

제어입력 크기제한을 갖는 시스템에서 외란 응답 감소를 위한 이득 스케줄 제어 - 이론

강민식[#]

Gain Scheduled Control for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Control Input - Theory

Min Sig Kang[#]

ABSTRACT

A new gain-scheduled control design is proposed to improve disturbance attenuation for systems with bounded control input. The state feedback controller is scheduled according to the proximity to the origin of the state of the plant. The controllers is derived in the framework of linear matrix inequality(LMI) optimization. This procedure yields a linear time varying control structure that allows higher gain and hence higher performance controllers as the state move closer to the origin. The main results give sufficient conditions for the satisfaction of a parameter-dependent performance measure, without violating the bounded control input condition.

Key Words : Input saturation (입력포화), Disturbance (외란), Gain schedule-control (이득 스케줄제어), Linear Matrix Inequality (LMI, 선형행렬부등식), L_2 -gain (L_2 -이득)

기호설명

A, B_u, B_w, C_1, D_{11} = system matrices
 K_k = k -th feedback gain
 Q_k, F_k = controller variable matrices
 V_k = Lyapunov function
 x, u, w = state variable, control input, and disturbance input
 w_{max} = maximum Euclidian norm of w
 z_∞ = control output
 α, β = parameters used for control design

ϵ_k = k -th ellipsoidal space
 γ = L_2 -gain from w to z_∞

1. 서론

제어계에서 사용되는 모든 액츄에이터는 최대 용량의 제한을 갖고 있으며, 이러한 제한을 고려한 제어기 설계방법은 오랫동안 제어공학의 연구 대상이 되어왔다. 사용 조건에 비추어 액츄에이터가 충분한 용량을 가질 경우 액츄에이터의 용량 제한을

접수일: 2006년 3월 21일; 게재승인일: 2006년 4월 24일

[#] 경원대학교 기계공학과

E-mail mskang@kyungwon.ac.kr Tel. (031) 750-5524

고려하지 않고 다양한 제어를 설계할 수 있지만, 액츄에이터의 용량이 사용 조건에 비추어 부족할 경우 용량을 늘리거나 주어진 용량 제한 하에서 최대의 효율을 갖는 제어기 설계를 고려해야 된다. 액츄에이터의 용량 증대는 시스템 가격 상승의 요인이 되므로, 주어진 용량 하에서 안정하고 우수한 제어성능을 얻을 수 있는 제어기 설계방법에 관한 다양한 연구가 진행되어 왔다.^{1,2} 실제 제어 현장에서는 일반적으로 용량 제한이 만족되는 범위에서는 선형제어기를 사용하고, 제어입력이 이 제한을 벗어나는 경우 Anti-windup을 사용하는 제어방법을 사용하고 있다.²

최근에는 주어진 제어입력의 제한조건을 직접 제어기 설계에 고려하여 계의 안정성과 제어성능을 보장하는 방법이 제시되었다.³⁻⁷ 이 연구들에서는 선형행렬부등식(LMI:Linear Matrix Inequality)을 이용하여 주어진 제한조건을 만족하고 제어성능을 최적화하는 제어기를 제시하고 있다. LMI 방법은 수치해석을 이용하는 방법으로, 그 동안 해석적으로 풀기 어려웠던 비선형 및 다중함수최적화 등의 문제를 해결할 수 있어 매우 다양한 분야에서 적용되고 있다.⁸ 제어기 설계분야에서는 강인제어, 다중입출력계의 다중목적함수(multi-objective function) 최적제어, 강인한 이득 스케줄 제어(gain scheduling control) 등에 폭넓게 이용되고 있다.⁸⁻¹⁰ LMI의 수치해석에는 MatLab을 이용할 수 있다.

주어진 외란의 조건(최대 크기)에서 제어입력 제한(최대 크기)을 만족하는 제어기는 외란 조건을 만족하는 모든 외란을 대상으로 설계되므로 강한 보존적(conservative) 특성을 갖게 되며, 결과적으로 가용한 제어입력을 충분히 사용하지 못하고 일부분만 사용하게 된다. 이러한 단점을 보완하기 위해 제한된 제어입력을 효과적으로 사용함으로써 제어성능을 향상시키는 이득 스케줄 제어가 제안되었다.^{11,12}

제어이득 스케줄 방법은 일반적으로 계의 파라미터 변화에 따라 제어이득을 변화시키는 목적으로 사용하여 왔는데,¹³ 위의 이득 스케줄 제어 방법은 계의 상태에 따라 제어 이득을 변화시키는, 즉, 계의 상태가 원점에 가까울수록 더 큰 제어 이득을 사용함으로써 고정이득제어에 비해 더 많은 제어입력을 사용하며, 결국 제어성능을 개선하는 제어방법이다. 이득 스케줄 제어는 시변계(time varying

system)이므로, 폐회로 안정성을 위해 H^∞ -제어기 설계방법을 사용한다.

