

< 논문 >

열복사를 고려한 열기계학적 해석을 위한 유한요소 부영역 결합법의 적용

신의섭[†] · 진지만^{*}

(2006년 1월 6일 접수, 2006년 4월 7일 심사완료)

Subdomain-Based Finite Element Method for Thermomechanical Analysis with Thermal Radiation

Eui Sup Shin and Ji Man Jin

Key Words: Subdomain(부영역), Finite Element Method(유한요소법), Thermomechanical Analysis
(열기계학적 해석), Thermal Radiation(열복사)

Abstract

A finite element method based on the penalized subdomain-interface framework is proposed for fully-coupled, nonlinear thermomechanical analyses with thermal contact and/or radiation boundaries. In the variational formulation, a well-known penalty functional scheme is adopted for connecting subdomains and interfaces that satisfy various continuity requirements. As a logical consequence, the whole domain can be arbitrarily divided into independently-modeled subdomains without considering the conformity of meshes along their interfaces. Since the nonlinearities due to the contact and radiation boundaries can be localized within a few subdomains, the computational efficiency of the present method is greatly increased with appropriate solution algorithms. By solving some numerical problems, these advantageous features are confirmed carefully.

1. 서론

일반적인 기계 장치에 있어서 열 제어의 기본 개념은 주어진 열기계학적(thermomechanical) 환경에서 모든 구성 요소와 부품들이 적정 온도 범위에서 작동하는 것이다. 따라서 역학적인 관점에서의 열 제어는 기계 장치의 안전과 보호를 위한 구조 설계/해석과 밀접하게 연관된다. 전체 또는 각종 서브시스템 차원에서의 정확하고 효율적인 열 해석 및 구조 해석을 통하여 기계 장치의 정상적인 기능과 작동 여부를 사전에 충분히 점검하여야 한다.

에너지 보존 법칙에서 유도되는 열전달 방정식을 푸는 것이 열 해석 프로그램의 핵심적 기능이다. 대표적인 상용 프로그램으로 SINDA, TAS 등이 널리 사용되며, 다양한 경계 조건을 해결하기 위하여 Taylor 급수 근사에 근거한 유한차분법을 주로 적용한다.⁽¹⁾ 한편, 평형 방정식 또는 운동 방정식을 해결하기 위한 구조 해석용 프로그램으로는 NASTRAN, ABAQUS, ANSYS, ADINA 등이 있으며, 수치 기법의 이론적 기반은 유한요소법이다.⁽²⁾ 이들 대부분의 범용 유한요소 프로그램은 열전달 방정식을 해석할 수 있는 기능도 함께 보유하고 있다. 그러나 열 해석과 구조 해석을 위한 관련 수식 및 알고리즘의 기본적인 특성이 서로 다르므로, 대부분의 경우 열기계학적으로 부분(partially or one-way) 또는 완전(fully) 연계된 문제^(3,4)에 대해서는 그다지 효율성 높은 해석 환경을 제공하지 않는다.

[†] 책임저자, 회원, 전북대학교 기계항공시스템공학부

E-mail : esshin@chonbuk.ac.kr

TEL : (063)270-3995 FAX : (063)270-2472

^{*} 전북대학교 대학원, 현재 (주)테크

본 논문에서는 열복사 경계면을 포함하는 열기 계학적 문제를 효율적으로 모델링하고 해석하기 위해서 부영역 결합법에 근거한 유한요소 정식화 및 해법을 제안하였다. 열전달 문제에서 중요한 접촉 및 복사 경계 조건의 경우, 대변형 또는 재료의 비선형 거동과 달리 경계면의 일부에서만 비선형성을 야기한다.^(1,5) 따라서 시간 중분과 반복 해법 단계에서 비선형 경계면이 포함된 일부 영역이 아닌 전체적인 영역을 대상으로 각종 행렬을 다루는 것은 비효율성을 증가시키는 가장 근본적인 원인이다.

이런 관점에서 가장 매력적인 개념은 전체 영역을 다수의 독립적인 부영역(subdomain)으로 분할한 후 유한요소 정식화 과정을 적용하는 것이다.⁽⁶⁻¹⁰⁾ 영역 분할 기법을 통하여 부영역과 공유면(interface)을 기준으로 변수와 수식을 처리하면, 열접촉 또는 열복사가 일어나는 경계면을 특정 부영역에 할당할 수 있다. 결과적으로 효율적인 해석이 가능함은 물론, 복잡한 기계 장치의 형상 모델링 문제까지도 동시에 해결할 수 있다. 여기서는 공유면에서의 구속 조건을 간단한 벌칙 함수법을 적용하여 변분 정식화하였다.^(9,11,12) 또한, 컴퓨터 프로그램의 개발과 적절한 수치 예제를 통하여 본 기법의 기본적인 특성을 고찰하였다.

2. 유한요소 정식화 및 해법

2.1 에너지 보존 법칙 및 변분 정식화

Fig. 1과 같이 전체 영역 Ω 를 N_s 개의 부영역 $\Omega^{(k)}$ 와 공유면 $\Gamma_i^{(k)}$ 의 집합으로 생각한다. $\Gamma_T^{(k)}$, $\Gamma_H^{(k)}$, $\Gamma_C^{(k)}$ 는 각각 온도, 열 유량, 접촉 조건이 주어지는 경계면이다. $\Gamma_i^{(k)}$ 의 온도 변화 θ_i 와 $\Gamma_i^{(k)}$ 의 온도 변화 φ_i 의 연속 조건을 위한 열 유량의 벌칙 함수 표현은 다음과 같다.

$$q_i^{(k+)} = -q_i^{(k-)} = \varepsilon_{\Gamma_i}^{(k-1)} (\varphi_i - \theta_i^{(k+)}) \quad (1)$$

아래 첨자 중 T는 온도장, I는 공유면에 관련된 양을 의미하며, ε 는 매우 작은 벌칙 상수이다.

