

# 구조적 파라미터 불확실성을 갖는 안정한 선형계에 대한 강인 포화 제어기

## Robust Saturation Controller for the Stable LTI System with Structured Real Parameter Uncertainties

임 채 욱\*, 박 영 진, 문 석 준, 박 윤 식  
(Chae-Wook Lim, Youngjin Park, Seok-Jun Moon, and Youn-Sik Park)

**Abstract** : This paper is focused on a robust saturation controller for the stable linear time-invariant (LTI) system involving both actuator's saturation and structured real parameter uncertainties. Based on affine quadratic stability and multi-convexity concept, a robust saturation controller is newly proposed and the linear matrix inequality (LMI)-based sufficient existence conditions for this controller are presented. The controller suggested in this paper can analytically prescribe the lower and upper bounds of parameter uncertainties, and guarantee the closed-loop robust stability of the system in the presence of actuator's saturation. Through numerical simulations, it is confirmed that the proposed robust saturation controller is robustly stable with respect to parameter uncertainties over the prescribed range defined by the lower and upper bounds.

**Keywords** : robust saturation controller, structured real parameter uncertainty, affine quadratic stability, linear matrix inequality

### I. 서론

능동 제어 기술의 실제 적용에 있어서 대부분의 제어 구동 장치들은 물리적 양의 크기에 있어서 제한을 받는다. 제어 구동 장치는 힘, 회전력, 추력, 압력, 스트로크, 유동률, 전압, 전류, 온도 등에 있어서 실제적으로 제한된다. 그러므로 기대치 않게 매우 큰 외란들은 제어 구동 장치의 최대 허용치를 넘는 포화를 일으킬 수 있다. 이때 일반적으로 선형 해석에 바탕을 둔 선형 제어 이론으로 설계된 제어기는 설계 시에 고려되지 않는 비선형 모드의 작동으로 인해, 제어 구동 장치의 고장이나 제어 대상 시스템을 불안정하게 하는 등 여러 가지 문제가 발생할 수 있다[1].

기계공학, 항공우주공학, 토목/건축공학, 화학공학 등의 분야에서 제어 구동 장치의 포화를 고려한 능동 제어 방법들이 실제적으로 고려되어야 하는 경우가 종종 있게 된다. 강한 외력을 받는 구조물에 능동 제어 시스템을 설치할 때, 요구되는 제어력은 최대 허용치를 초과해서 제어력 포화가 일어나 제어 성능이 크게 떨어지거나 불안정해지는 경우가 발생할 수 있다. 이런 경우에 구동기의 제어력 포화를 고려하여 제어기를 설계하여 안정성을 보장하는 실제적인 방법에 대한 연구가 반드시 필요하다. 또한 구조물이 복잡해질 수록 실제 구조물의 파라미터들의 값들(진동계의 경우 강성과 질량과 감쇠 등)을 설계자가 정확히 모르는 경우가

많으므로, 제어기의 설계 시에 가정한 수학적 모델과 실제 구조물과는 모델링 오차가 생기게 되고 이때의 오차는 불확실성으로 제어기의 설계 시에 고려되어야 한다. 이러한 파라미터 불확실성은 시불변 불확실성으로 가정할 수 있다. 불확실성을 고려하지 않고 설계된 제어기를 불확실성이 있는 계에 적용할 때 안정성이 깨져 계를 불안정하게 할 수도 있다. 그러므로 계의 불확실성과 제어력의 한계를 동시에 고려하여 강인 안정성이 보장되는 강인 포화 제어 방법이 필요하다.

구동기의 포화를 고려한 제어 방법 중 가장 대표적인 방법이 잘 알려진 최적 뱅뱅 제어(optimal bang-bang control)이다[2-4]. 이는 최적제어 이론과 Pontryagin의 최소 원리에 바탕을 둔 것으로 제어력에 제한 조건을 두어 이차의 성능 지수를 최소화함으로 최적의 제어력을 구하는 방법이다. 이와 유사한 방법으로 BFC(Bounded Force Control, [5]), LSC(Linear Saturation Control, [6]) 등이 있지만, 이들 모두의 방법들은 제어력이 계의 상태의 함수로 표현되지 않기 때문에 실제 적용하기에 어려운 단점이 있다. 이의 단점을 해결하기 위하여 준최적 뱅뱅 제어(suboptimal bang-bang control, [7])가 제안되었다. 이는 Lyapunov 안정성 조건을 이용한 것으로 제어력 제한 조건 하에서 Lyapunov 함수의 시간 미분치를 최소화하는 최적의 제어력을 구하는 방법으로, 제어력이 계의 상태의 함수로 표현되어 실제 적용하기에 유용한 장점을 가진다. 더 나아가 사각파 형태의 제어력을 내는 뱅뱅 제어의 적용 시에 계의 상태 공간의 원점 근처에서 발생하는 제어 채터링 문제를 해결하기 위하여 사각파의 파형을 유연한 형태의 파형으로 수정하는 수정된 뱅뱅 제어(modified bang-bang control, [7,8])가 제안되었다.

앞의 포화 제어 방법들은 단지 공칭계에 대해서만 안정성이 보장되고, 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인성에

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 10. 24., 채택확정 : 2006. 2. 14.