본 논문에서는 참고문헌 11과 12에서 제안된 제어이득 스케줄 방법에 비해 제어기 설계 자유도를 더 갖는 스케줄 제어방법을 제시한다. 이 방법은 주어진 외란 조건에서 제어입력제한을 만족하며, 외란으로부터 제어출력까지의 L_2 -이득을 최소화하는 제어이득을 LMI를 이용하여 설계하며, 단, 제어기설계변수를 추가하여 기존의 이득 스케줄 제어 방법에 비해 더 작은 L_2 -이득을 갖도록 설계한다.

2. 제어기 이득 설계

2.1 고정 제어이득 설계

다음 식으로 기술되는 불시변 선형계를 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_w w \quad (1a)$$

$$z_\infty = C_1 x + D_{11} u \quad (1b)$$

여기서 $x \in R^n$ 은 계의 상태변수벡터, $w \in R^{m_w}$ 는 외란입력벡터, $u \in R^{m_u}$ 는 제어입력벡터, z_∞ 는 제어출력벡터이다. 행렬 A, B_u, B_w, C_1, D_{11} 은 시스템 행렬이다.

이 계는 다음과 같이 상태 되먹임제어를 하며,

$$u = Kx \quad (2)$$

제어입력과 외란은 다음과 같은 제한이 존재하는 경우를 고려한다. 즉,

$$|u_i(t)| \leq \bar{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m_u, \quad \forall t \geq 0 \quad (3a)$$

$$|w_i(t)| \leq w_{\max}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3b)$$

식(3a)에서 $|*|$ 는 *의 절대치를, 식(3b)에서 $|*|$ 는 벡터 *의 Euclidian 노름을 나타낸다. 식(3a)의 제어입력 크기 제한은 액츄에이터의 포화를 나타내며, 이미 결정된 값이다. 식(3b)에서 외란의 최대크기 w_{\max} 는 일반적으로 정확한 값을 알기는 어려우

나, 적절히 큰 값으로 설정할 수 있다.

본 논문에서는 주어진 식(3b)의 외란 조건에서 식(3a)의 제어입력제한조건을 만족하며, 외란 w 로부터 제어출력 z_∞ 까지의 L_2 -이득을 최소화하는 식(2)의 상태되먹임 제어이득 K 를 설계한다.

정리 1⁸: 식(1)의 계에서 다음의 선형행렬부등식을 만족하며 γ_1^2 를 최소화하는 양한정(positive definite) 대칭 행렬 Q_1 과 행렬 F_1 가 존재하면,

$$\begin{bmatrix} Y + \alpha Q_1 & B_u \\ B_u^T & -\alpha I \end{bmatrix} < 0, \alpha > 0 \quad (4a)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 & F_1^T \\ F_1 & \frac{\bar{U}_i}{w_{\max}^2} \end{bmatrix} > 0, i = 1, 2, \dots, m_u \quad (4b)$$

$$\begin{bmatrix} Y & B_w & Q_1 C_1^T \\ \star & -\gamma_1^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4c)$$

여기서 $Y = A Q_1 + Q_1 A^T + B_u F_1 + F_1^T B_u^T$, $\bar{U}_i = \text{diag}\{\lambda^2 [\bar{u}_1^2, \bar{u}_2^2, \dots, \bar{u}_i^2 / \lambda^2, \dots, \bar{u}_{m_u}^2]\}$, $\lambda \gg 0$ 이며, 행렬에서 \star 는 대칭행렬 요소를 간단히 나타낸 것이다. λ 는 임의의 충분히 큰 값을 나타낸다.

상태되먹임 제어기 $u = K_1 x$, $K_1 = F_1 Q_1^{-1}$ 를 적용한 경우

1) 폐회로는 안정하며, w 로부터 z_∞ 까지의 L_2 -이득은 γ_1 보다 작다.

