

< 논문 >

설계공간 최적화를 이용한 뼈 성장 모사

장 인 권[†] · 곽 병 만^{*}

(2006년 2월 10일 접수, 2006년 3월 23일 심사완료)

A Simulation Method for Bone Growth Using Design Space Optimization

In Gwun Jang and Byung Man Kwak

Key Words : Design space Optimization(설계공간 최적화), Finite Element Method(유한요소법), Bone Fracture(골절), Bone Growth Simulation(뼈 성장 모사)

Abstract

Bone fracture healing is one of the important topics in biomechanics, demanding computational simulations due to the difficulty of obtaining experimental or clinical results. In this study, we adopt the design space optimization method which was established by the authors as a tool for the simulation of bone growth using its evolutionary characteristics. As the mechanical stimulus, strain energy density is used. We assume that bone tissues over a threshold strain energy density will be differentiated and bone tissues below another threshold will be resorbed. Under compression and torsion as loadings, the filling process of the defect is well illustrated following the given mechanical criterion. It is shown that the design space optimization is an excellent tool for simulating the evolutionary process of bone growth, which has not been possible otherwise.

기호설명

- ρ : 밀도
- N : 설계변수의 개수
- $U(\rho)$: 절점 변위 벡터
- F : 하중 벡터
- $K(\rho)$: 강성 행렬
- k_i : 국부 강성 행렬
- B_i : 변형률 보간 행렬
- D : 응력-변형률 관계 행렬
- ν : 포아송비
- E : 영계수

1. 서론

골절 치유(fracture healing)는 생체역학의 중요한 주제 중 하나이다. 이에 관련된 치료법 및 현상을 파악하기 위해 임상적, 실험적인 방법을 발전시키는 것은 매우 중요한 사항이다. 최근들어 많은 연구자들에 의해 다양한 인자들을 고려한 근골격 관련 실험들이 수행되어져 왔다. 이러한 노력에도 불구하고 여전히 많은 의문점이 남는 것은 실험 환경과 실제 생체내 환경 차이에서 기인하는 점이 크다. 또한, 다양한 인종, 나이, 건강상태, 주거환경 등의 요인들이 실험값에 끼치는 영향 치수를 파악하여야만 한다. 이와 같은 어려움으로 인해 다양한 조건에 대한 예측이 가능한 수치 모델의 개발이 요구되어져 왔다. 그러나, 많은 경우에 있어서 수치모델들은 직접적으로 검증될 수 없고, 단지 임상실험의 결과와 수치결과와의 비교를 통해 간접적인 검증만이 가능하다.

[†] 책임저자, 회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : jangin@khp.kaist.ac.kr
TEL : (042)869-3051 FAX : (042)869-8270

^{*} 회원, 한국과학기술원 기계공학과

근골격계에 대한 수치적 접근을 살펴보면, 골세포 분화가 기계적 자극과 관련이 있다는 실험적 증거로 인해⁽¹⁾ 지금까지 많은 연구자들이 각각의 골절 치유 과정에서의 변형률(strain)과 응력(stress)을 구하기 위해 유한요소법에 근거한 수치적 모델을 이용하여 왔다.⁽²⁻⁵⁾ 그러나, 이러한 연구로는 성장 또는 치유 과정을 모사할 수 없었다. 이들은 세포 분화를 촉진시키는 자극으로 응력, 변형률, 변형률 에너지 밀도 등을 사용하였다. 본 논문에서는 변형률 에너지 밀도를 세포 분화를 위한 자극으로 선택하였다.⁽⁶⁾

본 논문에서는 저자들에 의해 개발되어진 설계공간 최적화 기법⁽⁷⁻⁹⁾을 골절 치유 과정에서의 뼈 성장 모사에 적용하여 수치적 모사의 가능성과 앞으로의 발전 방향을 제시하고자 한다.