임채욱 : KAIST 기계공학과 박사 후 연구원

(chwhlim@kaist.ac.kr)

박영진, 박윤식 : KAIST 기계공학과 교수

(yjpark@kaist.ac.kr/yspark0117@kaist.ac.kr)

문석준 : 한국기계연구원 책임연구원(sjmoon@kimm.re.kr)

※ 본 연구는 “중소형 선박용 MD-ARS 설계 기술 개발”과제, 국가 지정 연구사업(NRL: M10500000112-05J0000-1121) 및 두뇌한국사업(Brain Korea 21)의 지원으로 수행되었음.

대하여 해석적으로 어떠한 설명도 할 수 없다. 포화 제어의 강인 안정성을 설명하기 위하여 슬라이딩 모드 제어(sliding mode control)의 파라미터의 불확실성에 대한 강인한 특성을 이용하고자 하는 시도가 있었다. 수정된 슬라이딩 모드 뱅뱅 제어(modified sliding mode bang-bang control, [8])는 준최적 뱅뱅 제어에서 구해진 전환면(switching surface)이 슬라이딩 모드 제어에서 구해진 슬라이딩면(sliding surface)과 어떤 관계가 있는지를 확인하여, 준최적 뱅뱅 제어가 계의 파라미터 불확실성에 대하여 강인한 특성이 있는지를 살펴 보았다. 그러나 해석적인 명확한 결과를 보이지 못하고, 단지 제어력이 작게 사용되는 계의 상태 공간의 원점 근처에서만 전환면 위에서 슬라이딩 모드가 존재할 수도 있다는 의미 없는 결과를 보였다. 포화 슬라이딩 모드 제어(saturated sliding mode control, [9,10])는 제어력에 포화가 없다는 가정 하에서 기존의 슬라이딩 모드 제어 방법을 통하여 구해진 제어력을 제어력에 포화가 있는 경우에도 Lyapunov 안정성을 만족하도록 약간 변형시키는 방법이다. 이 방법의 장점은 슬라이딩 모드 제어에 기초를 두어 설계를 하는 것이므로 계의 파라미터 불확실성에 대해서 강인한 특성을 가진다는 것이다. 그러나 엄밀히 말하면 슬라이딩 모드 제어 방법은 크게 접근 모드(reaching mode)와 슬라이딩 모드(sliding mode)로 나눌 수 있는데, 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성은 계의 상태가 슬라이딩 모드에서 움직일 때만 보장되는 것이므로, 계의 응답의 전체 구간에서의 강인성을 해석적으로 보장하지 못한다.

본 논문에서는 구동기의 포화와 구조적 파라미터 불확실성(structured real parameter uncertainty)이 동시에 존재하는 선형 시불변계에 대하여 강인 안정성이 보장되는 강인 포화 제어기(robust saturation controller)를 해석적으로 다룬다. 구동기의 포화가 존재하고 불확실한 선형 시불변계의 구조적 파라미터 불확실성의 상하한이 주어졌을 때, 고려된 구조적 파라미터 불확실성의 상하한 내에서 페루프계의 강인 안정성이 해석적으로 보장되는 강인 포화 제어기를 제안한다. 제어기의 설계에서는 전통적인 이차 안정성(quadratic stability)의 보수성을 줄이기 위하여 유사 이차 안정성(AQS; Affine Quadratic Stability, [11])의 정의가 이용된다. 또한 제어기의 설계를 LMI(Linear Matrix Inequality) 문제로 다루기 위하여 멀티볼록꼴(multiconvexity)의 개념이 이용된다. 이들을 바탕으로 제안된 제어기의 해가 존재하기 위한 LMI 형태의 충분조건들이 제시된다. 수치 예제를 통하여 제안된 제어기의 강인 안정성을 확인한다.

## II. 유사 이차 안정성(AQS; Affine Quadratic Stability)

먼저 본 논문에서 제시되는 강인 포화 제어기에 대한 해석적 도구로 사용되는 AQS에 대하여 살펴본다. AQS 검사는 전통적인 이차 안정성 검사 보다 수학적으로 다루기가 복잡하고 해석적으로 어려워지지만, 시불변 또는 시변의 불확실한 파라미터를 가지는 선형계의 강인 안정성을 해석할 수 있다. 강인 제어기의 설계에 있어서, 전통적인 이차 안정성을 이용하면 임의로 매우 빠른(무한대까지) 불확실성의 변화에 대하여 이론적으로 강인 안정성이 보장된다[12]. 이

로 인해 시불변 불확실성이나 변화가 매우 느린 불확실성을 가지는 계에 대하여 매우 보수적인 방법이 된다. 그러나 AQS 검사는 시불변과 시변 불확실한 파라미터를 가지는 선형계 모두에 적용할 수 있고, 시불변 불확실성이나 변화가 매우 느린 불확실성을 가지는 계인 경우에 이차 안정성 검사보다 훨씬 덜 보수적이다.