2) 상태벡터의 초기조건이 $x^T Q_1^{-1} x < w_{\max}^2$ 을 만족하면, 폐회로 상태벡터는 항상 다음 식으로 정의되는 타원체, $x^T Q_1^{-1} x = w_{\max}^2$, 내부에 존재한다.

3) 상태벡터가 $x^T Q_1^{-1} x < w_{\max}^2$ 을 만족하면 제어입력 $u(t)$ 는 식(3a)의 제한조건을 만족한다.

증명은 참고문헌⁸에 기술되어있으나, 이 후 증명의 편의를 위해 부록에 설명하였다.

정리 1을 요약하면 식(4)의 LMI를 만족하며, γ_1 을 최소화하는 양한정 대칭 행렬 Q_1 과 행렬 F_1 으로부터 제어이득 $K_1 = F_1 Q_1^{-1}$ 을 얻을 수 있다. 이

제어기는 식(3b)의 외란 조건에서 항상 식(3a)의 제어입력 제한조건을 만족하고, 이 때 외란 w 로부터 제어출력 z_∞ 까지의 L_2 -이득 γ_1 보다 작다.

식(4)의 LMI 식은 모두 변수행렬 Q_1 과 F_1 에 대해 선형이므로 MatLab Toolbox를 이용하여 풀 수 있다.

2.2 스케줄 제어이득 설계

식(4)에서 얻은 제어이득은 식(3b)의 조건을 만족하는 모든 경우의 외란을 고려하여 설계되었다. 그러나 실제로는 식(3b)의 조건보다 훨씬 완화된 외란이 작용하는 시간 구간이 대부분을 차지한다. 따라서 앞의 정리 1에서 얻은 고정제어이득을 적용할 경우 주어진 제어입력 제한조건은 만족되지만, 가용한 제어입력의 일부분만을 이용하는 구간이 넓게 된다. 이러한 점에서 제어이득 스케줄 방법은 고정제어이득을 사용하는 경우에 비해 가용한 제어입력을 더 많이 사용함으로써 제어 성능을 향상시킬 수 있다.

우선 다음과 같이 상태변수의 영역을 정의한다.

$$\epsilon_k = \left\{ x : x^T Q_k^{-1} x < \frac{w_{\max}^2}{\beta_k^2} \right\}, \beta_1 = 1 \quad (5)$$

즉, ϵ_k 는 $x^T Q_k^{-1} x = w_{\max}^2 / \beta_k^2$ 로 정의되는 타원체의 내부공간으로 정의되는 상태변수영역을 나타낸다.

2.2.1 상수 행렬 Q 기반 설계

제어기 식에 포함되는 행렬 Q 를 상수행렬로 하여 스케줄 제어이득을 설계하는 방법은 다음과 같다.

정리 2⁸: 정리 1을 만족하는 Q_1 과 F_1 이 존재하고, $k \geq 2$ 일 때 다음의 LMI식 (6a), (6b)를 만족하며 γ_k^2 를 최소화하는 행렬 F_k 가 존재하면,

(i) $k = 1$ 일 때

정리 1에서 Q_1, F_1, K_1 및 γ_1 을 구한다.

(ii) $k \geq 2$ 일 때

$$\begin{bmatrix} Q_1 & F_k^T \\ \star & \beta_k^2 \frac{\bar{U}_i}{w_{\max}^2} \end{bmatrix} > 0, \quad i=1, 2, \dots, m_u \quad (6a)$$

$$\begin{bmatrix} Y_k & B_w & Q_1 C_1^T \\ \star & -\gamma_k^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (6b)$$

여기서 $Y_k = A Q_1 + Q_1 A^T + B_w F_k + F_k^T B_w^T$ 이다.

계의 상태벡터가 $x \in \epsilon_k$ 일 경우 상태되먹임 제어이득 $K_k = F_k Q_1^{-1}$ 로 제어하면

1) 폐회로는 안정하며, w 로부터 z_∞ 까지의 L_2 -이득은 γ_k 보다 작다.

2) 제어입력은 식(3a)의 제한조건을 만족하며, 폐회로 상태벡터는 항상 ϵ_1 에 존재한다.

