

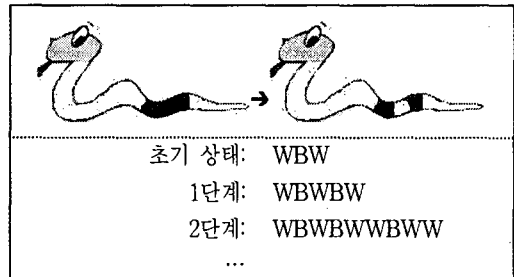
재귀적 패턴과 거북 마이크로월드 설계

김 화 경 (서울대학교 대학원)

1. 들어가며

산술에서 대수로의 이행에서 가장 중요한 변화는 문자의 사용이다. 수 체계 위에서 이루어지는 학교 수학에서 문자는 수를 대신하는 역할로 도입된다. 그러나 이러한 문자의 도입은 학교 대수를 지나치게 기계적인 절차 위주로, 문자 놀이로 만드는 경향이 있다.

세계적으로 기존 학교 대수가 기계적인 절차를 지나치게 강조하여 발생한 폐해를 극복하고자 하는 노력의 일환으로 새로운 대수 교육과정의 모색되고 있다. 그 중 가장 중요한 변화는 '패턴에 기초한 대수 도입'이다(김성준, 2002). 실제로 미국, 영국, 호주 등의 교육과정에서 패턴 도입에 이은 대수접근을 확인할 수 있다(Murdock et al., 2002; Tannenbaum, 2003). 한 예로 RME 이론에 기초한 MiC(Mathematics in Context)의 교육 과정을 살펴보면 대수과정(Algebra strand)의 도입에 '패턴과 기호(Patterns and Symbols)'(Roodhardt et al., 1997)라는 교재를 사용하고 있다. MiC 교과서는 방울뱀의 무늬를 문자로 나타내게 하고 그 문자 조작으로 방울뱀의 무늬 변화를 표현한다. <그림 1>에서 뱀의 흰색 무늬를 W, 검은색 무늬를 B로 약속하면 왼쪽 뱀은 WBW, 오른쪽 뱀은 WBWBW와 같이 나타낼 수 있다. 또한 무늬의 분열, 허물벗기는 B→BWB와 같이 나타낼 수 있고, 각 단계의 분열의 결과는 <그림 1>과 같이 문자로 나타낼 수 있다. 이 때, 문자는 뱀의 상태를 나타내는 의미를 가지게 된다. 또한 문자 조작은 뱀의 무늬 분열이라는 의미를 갖게 된다.



<그림 1> 문자의 사용

문자에 의미를 붙여 넣으려는 노력은 한편으로 '행동(action)'과 연관된다. 문자와 행동을 연결하는 대표적인 예가 Logo 환경으로, Pimm(1995)은 Logo에서 거북이의 언어는 행동을 단지 설명하는 것이 아니라 행동을 만들고, 조절하는 특징을 가진다고 말한다. 즉, Logo 환경은 거북 행동을 만들고, 거북 행동의 결과에 주목하도록 한다. 이는 Watson et al.(2003)이 행동과 그 효과로 벡터의 등호 개념의 접근을 시도한 것과 유사하다. 즉, 중간중간의 행동보다는 결과에 주목하여 같은 효과, 결과로 등호를 이해한다. 이에 문자의 의미를 행동에서 찾고, 문자 조작으로 행동 패턴을 만드는 교육 과정을 고려할 수 있고, 이 때 등호는 같은 효과로 이해될 수 있다.

이 글은 문자의 의미를 행동에서 찾을 수 있는 컴퓨터 환경에 대하여 논의하려 한다. 먼저 거북 행동과 문자를 연결하는 Logo 환경을 군(group)이라는 대수적 구조 속에서 파악해 보고, 나아가 보다 직접적으로 문자를 도입하여 문자 조작을 통한 패턴 생성 환경을 살펴본다. 나아가 수학교육적 고려를 통해 재귀적 패턴과 관련한 컴퓨터 환경을 설계하고, 이 환경이 가지는 의의를 고찰한다. 이 환경은 문자에 새로운 의미를 부여하고 문자를 통해 재귀적 패턴을 만든다는 측면에서 대수교육과 연결될 수 있다. 특별히 이 글은 미리 만들어진 컴퓨터 프로그램을 이용하는 것이 아니라 직접 문자를 사용하는

* 2005년 9월 투고, 2006년 3월 심사 완료.