이 논문은 시불변 파라미터 불확실성을 가지는 선형계에 대하여 관심이 있다. 이를 위해 불확실한 선형계를 (1)과 같이 시불변 불확실성 파라미터들에 대하여 종속하는 형태로 표현한다.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(\theta))x(t), x(0) = x_0 \quad (1)$$

여기서  $A_0$ 는  $n \times n$  크기의 공칭 시스템 행렬이고,  $\Delta A(\theta)$ 는 시불변 불확실성이고,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in R^k$ 는  $k$ 개의 시불변 불확실성 파라미터들의 벡터이고,  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 는  $n \times 1$  크기를 가지는 상태 벡터이다.  $\theta$ 는 시변 불확실성 파라미터에 대해서도 표현할 수 있으나 여기에서는 시불변 파라미터에 대해서만 고려한다.  $\theta$ 에서 각각의 파라미터들은 (2)와 같이 각각의 끝점값들 사이의 범위를 가지며 각각의 끝점값들은 설계자가 이미 알고 있는 값들이다.

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \quad (2)$$

이는 파라미터 벡터  $\theta$ 는 파라미터 상자(parameter box)라고 불리는 고차원사각형(hyper-rectangle)의 범위 내에 존재하는 값을 의미하므로, 다음의 (3)에서  $\Theta$ 는 이 파라미터 상자의  $2^k$  개의 정점들의 집합이다.

$$\Theta := \{(w_1, w_2, \dots, w_k) : w_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\} \quad (3)$$

불확실한 시스템 행렬  $A(\theta)$ 는 (4)와 같이 불확실한 파라미터들에 의존하면서 파라미터들에 대하여 선형결합의 형태로 표현되는 구조적 파라미터 불확실성을 갖는 시스템이다.

$$A(\theta) = A_0 + \Delta A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 + \dots + \theta_k A_k \quad (4)$$

여기서  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_k$ 는 고정된 값으로 이미 알고 있는 행렬들이다.

Lyapunov 함수를 정의함에 있어서도  $A(\theta)$ 와 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 종속하는 형태로 표현한다.

$$V(x(t), \theta) = x^T(t)P(\theta)x(t) \quad (5)$$

$$P(\theta) = P_0 + \Delta P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \dots + \theta_k P_k \quad (6)$$

Lyapunov 함수를 (5)와 같이 불확실성 파라미터들의 함수로 표현하면 계의 불확실성을 시변이 아닌 시불변으로 다룰 수 있게 된다.

정의 1: 유사 이차 안정성(AQS) [11]

모든 가능한 파라미터들의 벡터  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 에 대하여 (7)과 (8)을 만족하는  $k+1$ 개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 가 존재한다면, (1)의 불확실한 선형계는 유사 이차 안정하다.

$$P(\theta) = P_0 + \theta_1 P_1 + \theta_2 P_2 + \dots + \theta_k P_k > 0 \quad (7)$$

$$L(\theta) = A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) < 0 \quad (8)$$

정의 1은 (1)의 시불변 불확실성을 가지는 선형계에 대하여 모든 가능한 시불변 불확실성  $\Delta A(\theta)$ 의 범위와 모든 초기치  $x_0$ 에 대하여  $V(x(t), \theta) > 0$ 이고  $dV(x(t), \theta)/dt < 0$ 를 만족한다. (8)에서  $A(\theta)$ 와  $P(\theta)$ 가  $\theta$ 에 대한 함수로 표현되었다 하더라도, (1)의 불확실한 선형 계가 AQS를 만족하는지 만족하지 않는지를 평가하는 것은 일반적으로 이론적으로나 수치적으로 모두 다루기 쉽지 않다. 왜냐하면 AQS의 검사에 있어서는 (8)은  $\theta$ 에 대하여 볼록풀이 아니기 때문이다. 그러나 AQS의 검사에 있어서 멀티볼록풀(multi-convexity)의 개념을 도입하면 볼록풀이 회복되고[11], 상용 프로그램인 MATLAB<sup>®</sup>에서 제공하는 LMI toolbox[13] 등을 이용할 수 있다.

### III. 강인 포화 제어기

본 논문은 구동기의 포화가 존재하는 불확실한 선형 시불변계에 대하여 구조적 파라미터 불확실성의 상하한 내에서 폐루프계의 강인 안정성이 해석적으로 보장되는 강인 포화 제어기를 다루고자 한다. 이를 위해 공칭 선형계에 대하여 Lyapunov 안정성 조건을 이용하여 설계된 준최적 뱁뱁 제어 방법([7])이 불확실한 선형계로 확장된다. 불확실한 파라미터들에 대하여 종속하는 형태로 표현되는 불확실한 선형계에 제어력이 있는 경우를 고려해 보자.

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(\theta))x(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \quad (9)$$

여기서  $B$ 는 제어입력 벡터이고, 제어력  $u(t)$ 의 최대값은  $u_{\max}$ 로 (10)의 제한조건에 의해서 구속된다.

$$|u(t)| \leq u_{\max} \quad (10)$$

이 경우에 Lyapunov 함수를 앞의 (5)와 같이 불확실한 파라미터들에 대하여 종속하는 형태로 정의하고, (9)의 시스템과 (5)의 Lyapunov 함수에 대하여 앞의 AQS를 적용한다. Lyapunov 함수를 시간에 대하여 미분하면 (11)이 얻어진다.

$$\dot{V}(x, \theta) = x^T [A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta)] x + 2x^T P(\theta) Bu \quad (11)$$

강인 안정성을 보장하기 위해서는 (10)의 제어력 제한 조건 하에서 파라미터들에 종속하는 Lyapunov 함수의 시간 미분치 (11)이 항상 0보다 작아야한다. 본 논문에서는 다음의 강인 포화 제어기 (12)를 제안한다.