이 정리의 증명은 참고문헌 8과 같으며, 다음 정리 3의 증명의 일부에 해당하므로 정리 3의 증명으로 대체한다.

정리 2에서 설계한 스케줄 제어이득을 실제 제어시 적용하는 방법은 먼저 측정된 상태변수 x 를 이용하여 $x^T Q_1^{-1} x$ 를 계산하고, 이 값이 포함된 가장 작은 타원체 ϵ_k 를 찾아 해당 제어이득 K_k 를 제어기 이득으로 사용한다. 이 제어기의 특징은 참고문헌⁸의 설명을 참조한다.

2.2.2 변수 행렬 Q 기반 설계

앞의 2.2.1에서는 행렬 Q 가 상수이므로 제어기 설계에서 하나의 제한조건이 된다. 본 논문에서는 행렬 Q 를 변수행렬로 하여 스케줄 제어이득을 설계하는 새로운 방법을 제안한다.

정리 3. 정리 1을 만족하는 Q_1 과 F_1 이 존재하고, $k \geq 2$ 일 때 다음의 LMI식 (7a), (7b), (7c)을 만족하며 γ_k^2 를 최소화하는 양한정 대칭행렬 Q_k 와 행렬 F_k 가 존재하면,

(i) $k=1$ 일 때

정리 1에서 Q_1, F_1, K_1 및 γ_1 을 구한다.

(ii) $k \geq 2$ 일 때

$$\begin{bmatrix} Q_k & F_k^T \\ \star & \beta_k^2 \frac{\bar{U}_i}{w_{\max}^2} \end{bmatrix} > 0, \quad i=1, 2, \dots, m_u \quad (7a)$$

$$\begin{bmatrix} Y_k & B_w & Q_k C_1^T \\ \star & -\gamma_k^2 I & 0 \\ \star & \star & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (7b)$$

$$Q_k - \beta_k^2 Q_1 < 0, \quad \beta_k > 1 \quad (7c)$$

여기서 $Y_k = A Q_k + Q_k A^T + B_w F_k + F_k^T B_w^T$ 이다.

계의 상태벡터가 $x \in \epsilon_k$ 일 경우 상태되먹임 제어이득 $K_k = F_k Q_k^{-1}$ 로 제어하면

1) 폐회로는 안정하며, w 로부터 z_∞ 까지의 L_2 -이득은 γ_k 보다 작다.

2) 제어입력은 식(3a)의 제한조건을 만족하며, 폐회로 상태벡터는 항상 ϵ_1 에 존재한다.

증명

1) 정리 1에서와 같이 제어이득은 식(7b)를 만족하므로 폐회로 안정성을 만족하고, w 로부터 z_∞ 까지의 L_2 -이득은 γ_k 보다 작다.

2) 식(7a)는 Schur Complement⁹에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_k - \frac{w_{\max}^2}{\beta_k^2} F_k^T [\bar{U}_i]^{-1} F_k > 0 \quad (8)$$

식(8)의 좌변에 $(Q_k^{-1} x)^T$ 과 $(Q_k^{-1} x)$ 를 앞뒤에 곱하

면 $x^T Q_k^{-1} x - \frac{w_{\max}^2}{\beta_k^2} x^T Q_k^{-1} F_k^T [\bar{U}_i]^{-1} F_k Q_k^{-1} x > 0$

이며, $K_k = F_k Q_k^{-1}$, $u = K_k x$ 의 관계를 이용하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$x^T Q_k^{-1} x > \frac{w_{\max}^2}{\beta_k^2} u^T [\bar{U}_i]^{-1} u \quad (9)$$

상태벡터가 $x \in \epsilon_k$ 이므로 식(9)를 정리하면 식(A-5)와 동일한 결과를 얻게 되며, 따라서 식(3a)의 입력제한조건을 만족한다.