* ZDM분류 : U73

* MSC2000분류 : 97C80

* 주제어 : 마이크로월드, 재귀적 패턴, 문자와 의미, 컴퓨터와 수학교육, 자바말, L-system

대수 교육과정과 관련된 컴퓨터 환경의 설계에 관한 연구이다. 이 때, 설계되는 환경은 제7차 교육과정 초등학교 수학 익힘책 3-가, 4-가(교육인적자원부, 2002a, b)의 거북 명령 프로그램²⁾을 수정·보완한 것이다.

2. 거북 행동과 거북군

거북이의 행동을 명령이라는 문자와 연결하는 환경인 Logo는 기하적인 측면뿐만 아니라 대수적인 측면으로도 의미를 가진다. 거북이의 기하적인 측면과 대수적인 측면의 연결의 논의하는 Leron et al.(1992)에 의하면 거북 명령들의 집합, 즉 거북 행동의 집합은 거북군(turtle group)이다.

직관적인 수준에서 살펴보면 거북군의 원소는 임의의 실수 값을 입력 값으로 하는 “가자(FD)”와 “돌자(RT)”의 거북 연산과 그들의 조합으로 볼 수 있다. 예를 들어 “가자 50; 돌자 90; 가자 30; 돌자 -70; 가자 -67”은 거북군의 한 원소를 나타낸다. 보다 엄밀하게 거북군을 도입하기 위해서는 우선 거북 상태(turtle state)를 정의해야 한다. 거북 상태란 거북이의 위치와 머리 방향을 모두 나타내는 것으로, 거북이의 위치를 좌표 (x, y) , 거북이의 머리 방향을 초기 위치에서 회전한 각도 θ 로 나타낼 때, 거북 상태를 순서쌍 (x, y, θ) 로 나타낸다. 이 때, 집합 S 을 모든 거북 상태의 모임이라고 하고, 거북 평면(turtle plane)이라고 하자. 이제 Logo의 각각의 명령은 현재의 거북 상태를 변화시키는 변환으로 이해될 수 있다. 예를 들어, “돌자 90”을 통하여 거북 상태의 변화는 아래와 같다.

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow (0, 0, 90) \\ (-50, 50, -90) &\rightarrow (-50, 50, 0) \end{aligned}$$

마찬가지로 “가자 10”을 통하여 거북 상태의 변화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow (0, 10, 0) \\ (-50, 50, -90) &\rightarrow (-40, 50, -90) \end{aligned}$$

<표 1>는 S 의 임의의 원소 (x, y, θ) 에 대한 변화를 나타낸다.

<표 1> 거북 상태 변환

“돌자 a ”	$(x, y, \theta) \rightarrow (x, y, \theta + a)$
“가자 b ”	$(x, y, \theta) \rightarrow (x + b\sin\theta, y + b\cos\theta, \theta)$

이제 거북군을 보다 형식적으로 다음 집합으로 생성된 군으로 볼 수 있다.

$$\{ \text{“가자 } a\text{”, “돌자 } b\text{”} \mid a, b \text{는 실수} \}$$

변환군으로 거북군을 이해하게 될 때, 군의 연산은 변환 사상의 합성이다. 즉, 만약

$$g_1 = \text{“가자 5; 돌자 30”}$$

$$g_2 = \text{“돌자 -30; 가자 70”}$$

이라면

$$g_1 \circ g_2 = \text{“가자 5; 돌자 30; 돌자 -30; 가자 70”}$$

이다. 일반적으로 Logo 명령은 왼쪽으로부터 시작하여 오른쪽으로 나아가는 순서로 진행된다. 이에 맞추어 $g_1 \circ g_2$ 역시 먼저 변화 g_1 을 하고 나중에 변환 g_2 을 실행한다. 이는 일반적인 합성 순서와 다르다.