$$u(t) = -\text{sat}[\delta B^T P_0 x(t)] \quad (12)$$

이 제어기는 공칭 선형계에 대한 준최적 뱁뱁 제어기 ( $u(t) = -u_{\max} \cdot \text{sgn}[B^T P_0 x(t)]$ )와 비슷한 형태를 가지는 것으로, 부호 함수 대신에 포화 함수를 사용하여 표현되었다. 포화 함수의 사용은 부호함수 형태의 제어기들에서 발생하는 제어 채터링(control chattering) 문제를 극복하기 위하여

전형적으로 선택하는 방법이다. 강인 포화 제어기 (12)의 안정성을 보장하기 위한 다음의 정리 1을 제안한다. 정리 1은 이 제어기에 대한 LMI 형태의 충분조건들을 제시한 것으로, 수동 시스템이 안정한 경우에 제어기의 해가 존재한다.

정리 1: (9)의 불확실한 시불변 선형계에 대하여, 만약 (13)-(15)를 모두 만족하는  $k+1$  개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와 양정대칭행렬  $M_a$ 가 존재하고, 이에서 구해진  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와  $M_a$ 에 대하여 (16)을 만족하는 양의 값  $\delta$ 가 존재한다면, 이 불확실한 시불변 선형계는 (12)의 포화 제어기에 의해서 강인 안정성이 보장된다.

$$P(w) > 0 \quad \text{for all } w \in \Theta \quad (13)$$

$$A(w)^T P(w) + P(w) A(w) + M_a < 0 \quad \text{for all } w \in \Theta \quad (14)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, k \quad (15)$$

$$M_a + \delta \{ 2P_0 B B^T P_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i (P_0 B B^T P_i + P_i B B^T P_0) \} > 0 \quad (16)$$

for all  $w \in \Theta$

증명: (12)의 제어기를 다시 쓰면 (17)과 같다.

$$\begin{aligned} u(t) &= -\beta(x(t)) \cdot \delta B^T P_0 x(t) \\ \beta(x(t)) &= \frac{\text{sat}(\delta B^T P_0 x(t))}{\delta B^T P_0 x(t)} \\ \beta(x(t)) &= 1 \quad \text{if } B^T P_0 x(t) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

여기서  $0 < \beta(x(t)) \leq 1$ 이다.

(9)의 계와 (5)의 Lyapunov 함수에 대하여 앞의 AQS를 적용한다. Lyapunov 함수를 시간에 대하여 미분하여 얻어진 (11)에 (12)의 제어력을 대입하여 정리하면 (18)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T [A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta)] x \\ &+ x^T [-\beta \delta \{ 2P_0 B B^T P_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i (P_0 B B^T P_i + P_i B B^T P_0) \}] x \end{aligned} \quad (18)$$

강인 포화 제어에 있어서 (18)이 0보다 작다는 것이 의미하는 바는 첫 번째 항이 음이 되게 하는  $k+1$ 개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 을 두 번째 항에 대입했을 때 두 번째 항이 양이 되지 않으면 (12)의 포화 제어기의 강인 안정성을 보장할 수 있다는 것이다. [11]에서 제시된 멀티볼록풀의 개념을 이용한 LMI 충분조건들이 만족되면, (18)의 첫 번째 항은 항상 0보다 작아짐을 수학적으로 확인할 수 있다. 그러나 (18)의 두 번째 항은  $\delta > 0$ 에 대하여 일반적으로 양이 되지 않는다는 보장이 없다. 그러므로 양의 값을 가지는  $\delta$ 를 얻기 위하여 양정대칭행렬  $M_a$ 를 도입한다. (18)의 두 항에 각각 양정대칭행렬  $M_a$ 를 더하고 빼면 (19)와 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T [A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) + M_a] x \\ &+ x^T [-M_a - \beta \delta \{ 2P_0 B B^T P_0 + \sum_{i=1}^k \theta_i (P_0 B B^T P_i + P_i B B^T P_0) \}] x \end{aligned} \quad (19)$$

따라서 (19)의 첫 번째 항이 음이 되게 하는  $k+1$ 개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와 양정대칭행렬  $M_a$ 를 두 번째 항에 대입했을 때 두 번째 항이 음이 되면 (12)의 포화 제어기의 강인 안정성을 보장할 수 있게 된다. (13)-(15)의  $2^{k+1} + k$ 개의 LMI 충분조건들을 모두 만족하는  $k+1$ 개의 대칭행렬  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k$ 와 양정대칭행렬  $M_a$ 가 존재하면 (19)의 첫 번째 항은 항상 음이 된다([11]을 참조하면 쉽게 증명됨). 다음으로  $\rho_i = \delta\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )로 두면 각각의 정점들은  $\underline{\delta\theta}_i \leq \rho_i \leq \overline{\delta\theta}_i$  이므로 (19)의 두 번째 항은 (20)과 같다.

$$-x^T[M_a + \beta(\delta(2P_0BB^TP_0) + \sum_{i=1}^k \rho_i(P_0BB^TP_i + P_iBB^TP_0))]x \quad (20)$$

여기서 먼저  $\beta = 1$ 인 경우를 고려해 보자. (21)을 만족하면 (20)은 항상 음이 된다.

$$M_a + \delta(2P_0BB^TP_0) + \sum_{i=1}^k \rho_i(P_0BB^TP_i + P_iBB^TP_0) > 0 \quad (21)$$