식(7c)를 다시 쓰면 $Q_1^{-1} < \beta_k^2 Q_k^{-1}$ 이고, ϵ_1 과 ϵ_k 는 각각 $x^T Q_1^{-1} x = \omega_{\max}^2$, $x^T \beta_k^2 Q_k^{-1} x = \omega_{\max}^2$ 로 정의되는 타원체 내부의 상태벡터 공간을 의미하므로, $\beta_k > 1$ 일 경우 ϵ_k 는 ϵ_1 에 포함된다. 즉, $\epsilon_k \subset \epsilon_1$. 상태벡터가 ϵ_k 에 존재하여 제어이득 K_k 가 적용되다가 상태벡터가 ϵ_k 를 벗어나는 경우에는 다른 제어이득이 적용된다. ϵ_1 은 모든 타원체의 가장 최외곽에 있는 타원체이므로, 계의 상태가 ϵ_1 을 벗어나기 전에 반드시 제어이득 K_1 이 적용되는 구간이 존재한다. 정리 1에서 제어이득 K_1 이 적용되는 폐회로계의 상태벡터는 항상 ϵ_1 내부에 존재하게 되므로, 어떠한 경우든 상태벡터는 ϵ_1 에 존재하게 된다.

논의 1) 정리 3에서 $1 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ 의 관계를 갖는 다수의 β_k 를 정의하면, 식(7c)에서 Q_k 의 범위는 $0 < Q_k < \beta_k^2 Q_1$ 이므로 β_k 가 클수록 Q_k 의 설계범위는 넓어진다. 따라서 설계된 제어기의 L_2 -이득은 $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_n$ 의 관계를 갖는다.

논의 2) 정리 2는 정리 3에서 $Q_k = Q_1$ 인 특별한 경우에 해당한다. 따라서 동일한 β_k 에서 Q_k 가 더 넓은 설계범위 $0 < Q_k < \beta_k^2 Q_1$ 를 갖는 정리 3의 제어기 L_2 -이득이 상수 Q 를 이용하는 정리 2의 제어기 L_2 -이득보다 작거나 같다.

논의 3) β_k 가 $1 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ 의 관계를 가질 경우 정리 2는 $\epsilon_1 \supset \epsilon_2 \supset \dots \supset \epsilon_n$ 의 관계를 만족하지만, 정리 3에서는 이 관계가 보장되지 못한다. 따라서 정리 2와 정리 3을 이용해 설계한 스케줄 제어이득의 선정기준은 서로 다르다.

이상의 정리 1과 3을 이용하여 계의 상태가 존재하는 영역에 따라 다음과 같이 서로 다른 제어이득을 적용하는 제어이득 스케줄링을 할 수 있다. 우선 정리 1에서 행렬 Q_1 , F_1 및 K_1 을 얻으며, 정리 3에서 $1 = \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ 의 관계를 갖는 β_k 를 선정한 다음 각 β_k 에 대해 행렬 Q_k , F_k 및 K_k 를 결정한다. 설계된 제어이득은 다음 Fig. 1의 논리에 따라 선정하여 적용한다.

Fig. 1의 제어이득 스케줄링 논리에서는 측정된 계의 상태벡터가 속한 상태벡터영역들 중 L_2 -이득

이 가장 작은 영역 ϵ_k 를 찾아 이 영역에서의 제어이득 K_k 를 제어이득으로 선정함으로써 주어진 제어 입력 제한조건을 만족하는 제어기 중 L_2 -이득 측면에서 가장 우수한 제어이득을 선정하는 개념이다.

논의 4) 스케줄 제어에서 정리 2를 이용할 경우 행렬 Q_1 과 β_k 및 K_k 를 저장하지만, 정리 3을 적용할 경우 Q_k , β_k 및 K_k 를 저장해야 되므로, 정리 3을 이용할 경우가 더 많은 파라미터 저장 공간이 필요하다.