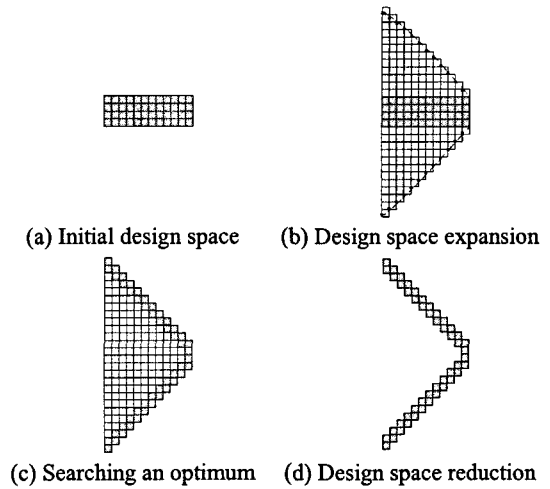


Fig. 1 A brief procedure of design space adjustment.

2. 설계공간 최적화 기법

설계공간 최적화 기법은 새로이 제안되어진 위상 최적설계 방법론으로써 기존의 위상 최적설계 방법과 비교해 볼 때 설계공간을 변화시킬 수 있다는 특징이 있다. 이 기법은 설계공간 조정과 설계공간 세분화라는 2개의 주요 개념으로 구성되어 있다. 자세한 내용은 각각의 참고문헌에서 살펴볼 수 있다.

2.1 설계공간 조정

기존의 위상 최적설계에서는 선택되어진 공간 내에서만 설계가 가능했다. 김일용과 광병만⁽⁷⁾은 가상의 중간단계인 피벗 공간(pivot space)을 도입하여 설계공간이 확장되어질 때의 민감도를 수학적으로 계산하여 이를 위상최적설계에 적용하였다. 이를 이용할 경우 수학적 기반 하에 초기 설계공간을 확장하거나 축소하는 등의 조정이 가능해진다.

이를 토대로 장인권과 광병만⁽⁸⁾은 기존의 설계공간 최적화 기법을 실용적으로 사용할 수 있도록 고정격자(fixed grid)와 혼합 가상물질(mixed artificial material), 그리고 다층 확장 기법(multi-layer expansion)을 포함한 설계공간 조정법을 확립하여 효율성을 획기적으로 높였다. 이를 적용할 경우 단순 외팔보 문제의 개략적인 전개과정은 Fig. 1 과 같이 매우 단순한 초기 뼈대 영역으로부터 일련의 확장과 축소를 통해 최적해를 구하게 된다.

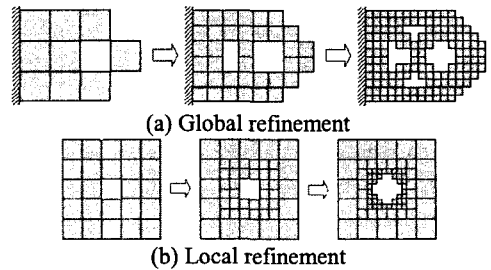


Fig. 2 A brief procedure of design space refinement.

2.2 설계공간 세분화

일반적인 위상최적설계는 치수최적설계나 형상 최적설계에 비해 상당히 많은 수의 설계변수를 포함하고 있으며, 대개 설계변수의 수는 해당 유한요소모델의 요소수에 비례한다. 이에 따른 많은 계산량이 위상최적설계의 단점 중 하나로 꼽히고 있다.

장인권과 광병만⁽⁹⁾은 보다 효율적인 계산을 위해 전체 영역에 걸쳐 점진적으로 요소수를 증가시키거나(광역 세분화) 혹은 국부적인 영역에서만 세분화를 할 수 있는(국부 세분화) 설계공간 세분화법을 제안하였다. 이 방법을 이용할 경우 낮은 요소 밀도(즉, 적은 요소수가 필요)에서 대강의 최적해를 구한 후, 요소 세분화를 통해 점진적으로 최적해를 개선시켜 나갈 수 있다. 이는 처음부터 높은 요소 밀도를 사용하는 기존 방법에 비해 보다 효율적이고, 빠른 계산을 가능하게 한다. 개략적인 전개과정은 Fig. 2 에 나타나 있다.

3. 뼈 성장 모사로의 적용

3.1 설계공간 최적화 기법의 변경

설계공간 최적화 기법은 일반적인 구조최적화 문제에 맞추어 개발되어진 것이다. 따라서, 이를 생체역학에 적용하기 위해서는 부분적인 변경이 필요하다. 가장 큰 차이점은 뼈 성장 모사의 경우 설계공간 확장 및 축소가 일반적인 밀도를 기준으로 이루어지는 것이 아니라 변형을 에너지 밀도에 근거한다는 점이다. 본 논문에서는 변형을 에너지 밀도 SED_1 보다 큰 값을 가진 요소인 경우 주변으로 요소를 확장하게 하였으며(세포 분화), SED_2 보다 작은 값을 가진 요소인 경우 그 요소를 제거하였다(세포 흡수).