다음으로 거북군의 항등원(I)은 아무 것도 하지 않은 상태 즉, “가자 0”이나 “돌자 0” 등의 거북 상태를 바꾸지 않는 경우를 말한다. 또한 “가자 a ”의 역원은 “가자 $-a$ ”이고 “돌자 b ”의 역원은 “돌자 $-b$ ”이다. 임의의 원소의 역을 구할 때는 그 순서를 바꾸어서 역을 취해주어야 한다. 예를 들어,

$$g = \text{“가자 10; 돌자 10; 가자 -50; 돌자 40”}$$

이라면 그 역원은

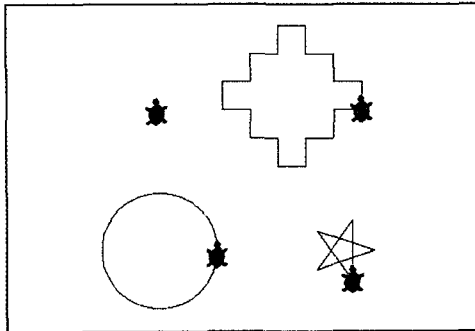
$$g^{-1} = \text{“돌자 -40; 가자 50; 돌자 -10; 가자 -10”}$$

이 된다. $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = I$ 이다.

거북군 G 의 두 원소 f, g 에 대하여 임의의 거북 상태 $s \in S$ 에 대하여 $f(s) = g(s)$ 이 성립할 때, $f = g$ 이다. 즉, 거북이가 중간에 그리는 자취는 달라도 결과적으로 같은 거북 상태로 바꾸는 명령은 같은 것으로 본다. 거북이의 위치 상태를 변화시키는 효과가 같다는 측면에서 Abelson et al.(1980)은 거북이의 연산을 ‘상태-변화 동치연산(state-change equivalent operation)’라고 불렀다. <그림 2>는 현재 거북 위치에 변화를 일으키지 않으므로 모두 항등원을 나타낸다.

2) 인터넷 <http://web.edunet4u.net/~javamath> 에서 연결 가능하고, <http://javamath.snu.ac.kr>에서 PC 버전을 내려받는 방법을 알 수 있다.

3) 실제 컴퓨터에서 사용되는 값은 근사값이다.



<그림 2> 거북군의 항등원

3. 행동 문자와 L-system

Steen(1988)은 컴퓨터와 응용 수학이 발전하는 요즘 더 이상 수학적 탐구 대상은 수와 도형에만 한정되는 것이 아니라 패턴에 대한 연구로 그 영역을 확장하는 과학이라는 의미에서 수학을 ‘패턴의 과학’이라고 지칭하고 있다. 수학을 패턴에 대한 연구라고 생각했을 때, 패턴의 접근 방식은 어떤 방법이 있을까? 이에 대하여 Yerushalmy et al.(2002)은 ‘명시적(explicit)’과 ‘재귀적(recursive)’로 패턴에 대한 접근 방법을 나누고 있다. 명시적 태도란 패턴 해석에서 위치에 따른 값을 나타내는 명시적 식을 먼저 구하려는 태도이다. 예를 들어 수열이라는 수의 패턴이 주어졌을 때, 그 수열의 일반항을 먼저 생각하는 접근 태도가 명시적 접근이다. 반면 재귀적 태도란 패턴 해석에서 전후간의 관계에 주목하는 태도이다. 예를 들어 수열에서 주어진 수열의 점화식을 우선 고려하는 사고방식을 말한다. Yerushalmy et al.(2002)은 명시적 접근 이전에 재귀적 접근을 통하여 패턴을 해석하고, 나아가 재귀적 방법으로 패턴을 생성하는 경험이 필요하다고 말하고 있다. 마찬가지로 김성준(2002)은 세계적 대수 교육과정을 비교하면서 우리나라 교육과정에 나타난 패턴에 대한 내용을 분석한 결과로 기하적인 속성을 갖는 패턴이 필요하다는 점과 자신의 패턴을 스스로 만들어 볼 수 있는 기회가 부족하다는 점을 지적하고 있다.

이제 기하적인 속성을 갖는 재귀적 패턴 생성 환경을 생각해보자. 이때, 재귀적 패턴은 초기값과, 전·후항들 사이의 관계로 만들어지고, 각 단계에 해당하는 자연수

와 그에 대응하는 그림이 존재한다. 따라서 재귀적 패턴 생성 환경은 이 초기값과 관계의 두 가지 값을 변화시켜 새로운 패턴을 만들 수 있어야 하며 적당한 단계를 대입하여 그림을 생성할 수 있어야 한다.