부영역에서의 열전달 방정식은 다음과 같다.

$$\rho^{(k)} c_v^{(k)} \dot{\theta}_i^{(k)} = (\kappa_{ij}^{(k)} \theta_{i,j}^{(k)})_{,i} - \theta^{(k)} \alpha_{ij}^{(k)} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_M^{(k)} + \rho^{(k)} \bar{r}^{(k)} \quad (2)$$

여기서 ρ 는 밀도, c_v 는 비열, κ_{ij} 는 열전도 계수, θ 는 현재 온도(기준 온도 θ_0 와 θ_i 의 합), α_{ij} 는 열팽창 계수, C_{ijkl} 은 탄성 계수, ε_{ij} 는 변형도, \bar{r} 은 열원

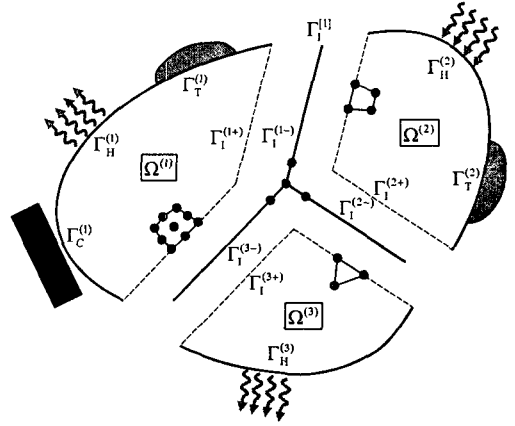


Fig. 1 Schematic of subdomains and interface

이다. 시험 함수로서 가상 온도 $\delta\theta_i$, $\delta\varphi_i$ 를 도입하면, 전체 부영역과 공유면에 대한 지배 방정식의 약형을 유도할 수 있다.

$$\delta\Pi_T = \sum_{k=1}^{N_s} \delta\Pi_T^{(k)} + \delta\Pi_{\Gamma_i} = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta\Pi_T^{(k)} = & \int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} c_v^{(k)} \dot{\theta}_i^{(k)} \delta\theta_i^{(k)} dV + \int_{\Omega^{(k)}} \kappa_{ij}^{(k)} \theta_{i,j}^{(k)} \delta\theta_i^{(k)} dV \\ & + \int_{\Omega^{(k)}} \theta \alpha_{ij}^{(k)} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_M^{(k)} \delta\theta_i^{(k)} dV - \int_{\Omega^{(k)}} \rho^{(k)} \bar{r}^{(k)} \delta\theta_i^{(k)} dV \\ & + \int_{\Gamma_i^{(k)}} \bar{q}^{(k)} \delta\theta_i^{(k)} dS + \int_{\Gamma_i^{(k)}} h_V^{(k)} (\theta_i^{(k)} - \bar{\theta}_{V_i}^{(k)}) \delta\theta_i^{(k)} dS \\ & + \int_{\Gamma_i^{(k)}} h_R^{(k)} (\theta_i^{(k)} - \bar{\theta}_{R_i}^{(k)}) \delta\theta_i^{(k)} dS \\ & + \int_{\Gamma_i^{(k)}} h_C^{(k)} (\theta_i^{(k)} - \bar{\theta}_{C_i}^{(k)}) \delta\theta_i^{(k)} dS \\ & + \frac{1}{\varepsilon_{\Gamma_i}^{(k)}} \int_{\Gamma_i^{(k+)}} (\theta_i^{(k+)} - \varphi_i) \delta\theta_i^{(k)} dS \end{aligned} \quad (4)$$

$$\delta\Pi_{\Gamma_i} = \sum_{k=1}^{N_s} \frac{1}{\varepsilon_{\Gamma_i}^{(k)}} \int_{\Gamma_i^{(k+)}} (\varphi_i - \theta_i^{(k+)}) \delta\varphi_i dS \quad (5)$$

아래 첨자 중 V는 대류, R은 복사, C는 접촉에 관련된 양을 의미하며, h 는 경계면에서의 열전달 계수이다. 특히 열복사 계수 h_R 은 표면 방사율과 형태 계수에 의존하는 상수 ψ , Stefan-Boltzmann 상수 σ , 열원의 절대 온도 $\bar{\theta}_R$ 로 표현된다.

$$h_R^{(k)} = \psi^{(k)} \sigma (\theta^{(k)2} + \bar{\theta}_R^{(k)2}) (\theta^{(k)} + \bar{\theta}_R^{(k)}) \quad (6)$$

2.2 열전달 방정식의 유한요소 근사

온도를 비롯한 각종 변수들을 유한요소 기준으로 이산화하면, 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_T^{(k) i+\Delta t} \hat{\theta}^{(k)} + \mathbf{K}_T^{(k) i+\Delta t} \theta^{(k)} + {}^{i+\Delta t} \mathbf{a}_T^{(k)} - {}^{i+\Delta t} \mathbf{r}_T^{(k)} \\ + {}^{i+\Delta t} \mathbf{q}_V^{(k)} + {}^{i+\Delta t} \mathbf{q}_R^{(k)} + {}^{i+\Delta t} \mathbf{q}_C^{(k)} + {}^{i+\Delta t} \mathbf{p}_{\Gamma_i}^{(k+)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^{N_s} {}^{i+\Delta t} \mathbf{p}_{\Gamma_i}^{(k-)} = \mathbf{0} \quad (8)$$

여기서 왼쪽 위 첨자 $t+\Delta t$ 는 적용 시각을 의미한다. $\theta^{(k)}$ 는 부영역 온도 벡터, \mathbf{M}_T 는 열용량 행렬, \mathbf{K}_T 는 열전도 행렬, \mathbf{a}_T 는 변형도 속도에 따른 가역적인 열원 벡터, \mathbf{r}_T 는 외부 열원과 경계면을 통한 열 유량 벡터이다. \mathbf{q}_V 는 경계면에서의 대류 벡터, \mathbf{q}_C 는 실제 접촉 여부와 접촉 하중의 크기에 의존되는 열 유량 벡터이다.