여기서  $\Phi$ 를 (22)와 같이  $\rho_i$ 의 각 끝점값들로 이루어진 고차원사각형 파라미터 상자의  $2^k$ 개의 정점들의 집합으로 정의하자.

$$\Phi := \{(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k) : \psi_i \in \{\underline{\rho}_i, \overline{\rho}_i\}\} \quad (22)$$

$M_a, P_0BB^TP_0, P_0BB^TP_i + P_iBB^TP_0$ 는 각각 대칭행렬이므로,  $\delta > 0$ 에 대하여 (21)의 LMI는 변수  $\rho_i$ 에 대하여 볼록 구속(convex constraint)이다. 따라서 (21)이 볼록풀이므로 (21)이 항상 양이 되기 위한 필요충분 조건은  $2^k$ 개의  $\rho_i$ 의 각각의 정점들 모두에서 (21)이 만족되는 것이다. (21)은 (16)과 등가이다.

다음으로  $0 < \beta < 1$ 인 경우를 고려해 보자.  $\delta > 0$ 에 대하여 (21)이 만족되면 (20)은 항상 음임을 쉽게 보일 수 있다. 그러므로  $\delta > 0$ 에 대하여 (16)이 만족되면 (20)은 항상 음이다. ■

주 1: (14)에서 행렬  $M_a$ 를 포함하여 총  $k+2$ 개의 변수를 가지는 LMI를 풀게 된다. 이 행렬  $M_a$ 는 의미상 제어기 설계 파라미터이다. 그러므로 행렬  $M_a$ 를 임의의 값으로 두면 변수의 수가  $k+1$ 개로 줄어서 수치적 계산의 부담을 줄일 수 있다. 또한 (16)에서 LMI 조건들의 수는  $k+1$ 개이고  $\delta$ 의 최대치( $\delta_{\max}$ )는 유한한 값이므로,  $\delta_{\max}$ 의 값은 (16)에서  $\delta$ 을 조금씩 증가시켜서  $k$ 개의 LMI 조건을 만족하는 지를 확인하면 쉽게 구할 수 있다.

주 2: 정리 1의 LMI 형태의 충분조건을 수치적으로 검사함에 있어서 수치적 수행상의 어려운 점은 (15)의 멀티볼록 조건들이다. [11]에서 제시된 것처럼 반양정 대칭행렬  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ )를 도입하여 정리 1의 (14)와 (15)의 LMI 조건들을 다음의 (23)-(25)의 조건들로 대체하면, (15)의 멀티볼록 조건들이 다소 완화되어 수치적으로 용이하게

LMI를 풀 수 있다. 임의의 값  $\lambda_i \geq 0$ 에 대하여  $N_i = \lambda_i I$ 로 두면 수치적으로 쉽게 LMI를 풀 수 있다.

$$A(w)^TP(w) + P(w)A(w) + M_a + \sum_{i=1}^k u_i^2 N_i < 0 \text{ for all } w \in \Theta \quad (23)$$

$$A_i^T P_i + P_i A_i + N_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, k \quad (24)$$

$$N_i \geq 0 \text{ for } i = 1, 2, \dots, k \quad (25)$$

#### IV. 수치 예제

여기에서는 본 논문에서 제안된 강인 포화 제어기 (12)의 안정성을 수치 예제를 통하여 살펴본다. 특히 특정 파라미터 불확실성에 대한 포화 슬라이딩 모드 제어기의 불안정성을 보임으로 제안된 강인 포화 제어기의 유용성을 입증한다. 정리 1에서의 LMI 충분조건들에 대한 수치적인 계산은 상용 프로그램인 MATLAB<sup>®</sup>에서 제공하는 LMI toolbox [13]를 이용하였다.

수치 예제는 Fig. 1과 같이 2자유도 진동계에 하나의 구동기가 있는 경우를 고려한다. 공칭계의 질량  $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$ , 강성  $k_1 = k_2 = 1\text{N/m}$ , 감쇠  $c_1 = c_2 = 0.01\text{Ns/m}$ 이다. 각 강성에 불확실성  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ )이 있는 경우를 고려하면 불확실성을 가지는 강성은  $k_1(1 + \theta_1)$ ,  $k_2(1 + \theta_2)$ 로 둘 수 있고, 계의 운동 방정식은 (9)와 같다. 여기서 상태 벡터  $x = [x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2]^T$ ,  $A(\theta)$ 는 (26)과 같고, 제어입력 벡터  $B = [0 \ 0 \ 1/m_1 \ 0]^T$ 이다.

$$A(\theta) = A_0 + \theta_1 A_1 + \theta_2 A_2 \quad (26)$$

여기서

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1 + k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1 + c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

최대 제어력  $u_{\max} = 1\text{N}$ , 초기 상태  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 6]^T$ 인 경우를 고려하고, 불확실성을 가지는 강성은 각각  $k_1(1 - \theta_s)$ ,  $k_2(1 + \theta_s)$ 인 경우에 대하여 살펴본다.