임계치 선정을 위해 SED_1 으로는 같은 하중조건 하에서 결함이 없는 뼈의 최대 변형을 에너지 밀도를 선정하였고, SED_2 으로는 SED_1 의 절반의 값을 선정하였다. 위의 임계치들은 초기 연구를 위해 임의로 선정되어진 값들이며, 보다 자세한 생체역학적 연구를 통해 정확한 값들을 구할 수 있을 것이다.

설계공간 최적화 과정 중 설계공간 조정의 단계들은 골절 치유 과정에서 시간의 흐름과 연계되어질 수 있다. 즉, 일련의 설계공간 조정은 골절 치유 과정으로 고려할 수 있게 된다.

3.2 문제 단순화

본격적인 뼈 성장 모사에 앞서 초기연구 과정으로써 본 연구에서는 유한요소모델과 생체모델에서 단순화를 시도하였다. 우선 뼈모델의 경우 장골(long bone)을 동일한 직경을 가진 파이프 형상으로 단순화하고, 골절이나 손상된 부분(defect)을 표현하기 위해 해당 부위를 직육면체로 도려내었다. 또한, 실제 뼈의 물성치는 비등방이며 비균일하지만, 여기서는 균일 등방성(homogeneous isotropic)으로 간주하였다. 자세한 치수와 물성치는 Table 1에 나타나 있다.

Table 1 Material and physical properties of a bone model.

Material/physical property	Dimension
Outer radius of a bone	20 (mm)
Inner radius of a bone	8 (mm)
Length of a bone	400 (mm)
E_0	20×10^9 (N/m ²)
ν	0.3
Width of a defect	16 (mm)
Height of a defect	80 (mm)

유한 요소 모델의 측면에서 골절 부위 부근은 응력 집중 현상(stress concentration)이 발생하므로 보다 정확한 계산이 필요할 뿐만 아니라, 자세한 골절 치유 과정을 표현하기 위해서 모델의 세분화가 필요하다. 이를 제외한 나머지 부분은 특별한 물리 현상이 존재하지 않고, 또한 관심영역이 아니기 때문에 세분화할 필요가 없다. 이를 위해 설계공간 세분화 기법 중 국부세분화 기법을 이용하여 골절 부위 부근만 세분화하였다. 전 모델을 세분화할 경우와 비교해보면 전체적인 유한 요소 개수를 줄일 수 있으므로, 계산시간의 향상을 가져올 수 있게 된다. 국부세분화 기법을 적용한 뼈에 대한 유한요소모델은 Fig. 3에 나타나 있다.

하중조건으로는 뼈의 양끝단에 2 가지 각기 다른 하중조건을 가하였다. 첫번째 하중조건은 500N의 압축 하중을, 두번째로는 1N·m의 토크(torque)를 가하였다.

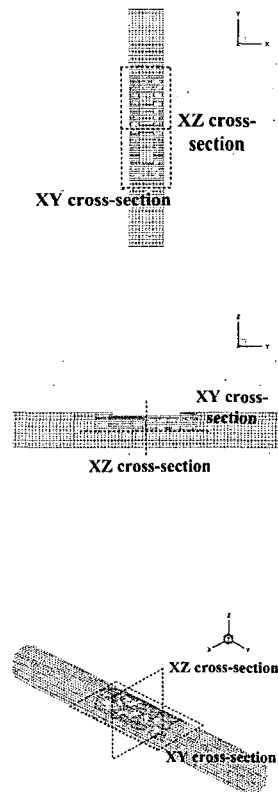


Fig. 3 FE model for a bone with a defect from different views

3.3 최적화를 위한 문제 수식화

설계공간 최적화를 위한 최적화 수식은 아래의 식과 같이 목적함수인 변형률 에너지 총합을 최소화하는 것이며, 질량 제한 조건을 가진다.