한편 비선형성을 야기하게 되는 열복사 벡터 \mathbf{q}_R 에 대한 구체적인 표현은 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_R^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{R1}^{(k)} {}^{t+\Delta t} \theta^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_{R2}^{(k)} \quad (9)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{R1}^{(k)} = \int_{\Gamma_H^{(k)}} {}^{t+\Delta t} h_R^{(k)} \mathbf{H}_T^{(k)T} \mathbf{H}_T^{(k)} ds \quad (10)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{q}_{R2}^{(k)} = \int_{\Gamma_H^{(k)}} {}^{t+\Delta t} h_R^{(k)} {}^{t+\Delta t} \bar{\theta}_{R+}^{(k)} (\mathbf{H}_T^{(k)T}) ds \quad (11)$$

여기서 \mathbf{H}_T 는 온도장 보간 행렬이다.

마지막으로 공유면의 연속 조건에서 기인하는 벌칙 벡터 \mathbf{p}_{Π} 는 다음과 같다.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\Pi}^{(k+)} = \mathbf{P}_{\Pi 11}^{(k+)} {}^{t+\Delta t} \theta^{(k)} - \mathbf{P}_{\Pi 12}^{(k+)} \boldsymbol{\varphi} \quad (12)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{\Pi}^{(k-)} = -\mathbf{P}_{\Pi 13}^{(k-)} {}^{t+\Delta t} \theta^{(k)} + \mathbf{P}_{\Pi 14}^{(k-)} \boldsymbol{\varphi} \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_{\Pi 11}^{(k+)} = \frac{1}{\varepsilon_{\Pi}^{(k)}} \int_{\Gamma_{\Pi}^{(k+)}} \mathbf{H}_T^{(k)T} \mathbf{H}_T^{(k)} ds \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_{\Pi 12}^{(k+)} = \mathbf{P}_{\Pi 13}^{(k-)} = \frac{1}{\varepsilon_{\Pi}^{(k)}} \int_{\Gamma_{\Pi}^{(k+)}} \mathbf{H}_T^{(k)T} \mathbf{H}_{\Pi} ds \quad (15)$$

$$\mathbf{P}_{\Pi 14}^{(k-)} = \frac{1}{\varepsilon_{\Pi}^{(k)}} \int_{\Gamma_{\Pi}^{(k-)}} \mathbf{H}_{\Pi}^T \mathbf{H}_{\Pi} ds \quad (16)$$

여기서 $\boldsymbol{\varphi}$ 는 공유면에서의 온도 벡터이다.

2.3 완전 연계된 열기계학적 해석

부영역 $\Omega^{(k)}$ 에 대한 에너지 보존 법칙을 의미하는 식 (7)의 여러 벡터 중에서 \mathbf{a}_T 와 \mathbf{q}_C 는 근본적으로 변위장에 의존한다. 따라서 온도장과 변위장이 열기계학적으로 완전 연계된 비선형 해석을 통해서만 정확한 해를 구할 수 있다. 이를 위하여 열전달 방정식의 경우처럼 운동 방정식, 경계 조건, 공유면의 연속 조건을 포함하는 약형을 설정한 후 유한요소 정식화 과정을 거치면, 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{M}_D^{(k)} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_D^{(k)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{r}_D^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{DC}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{DI}^{(k+)} = \mathbf{0} \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{N_S} {}^{t+\Delta t} \mathbf{p}_{DI}^{(k-)} = \mathbf{0} \quad (18)$$

여기서 아래 첨자 D는 변위장에 관련된 양이며, \mathbf{M}_D 는 질량 행렬, \mathbf{f}_D 는 내력 벡터, \mathbf{r}_D 는 외력 벡터, \mathbf{p}_{DC} 는 접촉 하중 벡터이다. 또한 부영역 변위

$\mathbf{u}^{(k)}$ 와 공유면 변위 \mathbf{v} 를 구속하는 벌칙 하중 벡터 \mathbf{p}_{DI} 는 식 (12)~(16)과 유사한 형태를 갖는다.

온도 벡터와 변위 벡터를 시간에 대하여 이산화하고 식 (7), (8), (17), (18)을 정리하면, 블록 행렬 형태의 최종 지배 방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}_T^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{P}_{\Pi 2}^{(1+)} \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}_T^{(2)} & \dots & -\mathbf{P}_{\Pi 2}^{(2+)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{P}_{\Pi 2}^{(1+)*T} & -\mathbf{P}_{\Pi 2}^{(2+)*T} & \dots & \mathbf{K}_{\Pi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(1)} \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(2)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_T^{(1)} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_T^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{T1}^{(1)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{T1}^{(2)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_{T2}^{(1)} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(1)} \\ \mathbf{A}_{T2}^{(2)} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}_D^{(1)} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{P}_{DI 2}^{(1+)} \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}}_D^{(2)} & \dots & -\mathbf{P}_{DI 2}^{(2+)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{P}_{DI 2}^{(1+)*T} & -\mathbf{P}_{DI 2}^{(2+)*T} & \dots & \mathbf{K}_{DI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(1)} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(2)} \\ \vdots \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(1)} \\ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{A}_D^{(1)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(1)} \\ \mathbf{A}_D^{(2)} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\theta}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$\hat{\mathbf{K}}_D$, \mathbf{K}_{DI} , $\hat{\mathbf{K}}_T$, \mathbf{K}_{Π} 는 유효 강성 행렬, $\hat{\mathbf{f}}_D$, $\hat{\mathbf{f}}_T$ 는 유효 하중 벡터, \mathbf{A}_D , \mathbf{A}_{T1} , \mathbf{A}_{T2} 는 열기계학적 연계 행렬이다.