먼저 참고문헌 [9,10]에서 제시된 포화 슬라이딩 모드 제어기(SSMC)의 강인 안정성을 살펴보자. 설계된 슬라이딩면  $S = 4.0301x_1 + 0.4421x_2 + 1.0\dot{x}_1 + 3.2481\dot{x}_2 = 0$ 이다. 포화 슬라이딩 모드 제어기는 Fig. 2에서와 같이 공칭계에서 제어력 포화가 발생하는 경우에도 제어기의 안정성은 해석적으로 보장된다. Fig. 1은 공칭계에서의 변위( $x_1$ )와 제어력 파형을 보여 주고 있다. 그러나 이 포화 슬라이딩 모

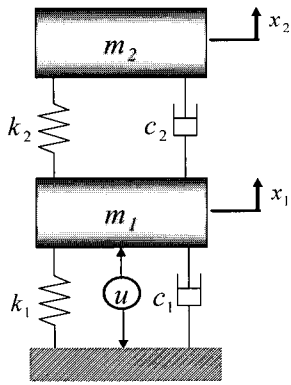


그림 1. 하나의 구동기가 설치된 2자유도 진동계.  
Fig. 1. 2DOF vibrating system with one actuator.

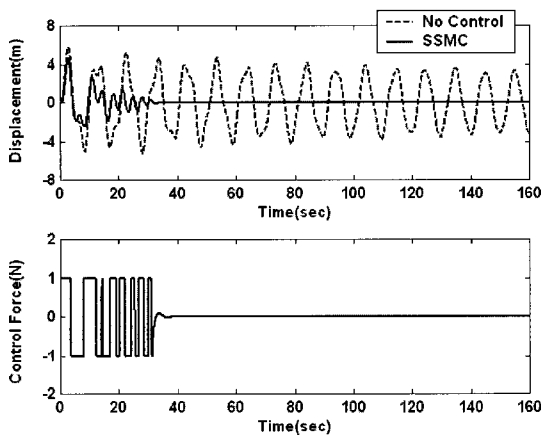


그림 2. 포화 슬라이딩 모드 제어기를 적용 했을 때의 공칭계에서의 변위와 제어력.  
Fig. 2. Displacement and control force for nominal system applying the saturated sliding mode controller.

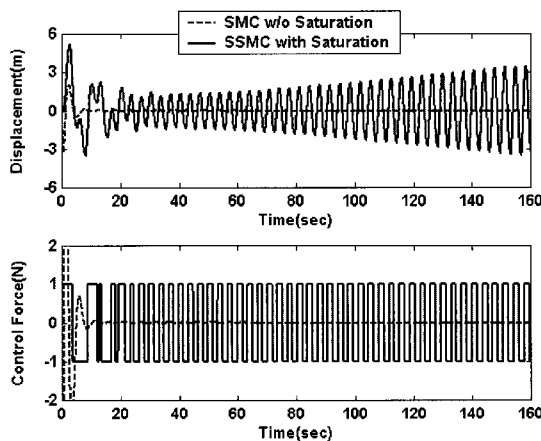


그림 3. 불확실한 계( $\theta_s = 0.2$ )에서의 변위와 제어력 : 슬라이딩 모드 제어기와 포화 슬라이딩 모드 제어기.  
Fig. 3. Displacements and control forces for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) : sliding mode controller and saturated sliding mode controller.

드 제어기는 파라미터의 불확실성  $\theta_s$ 가 0.2보다 커지면 불안정해 짐을 수치 실험을 통하여 확인할 수 있었다. 포화 슬라이딩 모드 제어기는 슬라이딩 모드 제어기(SMC)의 설계 방법에 기초를 둔 것으로, 공칭계에 대하여 제어기를 설계하고 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성은 슬라이딩 모드 제어의 강인 특성을 이용하여 설명된다. 그러므로 강인 안정성이 보장되는 파라미터 불확실성의 상하한을 해석적으로 규정할 수 없다. 그리고 계의 파라미터 불확실성에 대한 강인한 특성은 계가 슬라이딩 모드에서 움직일 때만 보장되는 것이므로, 계의 응답의 전체 구간에서의 강인 안정성을 해석적으로 보장하지 못한다. Fig. 3은  $\theta_s = 0.2$ 인 경우에 대하여 포화 슬라이딩 모드 제어기와 슬라이딩 모드 제어기에 의한 변위(위)와 제어력 파형을 보여 주고 있다. 포화 슬라이딩 모드 제어기의 경우 파라미터 불확실성이 존재할 때 바람직하지 못한 제어력이 오히려 계의 2차 모드를 가진하여 계를 불안정하게 함을 보여주고 있다. 포화를 고려하지 않은 슬라이딩 모드 제어기는 이 경우에 강인 안정성이 보장됨을 확인할 수 있는데, 이는 포화되지 않는 큰 제어력을 사용함으로써 계의 응답을 슬라이딩 모드에 빨리 이르게 하기 때문이다(Fig. 4 참조). Fig. 4는  $\theta_s = 0.2$ 인 경우에 대하여 포화 슬라이딩 모드 제어기와 슬라이딩 모드 제어기에 의한 슬라이딩 면을 비교하여 보여주고 있다. Fig. 4를 통하여 포화 슬라이딩 모드 제어기의 강인 안정성이 보장되지 못하는 이유를 설명할 수 있다. 제어력에 포화가 생기면 계의 응답이 슬라이딩 모드에 빨리 이르지 못하므로 파라미터 불확실성이 존재하는 경우에 강인 안정성이 보장되지 않는 것이다.