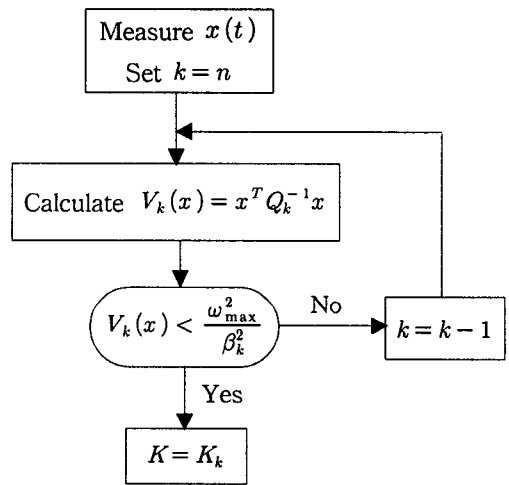


Fig. 1 Logic for scheduling gains

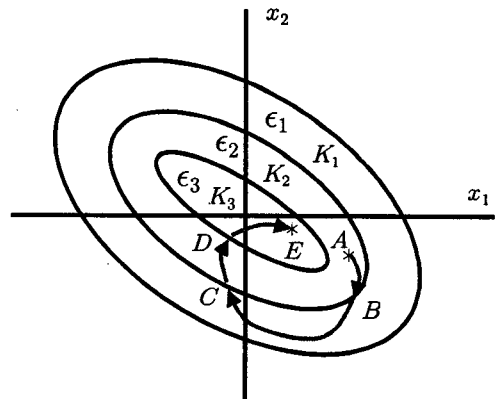


Fig. 2 Conceptual diagram of gain scheduling control

스케줄링 제어 개념을 2-차계에서 상태공간변수 $x_1 - x_2$ 로 구성된 상태벡터 평면에서 보면 Fig.

후 기

2와 같다. 우선 설명의 편의를 위해 3개의 제어이득을 갖는 스케줄링 경우와 각 상태벡터영역 ϵ_k 가 Fig. 2에서와 같이 상호 포함관계를 갖는 경우를 가정하였다. 포함관계에 대한 가정이 만족되는 못하는 경우도 다음 설명을 확장하면 쉽게 설명할 수 있다.

화살표로 표시된 곡선은 계의 상태벡터의 궤적을 나타내며, 점 A 는 시작점을, 점 B, C, D 는 궤적이 각 타원체와 만나는 점, 점 E 는 궤적이 끝나는 점을 나타낸다. 점 A 에서 출발한 계의 상태가 점 B 에 도달할 때까지 제어이득은 K_2 가 적용되며, 점 B 에서 점 C 까지의 구간 \widehat{BC} 에서는 K_1 이, \widehat{CD} 에서는 다시 K_2 가, \widehat{DE} 구간에서는 K_3 가 적용된다. 구간 \widehat{BC} 에서 궤적은 절대 ϵ_1 외부로 벗어나지 않는다.

이와 같이 제어이득 스케줄링 방법은 계의 응답이 작아지면 보다 작은 L_2 -이득을 갖는 제어가 적용되므로 고정이득 제어에 비해 좋은 제어 성능을 기대할 수 있다.

3. 결론

본 연구에서는 제어입력의 크기 제한을 갖는 시스템에서 외란응답을 최소화할 수 있는 제어이득 스케줄 제어 방법을 제시하였다. 기존 고정이득제어가 최악의 외란조건에서도 제어입력제한을 만족하도록 설계함에 따라 가용한 제어입력을 충분히 이용하지 못함에 비해, 스케줄 제어는 계의 상태벡터에 따라 제어입력의 제한을 만족하며 외란과 제어출력간의 L_2 -이득을 최소화하는 고이득의 제어를 적용함으로써 가용한 제어입력을 보다 효율적으로 사용하여 제어성능 향상을 기할 수 있다. 특히 제어가 설계 변수행렬 Q 를 상수로 하는 기존의 설계방법에 비해 Q 를 변수로 사용하는 제안된 방법은 제어가 설계에 있어 제한조건을 완화하는 효과가 있어 상대적으로 더 작은 L_2 -이득을 얻을 수 있으므로, 더 우수한 제어성능을 기대할 수 있다. 제안된 방법의 안정성과 제어성능을 행렬 Q 를 상수로 하는 경우와 비교 증명하였다.

제안된 방법은 후속 논문에서 적용성과 성능을 입증할 예정이다.

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(과제번호: R01-2003-000-10857-0) 지원으로 이루어졌으며, 재단의 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- Bernstein, D. S. and Michel, A. N., "A Chronological Bibliography on Saturating Actuators," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, pp. 375-380, 1995.
- Stoorvogel, A. A. and Saberi, A. (Eds.), Special Issue on "Control Problems with Constraint," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 9, pp. 583-734, 1999.
- Lin, Z. and Saberi, A., "A Semi-global Low-and-High Gain Design Technique for Linear Systems with Input Saturation - Stabilization and Disturbance Rejection," *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 5, pp. 381-398, 1995.
- Lin, Z., Saberi, A. and Teel, A. R., "Simultaneous L_p -stabilization and Internal Stabilization of Linear Systems Subject to Input Saturation - State Space Feedback Case," *Systems and Control Letters*, Vol. 25, pp. 219-226, 1995.
- Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for LPV Systems with Bounded Inputs," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 1543-1547, 1998.
- Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for Systems with Input Saturation: An LMI Approach," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 44, No. 4, pp. 852-857, 1999.
- Nagpal, K., Abedor, J. and Poolla, K., "An LMI Approach to Peak-Peak Gain Minimization: Filtering and Control," *Proc. of the American Control Conference*, pp. 742-746, 1994.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V., "Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory," SIAM Books, Philadelphia, 1994.
- Kim, Y. B. and Byeon, J. H., "Robust Decoupling