열기계학적으로 완전 연계된 식 (19), (20)은 비선형 연립 방정식이며, 적절한 반복 해법을 통하여 순차적으로 변위 및 온도 해를 구할 수 있다.

$$\left(\mathbf{K}_{DI} - \sum_{k=1}^{N_S} \mathbf{P}_{DI 2}^{(k+)*T} [i] \hat{\mathbf{K}}_D^{(k-1)} \mathbf{P}_{DI 2}^{(k+)} \right) [i+1] \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{N_S} \mathbf{P}_{DI 2}^{(k+)*T} [i] \hat{\mathbf{K}}_D^{(k-1)} \left([i] \hat{\mathbf{f}}_D^{(k)} + \mathbf{A}_D^{(k)} [i] \boldsymbol{\theta}^{(k)} \right) \quad (21)$$

$$[i+1] \mathbf{u}^{(k)} = [i] \hat{\mathbf{K}}_D^{(k-1)} \left([i] \hat{\mathbf{f}}_D^{(k)} + \mathbf{A}_D^{(k)} [i] \boldsymbol{\theta}^{(k)} + \mathbf{P}_{DI 2}^{(k+)*T} [i+1] \mathbf{v} \right) \quad (22)$$

$$\left(\mathbf{K}_{\Pi} - \sum_{k=1}^{N_S} \mathbf{P}_{\Pi 2}^{(k+)*T} [i] \hat{\mathbf{K}}_T^{(k-1)} \mathbf{P}_{\Pi 2}^{(k+)} \right) [i+1] \boldsymbol{\varphi} = \sum_{k=1}^{N_S} \mathbf{P}_{\Pi 2}^{(k+)*T} [i] \hat{\mathbf{K}}_T^{(k-1)} \left([i] \hat{\mathbf{f}}_T^{(k)} - [i+1] \mathbf{A}_{T1}^{(k)} [i] \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \mathbf{A}_{T2}^{(k)} [i+1] \dot{\mathbf{u}}^{(k)} \right) \quad (23)$$

$$[i+1] \boldsymbol{\theta}^{(k)} = [i] \hat{\mathbf{K}}_T^{(k-1)} \left([i] \hat{\mathbf{f}}_T^{(k)} - [i+1] \mathbf{A}_{T1}^{(k)} [i] \boldsymbol{\theta}^{(k)} - \mathbf{A}_{T2}^{(k)} [i+1] \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \mathbf{P}_{DI 2}^{(k+)*T} [i+1] \boldsymbol{\varphi} \right) \quad (24)$$

여기서 왼쪽 위 첨자 [i], [i+1]은 반복 회수를 의미한다.

3. 수치 해석 결과 및 토의

3.1 기본 예제 : 열복사 해석

본 논문에서 제안된 유한요소 부영역 기법의 기본적인 특성을 고찰하기 위하여 Fig. 2와 같이, 원공에서 열복사 경계면을 갖는 복합재료 적층판을 해석하였다. 복합재료의 물성 값은 $\rho = 1,560 \text{ kg/m}^3$, $c_v = 679 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, $\kappa_1 = 48.1 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, $\kappa_2 = 0.93 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ 이며, 적층 순서 $[0/\pm 45/90]_8$, 치수 $16 \times 16 \times 0.01 \text{ m}$ 이다. 적층판의 기준 온도는 $\theta_0 = 300 \text{ K}$ 이며, 복사 열원의 온도는 $\theta_{R_s} = 100 \text{ K}$ 만큼 높다.

영역 분할의 효과를 면밀히 검토할 목적으로 다섯 종류의 유한요소 모델을 선택하였다. 대칭성을 고려하여 우측 상반부 영역을 대상으로 955개의 절점과 1,800개의 등계수(isoparametric) 삼각형 요소를 사용하여 유한요소 모델 full을 구성하였다. case1 및 case2는 공유면에 인접하고 있는 부영역 경계에서의 절점 배치가 서로 연속이다. 반면 case3 및 case4는 불연속적으로(incompatible) 절점이 배치되어 있다. case3은 내부 $\Omega^{(1)}$ 의 촘촘한 모델을 기준으로 공유면을 이산화한 경우이며, case4는 외부 $\Omega^{(2)}$ 를 기준으로 공유면을 이산화하였다.

유한요소 해의 정확성을 확인하기 위하여 벌칙 상수 ϵ_{Γ} 에 따른 오차 분석 결과를 Fig. 3과 Fig. 4에 제시하였다. 여기서 벌칙 상수의 변화는 각 부영역별 강성 행렬의 대각 성분 중 최대 값을 기준으로 벌칙 지수 α_{Γ} 를 정의하여 표현하였다.

$$\frac{1}{\epsilon_{\Gamma}^{(k)}} = 10^{\alpha_{\Gamma}} \times \max_i (\mathbf{K}_{\Gamma}^{(k)})_{ii} \quad (25)$$

또한 공유면에 인접한 부영역 경계면에서의 온도 norm 및 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \|\theta_+ \|_{\Gamma^{(k+)}}^2 &= \int_{\Gamma^{(k+)}} \theta_+^{(k+)} ds \\ &= \epsilon_{\Gamma}^{(k)} \left(\theta^{(k)T} \mathbf{P}_{\Gamma}^{(k+)} \theta^{(k)} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} e_{\Gamma} &= \frac{\|\theta_+ - \varphi_+ \|_{\Gamma^{(k+)}}}{\|\theta_+ \|_{\Gamma^{(k+)}}} \\ &= \sqrt{\frac{\theta^{(k)T} \mathbf{P}_{\Gamma}^{(k+)} \theta^{(k+)} + \theta^{(k-)} \mathbf{P}_{\Gamma}^{(k-)} \theta^{(k-)}}{\theta^{(k)T} \mathbf{P}_{\Gamma}^{(k+)} \theta^{(k)}}} \end{aligned} \quad (27)$$

계산 결과, 매우 넓은 벌칙 지수 범위($2 < \alpha_{\Gamma} < 12$)에 걸쳐서 안정적인 해를 제공하였으며, 지수에 비례하여 오차가 계속 감소하였다. 따라서 이후의 해석에서는 $\alpha_{\Gamma} = 8$ 로 고정하였다.