다음으로 본 논문에서 제안된 강인 포화 제어기(RSC)를 살펴보자. 강인 포화 제어기의 유용성을 입증하기 위하여 각 강성의 불확실성의 상하한  $|\theta_i| \leq 0.9$  ( $i = 1, 2$ )로 두고 제어기를 설계하였다. 제어기 설계 파라미터  $M_a = 5e - 5I$ 로 두고 정리 1을 적용하였다. 공칭계에 대해서는  $\delta$ 의 최

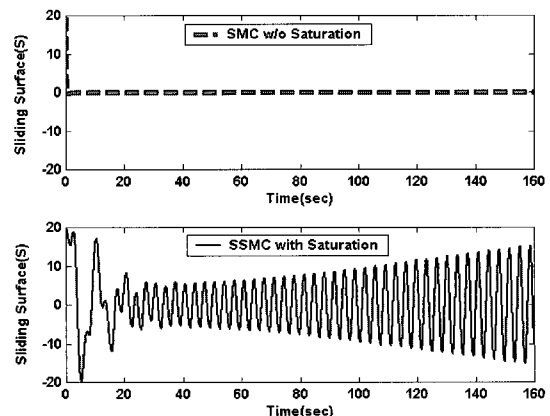


그림 4. 불확실한 계( $\theta_s = 0.2$ )에서의 슬라이딩 면 : 슬라이딩 모드 제어기와 포화 슬라이딩 모드 제어기.  
Fig. 4. Sliding surfaces for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) : sliding mode controller and saturated sliding mode controller.

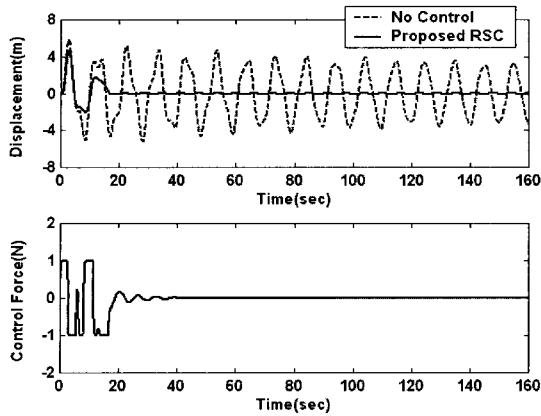


그림 5. 제안된 강인 포화 제어기를 적용 했을 때의 공칭계에서의 변위와 제어력.

Fig. 5. Displacement and control force for nominal system applying the proposed robust saturation controller.

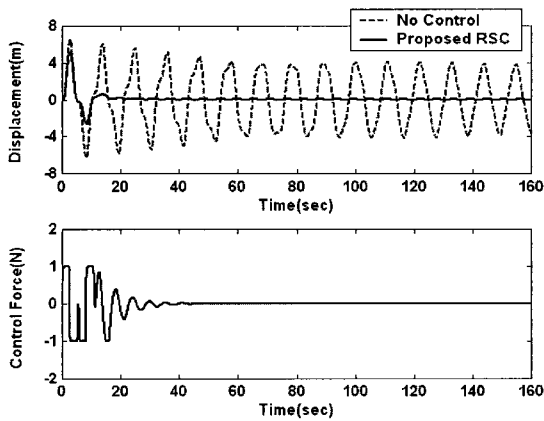


그림 6. 제안된 강인 포화 제어기를 적용 했을 때의 불확실한 계( $\theta_s = 0.2$ )에서의 변위와 제어력.

Fig. 6. Displacement and control force for uncertain system ( $\theta_s = 0.2$ ) applying the proposed robust saturation controller.

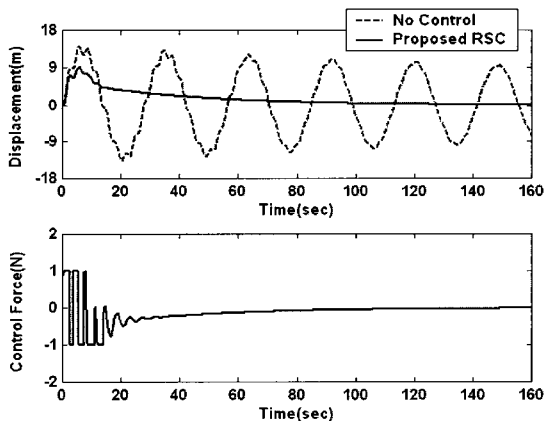


그림 7. 제안된 강인 포화 제어기를 적용 했을 때의 불확실한 계( $\theta_s = 0.9$ )에서의 변위와 제어력.

Fig. 7. Displacement and control force for uncertain system ( $\theta_s = 0.9$ ) applying the proposed robust saturation controller.

대치( $\delta_{max}$ )는 무한한 값을 가지지만, 불확실한 계에서의  $\delta_{max}$ 는 고려된 파라미터 불확실성에 대하여 강인 안정성을 보장하기 위하여 유한한 값을 가지게 되는데  $\delta_{max} = 15.2$ 로 구해졌다. (12)의 강인 포화 제어기의 적용 시에  $\delta = 15.2$ 로 두고 수치실험을 수행하였다. Fig. 5는 공칭계에서, Fig. 6은  $\theta_s = 0.2$ 인 불확실한 계에서, 그리고 Fig. 7은  $\theta_s = 0.9$ 인 불확실한 계에서의 변위( $\alpha$ )와 제어력 파형을 각각 보여 주고 있다. 제안된 강인 포화 제어기는 설계 시에 고려된 파라미터 불확실성의 상하한 내에서는 계의 응답의 전체 구간에서 강인 안정성이 해석적으로 보장되는데, 위의 수치실험 결과들은 이를 입증하는 것이다.