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & f(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho})^T \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{U}(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{Subject to} \quad & g(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \rho_i d\Omega \leq V_0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_i \leq 1 \\ \text{where} \quad & \boldsymbol{\rho} = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_N]^T \end{aligned}$$

설계변수는 각각의 요소에서의 밀도 ρ_i 이며, N 은 설계변수의 개수로 유한요소모델에서의 요소 개수와 같다. 강성 행렬 $\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho})$ 는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{k}_i(\rho_i) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}(\rho_i) \mathbf{B}_i d\Omega$$

응력-변형률 관계 행렬인 \mathbf{D} 는 3 차원 등방 재료인 경우 다음과 같이 표현되어진다.

$$\mathbf{D}(\rho_i) = \frac{E(\rho_i)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

영계수 E 는 다음과 같은 벌칙항을 가진다.

$$E(\rho_i) = \rho_i^n E_0$$

n 은 벌칙항 지수로 설계공간 최적화 기법의 경우 혼합가상물질(mixed artificial material)을 사용하므로 중심 요소(core element)에서는 $n=3$ 의 값을 가지고, 경계 요소(boundary element)에서는 $n=1$ 의 값을 가지게 된다.⁽⁸⁾ E_0 는 주어진 재료의 기준 영계수 값이다.

목적함수인 변형률 에너지 총합에 대한 설계변수 민감도(design variable sensitivity)는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\rho_i} &= \frac{d}{d\rho_i} \left(\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \mathbf{K} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho_i} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_i} \mathbf{U} \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \rho_i} \mathbf{U}_i \end{aligned}$$

설계공간의 변화시 발생하는 설계공간 민감도 (design space sensitivity)의 경우 피벗 공간을 이용하여 그 공간에 해당하는 요소의 밀도를 0 으로 극한을 취하면 다음과 같이 구해진다.

$$\left(\frac{df}{d\rho_i} \right)_{+, \rho_i \rightarrow 0+} = -\frac{1}{2} \mathbf{U}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial \rho_i} \right)_{+, \rho_i \rightarrow 0+} \mathbf{U}_i$$

아래와 같은 수렴조건을 만족할 경우 뼈 성장 모사를 위한 설계공간 최적화 과정을 멈추도록 하였다.

$$\frac{N_{\text{survived}}}{N_{\text{boundary}}} \leq 0.01$$

여기서 N_{boundary} 는 설계공간 조정시 새로이 덧붙여진 요소의 개수이며, N_{survived} 는 설계공간 조정시 덧붙여진 요소들 중 제거되지 않고 살아남은 요소의 개수이다.

3.4 결과 및 분석

3.4.1 500N의 압축하중

뼈 양 끝단에 500N의 압축하중을 가할 경우, 설계공간 조정이 진행됨에 따라 유한요소들이 점차적으로 결함부분(defect)을 메꾸면서 확장하여 나아간다. 총 40 번의 설계공간 조정을 통해 최종적인 상태에 도달할 수 있었으며, 그 메꿔짐 양상은 바깥부분에서 안쪽부분으로, 결함부분 전반에 걸쳐 진행되어졌다. 초기 상태에서의 유한요소의 개수는 11700 개이며, 최종 상태에서의 유한요소의 개수는 14308 개이다. 전체적인 최적화 과정 중 235 번의 유한요소해석이 수행되어졌고, 총 계산시간은 4.58 시간이 걸렸다. 최적화 과정 동안의 XY 및 XZ 축 단면(Fig. 3 참조)과 비스듬히 본 형상은 Fig. 4 에 나와있다.