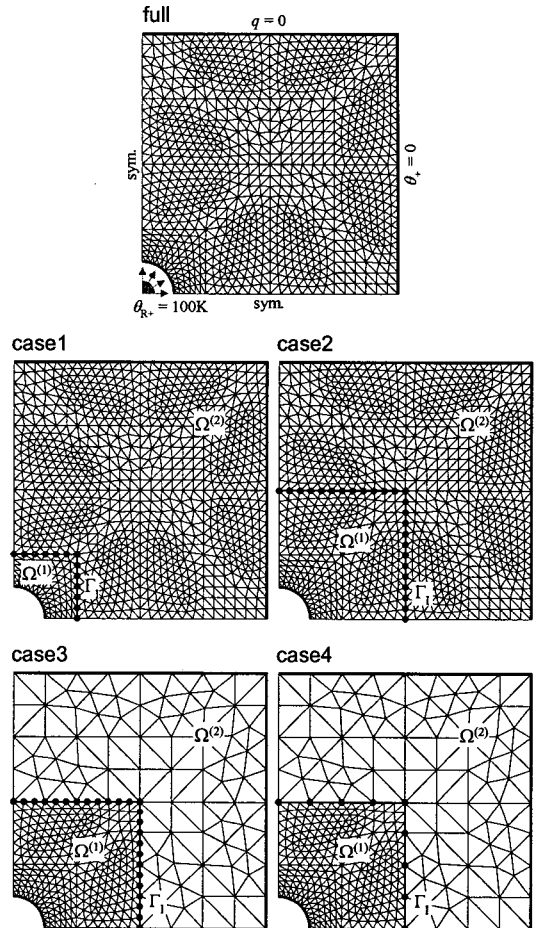


Fig. 2 Composite laminate with a centered hole and four types of domain decomposition

case2, case3, case4 모델의 영역 분할된 공유면에 놓인 점 $(x, y) = (4, 0)$ 에서의 온도 이력을 Fig. 5에 도시하였다. 복사 경계면에서의 열 유입에 의하여 점진적으로 온도가 증가하는 경향을 보인다. 영역 전체에 걸쳐 동일한 요소로 이산화시킨 full, case1, case2의 온도 해는 벌칙 상수 정도의 매우 작은 오차만 발생하므로($\alpha_{\Gamma} = 8$), 온도 곡선상의 가시적인 차이는 없다. 마찬가지로, case3과 case4의 결과도 벌칙 상수 정도의 상호 차이만 존재한다. 이는 공유면을 촘촘하게 분할하더라도 벌칙 함수의 특성상 촘촘하지 않은 외부 부영역 $\Omega^{(2)}$ 의 온도 보간이 기준이 되기 때문이다. Fig. 6에는 온도 등고선을 도시하였다. 원공 주변 이외에 온도 구배가 크지 않으며, $\Omega^{(2)}$ 에서의 온도 분포 차이도 매우 작다.

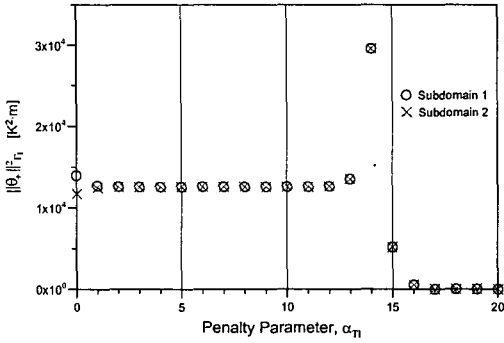


Fig. 3 Temperature vs. penalty parameter (case2)

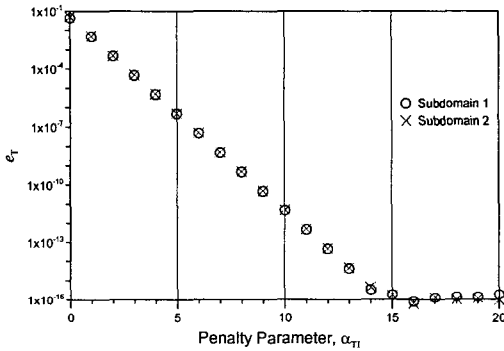


Fig. 4 Error norm vs. penalty parameter (case2)

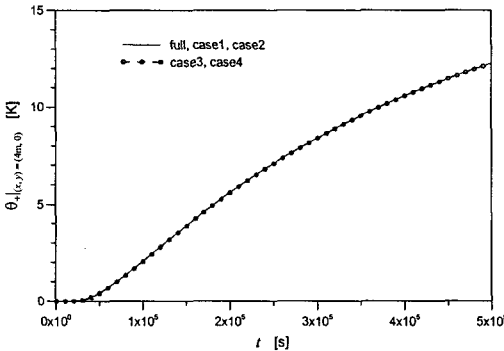


Fig. 5 Time response of temperature change

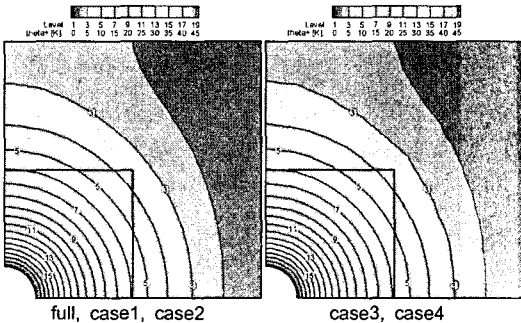


Fig. 6 Contour of temperature change ($t=5 \times 10^5$ s)

한편 영역 분할에 의한 계산의 효율성 측면을 정량적으로 확인하기 위하여 Fig. 7과 Table 1에 각각의 유한요소 모델에 대한 FLOPs(floating-point operations) 값을 정리하였다. 여기서 FLOPs란 연립 대수 방정식인 식(23)과 (24)를 푸는데 있어서 부동 소수점 연산(곱셈, 나눗셈)을 수행한 횟수를 의미한다. 수치 기법은 대역 행렬(banded matrix)에 대한 Gauss 소거법을 이용하였으며, 이는 삼각 분해(decomposition) 단계와 대입(substitution) 단계로 구분된다.

먼저 Fig. 7은 시간 증분 횟수에 따른 FLOPs 값의 변화를 비교한 결과이다. 영역 분할을 하지 않은 full 모델의 FLOPs를 기준 값인 100%로 잡았다. 시간 증분 횟수가 100 보다 큰 경우, case1 모델이 가장 높은 효율성을 보였다. 즉, 촘촘하지 않은 부영역 $\Omega^{(2)}$ 를 갖는(총 자유도가 작은) case3 또는 case4 보다 효율성을 높음을 의미한다.