V. 결론

본 논문의 목적은 구동기의 포화와 구조적 파라미터 불확실성이 동시에 존재하는 선형 시불변계에 대하여 강인 안정성이 해석적으로 보장되는 강인 포화 제어기를 개발하는 것이다. 이를 위하여 유사 이차 안정성의 정의와 멀티블록꼴의 개념을 바탕으로 강인 포화 제어기를 새로이 제안하였다. 정리 1에서는 제어기 설계 파라미터 행렬  $M_u$ 를 도입하여 제안된 제어기의 해가 존재하기 위한 LMI 형태의 충분조건들을 제시하였다. 수치 실험을 통하여 제안된 강인 포화 제어기의 강인 안정성과 유용성을 확인하였다. 제안된 강인 포화 제어기는 고려된 구조적 파라미터 불확실성의 상하한 내에서 페루프계의 강인 안정성을 보장함을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- [1] D. S. Bernstein and A. N. Michel, "A chronological bibliography on saturating actuators," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 5, pp. 375-380, 1995.
- [2] W. M. Wonham and C. D. Johnson, "Optimal bang-bang control with quadratic performance index," *Transactions on ASME, Ser. D*, vol. 86, pp. 107-115, 1964.
- [3] B. Friendland, "Limiting forms of optimum stochastic linear regulators," *Journal of Dynamic Systems Measurement Control, Transactions on ASME, Ser. G*, vol. 93, no. 3, pp. 135-141, 1971.
- [4] L. Meirovitch, *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York, 1990.
- [5] B. Indrawan, T. Kobori, M. Sakamoto, N. Koshika, and S. Ohri, "Experimental verification of bounded-force control method," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 25, no. 2, pp. 179-193, 1996.
- [6] J. Mongkol, B. Bhartia, and Y. Fujino, "On Linear-Saturation(LS) control of buildings," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 25, pp. 1353-1371, 1996.
- [7] Z. Wu and T. T. Soong, "Modified bang-bang control

law for structural control implementation," *Journal Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 122, pp. 771-777, 1996.

[8] G. P. Cai, J. Z. Huang, F. Sun, and C. Wang, "Modified sliding-mode bang-bang control for seismically excited linear structures," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 29, pp. 1647-1657, 2000.

[9] J. N. Yang, J. C. Wu, and A. K. Agrawal, "Sliding mode control for nonlinear and hysteretic structures," *ASCE, Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, no. 12, pp. 1330-1339, 1995.

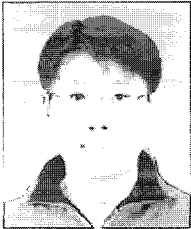
[10] J. N. Yang, J. C. Wu, and A. K. Agrawal, "Sliding mode control for seismically linear structures," *ASCE*,

*Journal of Engineering Mechanics*, vol. 121, no. 12, pp. 1386-1390, 1995.

[11] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali, "Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 436-442, 1996.

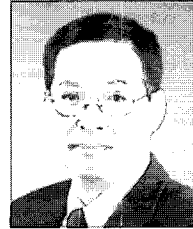
[12] P. P. Khargonekar, I. R. Petersen, and K. Zhou, "Robust stabilization of uncertain linear systems : Quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 35, no. 3, pp. 356-361, 1990.

[13] P. Gahinet and A. Nemirovski, *The LMI Control Toolbox*, The MathWorks Inc., 1995.



**임 채 옥**

1998년 부산대학교 기계설계공학과 졸업. 2000년 한국과학기술원 기계공학과 대학원 석사. 2006년 동 대학원 박사. 관심분야는 자동제어, 제어이론, 포화제어, 강인제어, 능동진동제어 및 장치개발.



**박 영 진**

1980년 서울대학교 기계공학과 졸업. 1982년 동 대학원 석사. 1987년 the university of michigan 박사. 1987년~1988년 the university of michigan research fellow, 1988년~1990년 New Jersey Institute of Technology assistant professor. 1990년~현재 한국과학기술원 기계공학과 교수. 관심분야는 자동제어, 3차원 입체음향, 능동 소음 및 진동제어, MR유체, 차량의 안정성 제어, 차량의 고장진단, 제어이론, 강인제어, 시스템규명.



**문 석 준**

1998년 서울대학교 조선해양공학과 졸업. 1990년 동 대학원 석사. 1995년 동 대학원 박사. 1996년~현재 한국기계연구원 e-엔지니어링연구센터 선임연구원. 관심분야는 진동/충격 제어 및 장치개발.



**박 윤 식**

1972년 서울대학교 기계공학과 졸업. 1979년 Iowa state university 석사. 1981년 동 대학원 박사. 1981년~1984년 한국과학기술원 기계공학부 선임연구원. 1984년~현재 한국과학기술원 기계공학과 교수. 관심분야는 동역학, 진동 및 소음 제어, 구조물 동특성 변경법, 기계 및 매니플레이터의 동역학, 모달 해석, 시스템 규명.