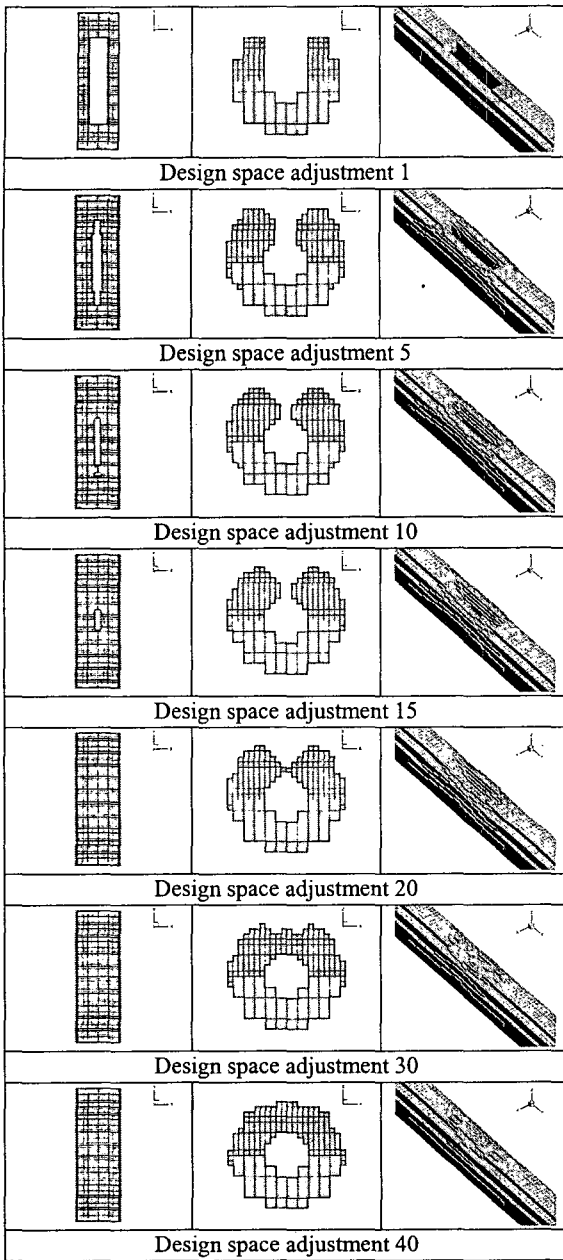


Fig. 4 Optimization history of cross-sections of a bone model under compression

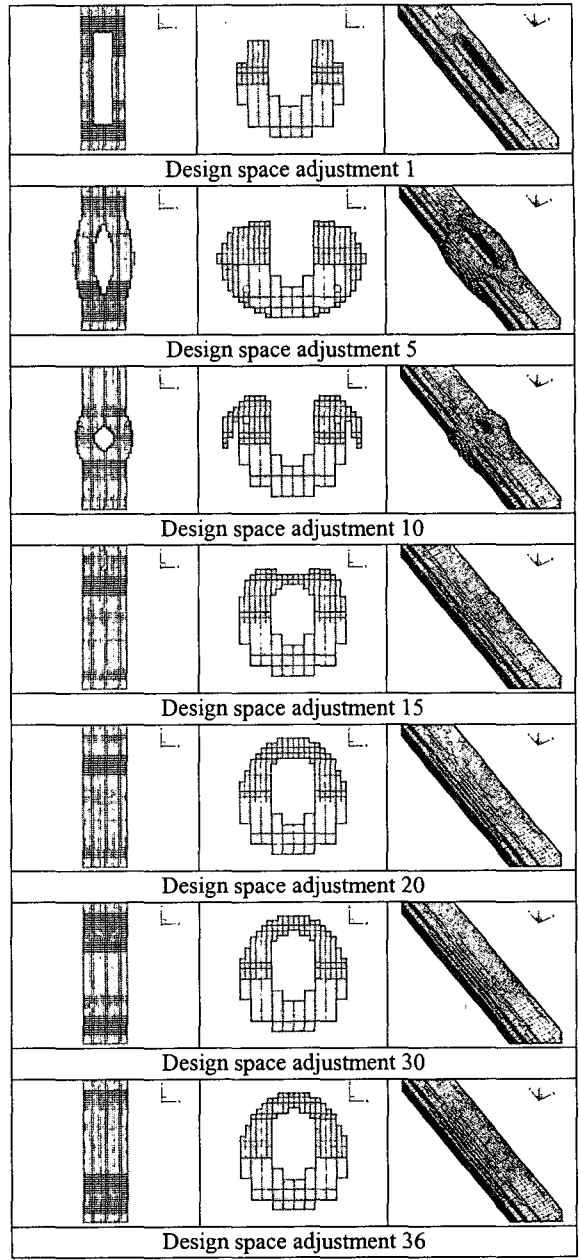


Fig. 5 Optimization history of cross-sections of a bone model under torsion

3.4.2 1N·m의 토크

하중조건으로 1N·m의 토크를 양 끝단에 가한 경우, 총 36번의 설계공간 조정을 통해 최종적인 상태에 도달할 수 있었다. 결합 부위의 메꿔짐 양상은 압축하중을 준 경우와 달리 토크에 의한 비틀림 응력 분포 양상에 따라 전반적으로 반경의 바깥 부분에 집중되어졌다. 그리하여, 최종 상태