Table 1에서는 시간 증분 횟수가 10,000일 때의 각종 결과 값을 제시하였다. 여기서는 부영역과 공유면의 절점 수, 요소 수, 유효 강성 행렬의 크기 등의 정보를 구체적으로 병기하였다. 17,000회 이상의 반복 계산 동안, 실제 비선형 계산은 복사 경계면을 갖는 부영역 $\Omega^{(1)}$ 및 공유면 Γ_1 에서만 수행된다. 특히 case1 모델은 비선형성을 야기하는 부영역 $\Omega^{(1)}$ 의 자유도와 대역폭(bandwidth)이 다른 모델에 비해 작기 때문에, 반복 계산 횟수가 증가하게 되면 계산량의 감소 효과가 두드러진다. 예를 들어, case1에서 $\Omega^{(1)}$ 에 해당되는 계산량 비율이 2.31%인 반면, case2는 29.48%, case3은 29.43%, case4는 15.76%이다. 따라서 비선형 경계면이 포함된 부영역의 크기가 작을수록 반복 계산에 대한 부담이 경감되므로, 해석의 효율성이 크게 향상됨을 확인할 수 있다.

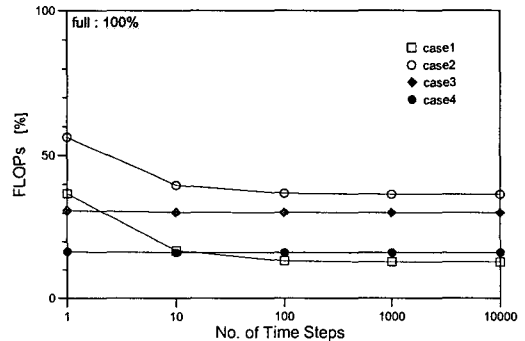


Fig. 7 FLOPs vs. number of time steps

Table 1 Comparison of FLOPs (no. of time steps=10,000)

Mesh	Subdomain /Interface	Nodes on $\Gamma_i^{(k)}$	Size of Matrix K		Time Steps	Iterations	No. of Calculations		Total MFLOPs		
			D.O.F.	H.B.W.			Decomp.	Substi.	Decomp.	Substi.	Percent.
full	Ω	-	955	47	10,000	17,436	17,436	17,436	34,831.688	2,257.997	100.00
case1	$\Omega^{(1)}$	13	91	11	10,000	17,436	17,436	261,540	161.109	694.650	2.31
	$\Omega^{(2)}$	13	877	44			1	34,885	1.604	3,878.235	10.46
	Γ_1	-	13	-			17,436	17,436	12.693	4.307	0.05
	Total									175.406	4,577.192
case2	$\Omega^{(1)}$	25	283	23	10,000	17,436	17,436	470,772	2,364.461	8,568.992	29.48
	$\Omega^{(2)}$	25	697	35			1	34,897	0.802	2,442.999	6.59
	Γ_1	-	25	-			17,436	17,436	90.667	16.128	0.29
	Total									2,455.930	11,028.120
case3	$\Omega^{(1)}$	25	283	23	10,000	17,405	17,405	469,935	2,360.257	8,553.757	29.43
	$\Omega^{(2)}$	25	89	14			1	34,835	0.015	114.503	0.31
	Γ_1	-	25	-			17,405	17,405	90.506	16.100	0.29
	Total									2,450.778	8,684.359
case4	$\Omega^{(1)}$	9	283	23	10,000	17,405	17,405	191,455	2,360.257	3,484.864	15.76
	$\Omega^{(2)}$	9	89	14			1	34,819	0.015	114.450	0.31
	Γ_1	-	9	-			17,405	17,405	4.177	2.036	0.02
	Total									2,364.449	3,601.350

3.2 응용 예제 : 열복사 + 열접촉 해석

열복사와 열접촉을 동시에 고려한 열기계학적 완전 연계 해석을 수행하였다. Fig. 8과 같이, 열복사에 노출된 원공과 6개의 강체 핀 조인트를 갖는 정육각형 구조를 대칭 조건을 가정하여 모델링하였다. 강체 핀의 접촉 간극은 $s=0$ 이며, 열복사에 따른 온도 상승과 열팽창에 의하여 접촉이 발생한다. 재료는 니켈 계열의 초합금으로 $E=220\text{GPa}$, $\nu=0.29$, $\rho=8,510\text{kg/m}^3$, $\alpha=11.7 \times 10^{-6}\text{K}^{-1}$, $c_v=439\text{J/kg}\cdot\text{K}$, $\kappa=48.1\text{W/m}\cdot\text{K}$ 이다. 기준 온도는 $\theta_0=298\text{K}$, Pin A, B, C는 각각 $\theta_{c_i}=0\text{K}$, 100K , 200K 이다. 열복사는 원공의 곡선 경계에서 일어나며, 열원은 $\theta_{R_s}=1,000\text{K}$ 이다. full 모델은 15,162개의 절점과 29,748개의 요소를 사용하였고, HCR 모델은 이를 6개의 부영역으로 분할하였다.

Pin A, B, C의 접촉 응력 분포를 Fig. 9에 도시하였다. 강체 핀이 정육각형 구조의 자유 팽창을 저해하는 역할을 하므로, 핀 경계의 변위장에 따라 접촉 응력의 크기와 분포가 달라진다. Fig. 10은 온도 변화에 대한 등고선을 나타낸 그래프이다. 상대적으로 열에너지의 유입이 많은 Pin C 주변의 온도가 가장 높음을 확인할 수 있다. 한편 Fig. 11은 온도 변화의 시간 이력을 도시한 그래프이다. 시간 경과에 따라 Point A, B, C의 온도가 점진적으로 증가하여, 각각 정상 상태에 해당하는 평형 온도에도 도달한다.