Control of Ship Propulsion System with CPP,” J. of KSPE, Vol. 15, No. 9, pp. 33-42, 1998.

10. Keh, J. E. and Lee, M. H., “Robust Controller Design for a Stabilized Head Mirror,” Int. J. of Precision and Manufacturing, Vol. 3, No. 4, pp. 78-86, 2002.

11. Srivastava, S. and Jabbari, F., “Scheduled Controllers for Disturbance Attenuation of Systems with Bounded Inputs,” Proc. of the American Control Conference, pp. 735-739, 2000.

12. Kose, I. E. and Jabbari, F., “Scheduled Controllers for Linear Systems with Bounded Actuators,” Automatica, Vol. 39, No. 8, pp. 1377-1387, 2003.

13. Leith, D. J. and Leithead, W. E., “Survey of Gain-scheduling Analysis and Design,” Int. J. of Control, Vol. 73, No. 11, pp. 1001-1025, 2000.

부 록

A1. 정리 1의 증명⁸

1) 식(4c)는 w 로부터 z_∞ 까지의 L_2 -이득이 γ_1 보다 작은 안정한 상태피드백제어기가 존재할 필요충분조건이다. 따라서 식(4c)를 만족하는 제어이득 $K_1 = F_1 Q_1^{-1}$ 는 폐회로 안정성을 보장하며, w 로부터 z_∞ 까지의 L_2 -이득은 γ_1 보다 작다.

2) 폐회로에서 함수 $V(x) = x^T Q_1^{-1} x$ 를 정의했을 때, 식(4a)는 다음 식을 의미한다.

$$\dot{V}(x) + \alpha(V(x) - w^T w) < 0 \quad (A-1)$$

식(A-1)을 만족하는 양의 α 가 존재하면, 폐회로 상태벡터는 다음을 만족한다.

$$V(x) = x^T Q_1^{-1} x < w_{\max}^2 \quad (A-2)$$

즉, 식(A-1)과 (A-2)로부터 만일 계의 상태벡터가 $x^T Q_1^{-1} x = w_{\max}^2$ 로 정의되는 타원체 내부에 존재하는 경우 상태벡터는 타원체 외부로 나가지 않고 항상 내부에 존재하게 된다. 만일 계의 상태벡터가 타원체 외부에 있을 경우에는 $\dot{V}(x) < 0$ 이므로 타

원체로 접근하며, 타원체를 통과하여 내부로 들어 오게 된다. 즉, 식(A-2)로 나타나는 타원체의 내부는 주어진 외란 조건에서 계의 상태벡터가 존재할 수 있는 도달영역을 나타낸다. 이 때 α 는 영과 허수축에서 가장 가까운 폐회로 극점의 실부수의 두 배 사이에 존재한다.

3) 식(4b)는 Schur Complement⁹에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$Q_1^{-1} - \omega_{\max}^2 F_1^T [\bar{U}_i]^{-1} F_1 > 0 \quad (A-3)$$

이 식을 다시 쓰면

$$x^T Q_1^{-1} x > \omega_{\max}^2 u^T [\bar{U}_i]^{-1} u \quad (A-4)$$

식(A-2)의 도달범위를 식(A-4)에 적용하면 다음의 결과를 얻게 되며,

$$1 > \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{u_1^2}{u_1^2} + \dots + \frac{u_{i-1}^2}{u_{i-1}^2} + \frac{u_{i+1}^2}{u_{i+1}^2} + \dots \right\} + \frac{u_i^2}{u_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m_u \quad (A-5)$$

여기서 λ 는 임의의 충분히 큰 값이므로 식(A-5)는 $1 > \frac{u_i^2}{u_i^2}$ 이 되며, 따라서 식(3a)가 만족된다. 즉, 주어진 제어입력 제한조건을 만족하게 된다.