (23)과 (27)의 응답, (네번째): (23)과 (28)의 응답.
 Fig. 2. (1st): Responses of (23) and (26), (2nd): Responses of (23) and (25), (3rd): Responses of (23) and (27), (4th): Responses of (23) and (28).

그림 2의 세번째 그림은 (23)과 (27)의 폐회로 응답의 궤적을 보여준다. 정리 3의 증명과정과 [1]의 결과를 참조하면 다음의 선형 제어기 (28)은 $\theta=0$ 일 때 LQ 성능지수 $\int_0^\infty x^T Q_m x dt < x^T(0) F x(0)$ 를 만족시킴을 알 수 있다. 그림 2의 네번째 그림은 (23)과 (28)의 폐회로 응답의 궤적을 보여준다.

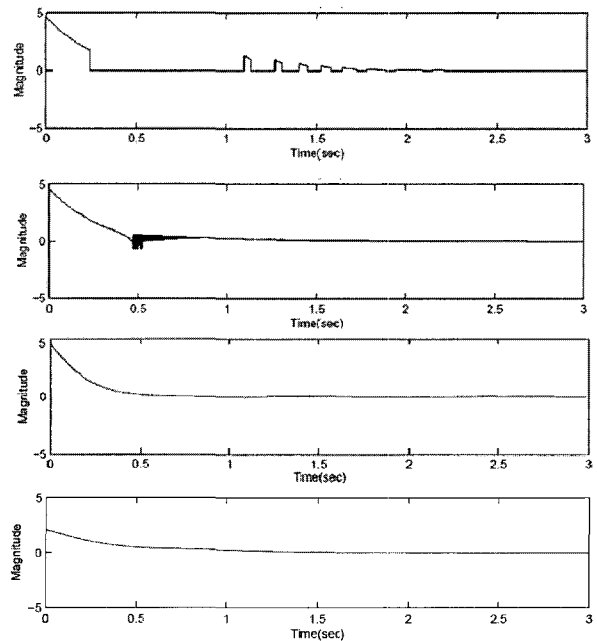


그림 4. (첫번째): (26)의 u_2 , (두번째): (25)의 u_2 , (세번째): (27)의 u_2 , (네번째): (28)의 u_2 .
 Fig. 4. (1st): u_2 of (26), (2nd): u_2 of (25), (3rd): u_2 of (27), (4th): u_2 of (28).

$$u = -SAx - 2\sigma \tag{28}$$

그림 3은 (26), (25), (27), (28)의 u_1 을 그린 것이고 그림

4는 u_2 를 그린 것이다. 주어진 그림들로부터 (23)과 (27) 또는 (28)의 폐회로 응답은 채터링 현상이 없어졌지만 정상상태 오차를 0으로 보낼 수 있는 완벽한 추종성능이 희생되었음을 알 수 있다. 특히 (23)과 (28)의 폐회로 응답은 3초가 지나서야 오차가 ± 0.1 범위에 들어갔으나 제안된 방법에 의한 폐회로 응답의 경우에는 2초가 지나면 오차가 거의 0에 수렴함을 알 수 있다. 제안된 방법은 (25)의 스위칭 함수를 이용한 제어기처럼 정상상태 오차를 0으로 보내는 완벽한 추종성능을 보여주면서 과도기에서 채터링을 현저하게 줄여 주었음을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문은 가변 구조 제어 시스템에서 채터링을 경감시키는 문제를 다루었다. [1,2]의 슬라이딩 섹터 방법을 일반화시켜 상태행렬에 정합조건을 만족시키지 않는 불확실성을 갖는 MIMO 시스템에 적용 가능하도록 보완하였다. 본 논문에서 제안된 방법에서는 [3-6], [11,14] 등과 같은 기존 결과의 다양한 패러다임에 따라 설계된 슬라이딩 평면에 대하여서도 채터링을 경감시키는 제어 시스템을 설계할 수 있는 장점을 갖는다. 제안된 방법의 효용성을 보이기 위해 시뮬레이션 예제를 제시했다.

참고문헌

- [1] K. Furuta and Y. Pan, "Variable structure control with sliding sector," *Automatica*, vol. 36, pp. 211-228, 2000.
- [2] K. Furuta and Y. Pan, "A new approach to design a sliding sector for VSS controller," *In Proc. of the American Control Conference*, pp. 1304-1308, Seattle, USA, 1995.
- [3] R. A. D. Carlo, S. H. Zak, and G. P. Matthews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," *Proc. IEEE*, vol. 76, pp. 212-232, 1988.
- [4] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, pp. 212-222, 1977.
- [5] R. H. C. Takahashi and P. L. D. Peres, " H_2 guaranteed cost-switching surface design for sliding modes with nonmatching disturbances," *IEEE Trans. automat. Contr.*, vol. 44, pp. 2214-2218, 1999.
- [6] H. H. Choi, "An explicit formula of linear sliding surfaces for a class of uncertain dynamic systems with mismatched uncertainties," *Automatica*, vol. 34, pp. 1015-1020, 1998.
- [7] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Philadelphia, SIAM, 1994.
- [8] T. Iwasaki and R. E. Skelton, "All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence condition and state space formulas," *Automatica*, vol. 30, pp. 1307-1317, 1994.
- [9] P. P. Khargonekar, I. R. Pertsens, and K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and H_∞ control theory," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 35, pp. 356-361, 1990.
- [10] P. Gahinet, A. Nemirovski, and A. J. Laub, *LMI Control Toolbox User's Guide*, Natic, MA: The MathWorks Inc., 1995.
- [11] H. H. Choi, "Variable structure control of dynamical systems with mismatched norm-bounded uncertainties: an LMI approach," *Int. J. Control*, vol. 74, pp. 1324-1334, 2001.
- [12] K. S. Kim and Y. Park, "Parametric approaches to sliding mode design for linear multivariable systems," *Int. J. Control, Automation, and systems*, vol. 1, pp. 11-18, 2003.
- [13] E. M. Jafarov, "Robust sliding mode controllers design techniques for stabilization of multivariable time-delay systems with parameter perturbations and external disturbances," *Int. J. Systems Science*, vol. 36, pp. 433-444, 2005.
- [14] C. Edwards, "A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalities," *Automatica*, vol. 40, pp. 1761-1769, 2004.



최한호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원. 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수. 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인제어이론, 마이크로 기반 제어, 가상현실 및 로봇틱스.