마지막으로 Fig. 12는 시간 증분 횟수를 1에서 1,000까지 늘렸을 때의 full 모델 및 HCR 모델의 FLOPs 값을 상호 비교한 그래프이며, Table 2는

시간 증분 횟수가 1,000일 때의 각종 결과들을 정리한 것이다. full 모델의 변위 해와 온도 해를 구하는데 소요되는 계산량의 합 $\text{full}_D + \text{full}_T$ 를 100%로 잡았다. 여기서 아래 첨자 D, T는 각각 변위와 온도에 관련됨을 의미한다. 마찬가지로 HCR 전체 계산량은 HCR_D 와 HCR_T 의 합과 같으며, 시간 증분 횟수가 증가할수록 온도 해에 관련된 계산량이 차지하는 비율이 점차 늘어남을 확인할 수 있다. Table 2의 결과를 살펴보면, HCR 계산량은 full 모델의 $6.91 + 18.41 = 25.32\%$ 수준까지 절대 계산량이 획기적으로 감소하였다.

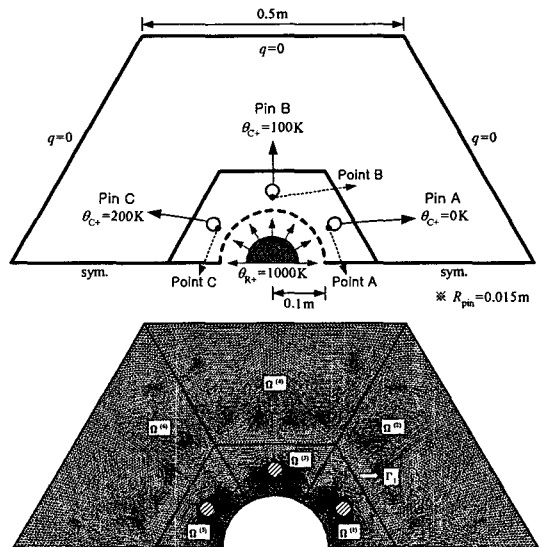


Fig. 8 Hexagonal domain with radiation and contact boundaries and finite element mesh (HCR)

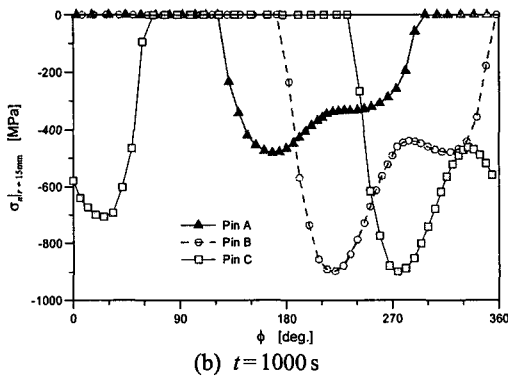
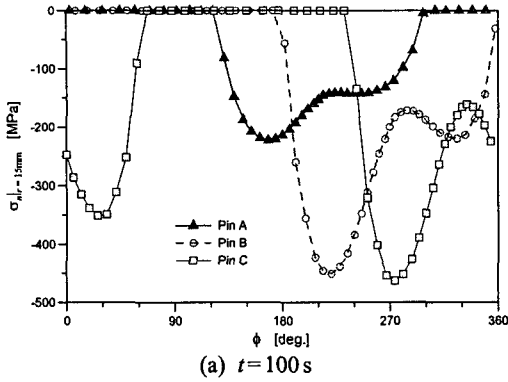


Fig. 9 Distribution of contact stress

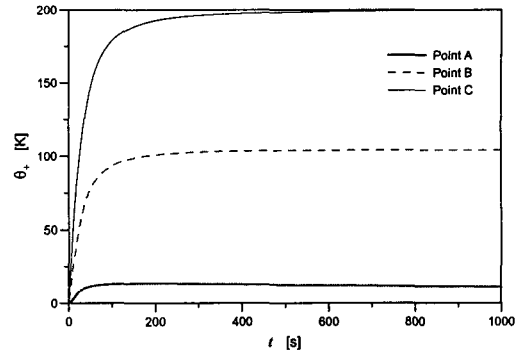


Fig. 11 Time response of temperature change

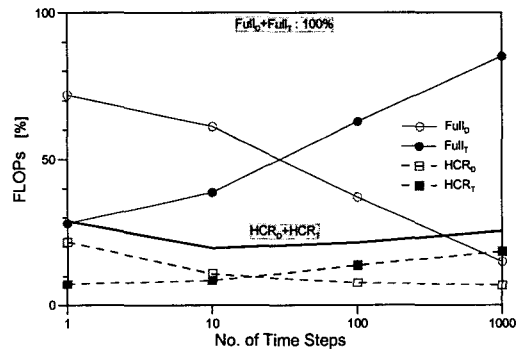


Fig. 12 FLOPs vs. number of time steps

4. 결론

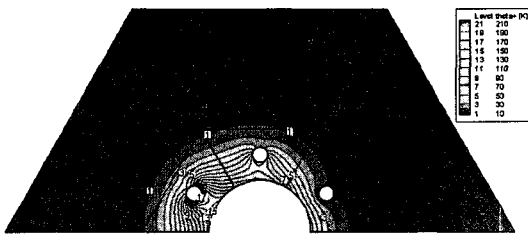
본 연구에서는 열복사를 고려한 열기계학적 완전 연계된 문제를 효율적으로 해석하기 위하여 부영역과 공유면에 기반을 둔 변분 정식화와 해석 기법을 제안하였으며, 이에 관한 결과를 간단히 요약하면 다음과 같다.

(1) 공유면 및 접촉면에서 변위와 온도에 관련된 각종 구속 조건을 벌칙 함수로 직접 처리함으로써 추가적인 라그랑지 승수 등의 도입이 필요하지 않다.