에서의 반경은 초기 상태에서의 반경에 비해 약간 커진 것을 살펴볼 수 있다. 초기 상태에서의 유한요소의 개수는 11700개이며, 최종 상태에서의 유한요소의 개수는 14098개이다. 전체적인 최적화 과정 중 211번의 유한요소해석이 수행되어졌고, 총 계산시간은 5.78시간이 걸렸다. 최적화 과정 동안의 단면 형상은 Fig. 5에 나와있다.

4. 결론

참고문헌

생체역학 분야에서 수치 모사의 필요성과 그 적용 범위는 나날이 커져가고 있다. 특히, 뼈의 성장에 관련되어서는 인체 내부의 데이터를 측정하기 매우 힘들기 때문에 수치 모사를 이용할 경우 간접적으로 구할 수 있을 뿐만 아니라, 임상실험에 비해 들어가는 시간과 비용을 상당 부분 절감할 수 있게 된다. 본 연구에서는 저자들에 의해 개발되어진 설계공간 최적화 기법을 이용하여 뼈의 성장이라는 생체학 분야를 최적설계 관점에서 살펴 보았다. 설계공간 최적화 기법은 기존의 최적설계 방법론과는 달리 설계공간이 최적화 과정 동안 변화할 수 있기 때문에 뼈의 성장과 같은 진화적인 문제에 적용 가능하다.

비록 초기 연구로써 실제 문제에 비해 많은 단순화 과정을 거쳤으나, 뼈의 성장이 하중조건에 영향을 받아 그 경향이 달라지게 됨을 살펴볼 수 있었다.

추후 연구로써 구체적인 유한 요소 모델과 생체 모델 하에서 실제 생활에서의 하중 조건들을 적용하게 된다면 보다 실제에 가까운 뼈 성장 모사를 수행할 수 있을 것이다.

후 기

본 연구는 동시공학 설계 연구 센터(Center for Concurrent Engineering Design, CCED)와 부분적으로 삼성 석좌 기금의 지원에 의하여 이루어진 것임을 밝힙니다.

- (1) Sandberg, M. M. et al., 1993, "Gene Expression During Bone Repair," *Clinical Orthopaedics and Related Research*, pp. 289~292.
- (2) Carter, D. R. et al., 1988, "Correlations Between Mechanical Stress History and Tissue Differentiation in Initial Fracture Healing," *Journal of Orthopaedic Research*, Vol. 6. pp. 736~748.
- (3) Blenman, P. R. et al., 1989, "Role of Mechanical Loading in the Progressive Ossification of a Fracture Callus," *Journal of Orthopaedic Research*, Vol. 7. pp. 398~407.
- (4) Claes, L. E. and Heigele, C. A., 1999, "Magnitudes of Local Stress and Strain Along Bony Surfaces Predict the Course and Type of Fracture Healing," *Journal of Biomechanics*, Vol. 32, pp. 255~266.
- (5) Gardner, T. N. et al., 2000, "The Influence of Mechanical Stimulus on the Pattern of Tissue Differentiation in a Long Bone Fracture - an FEM Study," *Journal of Biomechanics*, Vol. 33, pp. 415~425.
- (6) Ament, C. H. and Hofer, E. P., 2000, "A fuzzy Logic Model of Fracture Healing," *Journal of Biomechanics*, Vol. 33, pp. 961~968.
- (7) Kim, I. Y. and Kwak, B.M., 2002, "Design Space Optimization Using a Numerical Design Continuation Method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 53, pp. 1979~2002.
- (8) Jang, I. G. and Kwak, B. M., 2005, "Evolutionary Topology Optimization Using Design Space Adjustment Based on Fixed Grid," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Accepted for publication.
- (9) Jang, I. G. and Kwak, B. M., 2005, "Evolutionary Topology Optimization for Large-Scale Problems Using Design Space Adjustment and Refinement," *Proc. of the 6th WCSMO Conference, Rio De Janeiro, Brazil*.