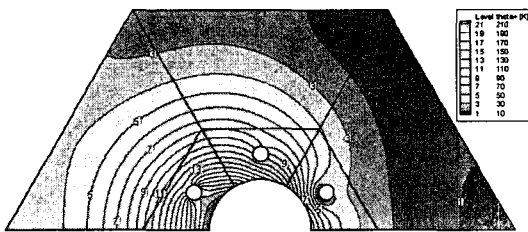
(2) 모든 부영역에서의 유효 강성 행렬이 항상 양정치(positive definite) 특성을 가지며, 비선형성이 야기되는 부영역에 대해서만 해당 강성 행렬을 재조립과 분해 계산을 수행한다.

(3) 구조 형상이 복잡하더라도 공유면과 경계면의 절점 연속성을 고려하지 않고 전체 영역을 자유자재로 분할한 후, 할당된 부영역을 기준으로 수치 연산을 독립적으로 수행할 수 있다.

(4) 열기계학적으로 완전 연계된 최종 지배 방



(a) $t = 100$ s



(b) $t = 1000$ s

Fig. 10 Contour of temperature change

Table 2 Comparison of FLOPs (no. of time steps=1,000)

	Mesh	Subdomain /Interface	Nodes on $\Gamma_1^{(k)}$	Contact Boundary	Radiation Boundary	Size of Matrix K		Time Steps	Iterations	No. of		Total GFLOPs			
						D.O.F.	H.B.W.			Decomp.	Substi.	Decomp.	Substi.	Percent.	
Displacement	HCR	full	Ω	-	O	-	30,324	274	1,000	3,704	42	3,704	94.696	91.687	14.92
		$\Omega^{(1)}$	69	O	-	2,880	88	1,000	3,704	11	8,926	0.238	6.633	0.55	
		$\Omega^{(2)}$	81	X	-	7,402	118	1,000	3,704	1	7,570	0.101	19.567	1.57	
		$\Omega^{(3)}$	97	O	-	2,880	88	1,000	3,704	20	11,288	0.432	8.388	0.71	
		$\Omega^{(4)}$	121	X	-	7,402	118	1,000	3,704	1	7,650	0.101	19.774	1.59	
		$\Omega^{(5)}$	69	O	-	2,880	88	1,000	3,704	21	10,306	0.454	7.658	0.65	
		$\Omega^{(6)}$	81	X	-	7,402	118	1,000	3,704	1	7,570	0.101	19.567	1.57	
		Γ_1	-	-	-	514	-	1,000	3,704	42	3,704	1.901	1.467	0.27	
	Total									3.328	83.053	6.91			
Temperature	HCR	full	Ω	-	O	O	15,162	137	1,000	3,704	3,704	3,704	1,040.094	22.866	85.08
		$\Omega^{(1)}$	69	O	O	1,440	44	1,000	3,704	3,704	262,984	9.888	48.484	4.67	
		$\Omega^{(2)}$	81	X	X	3,701	59	1,000	3,704	1	7,489	0.013	4.812	0.39	
		$\Omega^{(3)}$	97	O	O	1,440	44	1,000	3,704	3,704	366,696	9.888	67.605	6.20	
		$\Omega^{(4)}$	121	X	X	3,701	59	1,000	3,704	1	7,529	0.013	4.838	0.39	
		$\Omega^{(5)}$	69	O	O	1,440	44	1,000	3,704	3,704	262,984	9.888	48.484	4.67	
		$\Omega^{(6)}$	81	X	X	3,701	59	1,000	3,704	1	7,489	0.013	4.812	0.39	
		Γ_1	-	-	-	257	-	1,000	3,704	3,704	3,704	20.958	0.366	1.71	
	Total									50.660	179.402	18.41			

정식이 블록 행렬 형태로 유도되므로, 적절한 수치 알고리즘에 구성하여 계산 시간을 획기적으로 절감할 수 있다.

(5) 계산량 절감 효과는 영역 분할 방법, 강성 행렬이 대역폭, 비선형 경계면 분포 등에 따라 달라지나, 적절한 영역 분할 과정을 거치면 대략 10~20% 수준까지 계산량을 줄일 수 있다.

후 기

이 논문은 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었습니다(R05-2004-000-10537-0).

참고문헌

(1) Jaluria, Y. and Torrance, K. E., 2003, *Computational Heat Transfer*, 2nd ed., Taylor & Francis.
 (2) Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J., 2002, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed., John Wiley & Sons, Inc.
 (3) Allen, D. H., 1991, "Thermomechanical Coupling in Inelastic Solids," *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 44, No. 8, pp. 361~373.
 (4) Nicholson, D. W., 2003, *Finite Element Analysis: Thermomechanics of Solids*, CRC Press.
 (5) Siegel, R. and Howell, J. R., 2002, *Thermal Radiation Heat Transfer*, 4th ed., Taylor & Francis.
 (6) Maday, Y., Mavriplis, C., and Patera, A., 1988,

"Nonconforming Mortar Element Methods: Application to Spectral Discretizations," NASA CR-181729, ICASE Report No. 88-59.

(7) Farhat, C. and Roux, F. X., 1991, "A Method of Finite Element Tearing and Interconnecting and its Parallel Solution Algorithm," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 32, pp. 1205~1227.
 (8) Aminpour, M. A., Ransom, J. B., and McCleary, S. L., 1995, "A Coupled Analysis Method for Structures with Independently Modelled Finite Element Subdomains," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 38, pp. 3695~3718.
 (9) Cho, M. H. and Kim, W. B., 2002, "A Coupled Finite Element Analysis of Independently Modeled Substructures by Penalty Frame Method," *KSME Int. J.*, Vol. 16, pp. 1201~1210.
 (10) Avery, P., Rebel, G., Lesoinne, M., and Farhat, C., 2004, "A Numerically Scalable Dual-Primal Substructuring Method for the Solution of Contact Problems - Part I: the Frictionless Case," *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 193, pp. 2403~2426.
 (11) Shin, E. S. and Kim, S. J., 2000, "Finite Element Analysis of Pin-load Composite Laminates by Connecting Independently Modeled Subdomains," *Composites B: Eng.*, Vol. 31, pp. 47~56.
 (12) Pantano, A. and Averill, R. C., 2002, "A Penalty-Based Finite Element Interface Technology," *Compu. & Struct.*, Vol. 80, pp. 1725~1748.