(1) L-system

1968년 네덜란드의 생물학자인 Lindenmayer는 식물의 성장을 도식화하는 형식적 체계를 제안하였다. 이 체계는 문자 되쓰기 체계(string-rewriting system)로 Lindenmayer system이나 L-system으로 불린다. 이 체계에서 Lindenmayer는 초기 조건과 간단한 규칙을 통한 생물 성장에 관한 수학적 식을 만들었다. 여기서 중요한 원리는 문자 되쓰기인 대입으로, 이를 통해 다음 단계의 문자열을 얻게 된다. 어떤 문자를 사용하던 상관없지만 전통적으로 알파벳과 ASCII 기호가 사용되며, 그 중 몇몇은 특별한 의미를 지니고, 각 문자열은 왼쪽에서 오른쪽으로 해석되며, 빈 공간은 의미 없는 것으로 간주된다. 예를 들어, 만약 L-system이 다음 정보를 가지고 있다고 하자(Prusinkiewicz et al., 1990).

- 초기값: B
- 규칙 1: B → A
- 규칙 2: A → AB

위의 규칙에서는 하나의 문자 B가 초기값에 해당하고, 생성 규칙, 즉 문자 되쓰기 규칙은 B → A와 A → AB 이다. 즉, 전 단계의 문자 B는 모두 A로 바꾸고, 문자 A는 모두 AB로 바꾸어야 한다. 이 규칙을 적용한 초기값에서 처음 5 단계까지의 문자열을 나타내면 <표 2>와 같다.

<표 2> L-system에서 문자열

초기값:	B
1단계:	A
2단계:	AB
3단계:	ABA
4단계:	ABAAB
5단계:	ABAABABA

문자열의 되쓰기의 L-system은 Logo 환경의 거북 그래픽(4)을 이용하여 시각적으로 나타낼 수 있다(DuBois,

2003). Logo 환경에서의 거북이는 평면 위를 움직이는 추상적인 대상으로 평면 위의 한 점의 위치를 차지하고 있으면서 특정한 방향을 지향하고 있다. 이 거북이는 특정 거리만큼 앞, 뒤로 움직이거나 특정 각도만큼 오른쪽, 왼쪽으로 돌 수 있다. 이러한 일정한 움직임과 문자를 연결시켜 시각화하는 것이다. 거북이에게 다음 <표 3> 과 같이 네 문자를 인식하도록 하여 L-system을 시각적으로 구현할 수 있다(Wagon, 1991).

<표 3> L-system 명령

명령	의미
F	일정한 거리를 선을 그으면서 앞으로 가기
f	일정한 거리를 선을 남기지 않고 앞으로 가기
+	기본각도만큼 왼쪽(반시계방향)으로 돌기
-	기본각도만큼 오른쪽(시계방향)으로 돌기

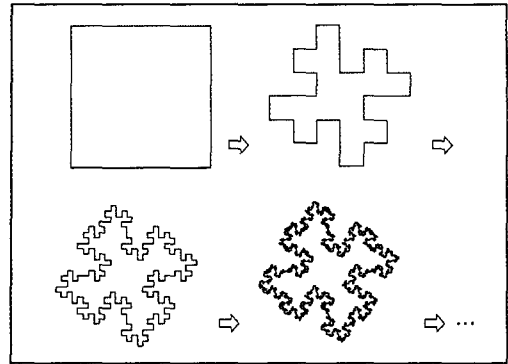
여기서 일정한 거리와 기본 각도는 미리 지정되는 값이다. 예를 들어 일정한 거리가 30이고, 기본 각도가 90° 일 때, F+F+F+F(가고, 왼쪽 돌고, 가고, 왼쪽 돌고, 가고, 왼쪽 돌고, 가고)는 시각적으로 한 변의 길이가 30인 정사각형을 그리게 된다. 또한 여기에 규칙을 적용하면 L-system은 각 단계별 해당 그림을 시각적으로 보여줄 수 있게 된다. 예를 들어 아래의 규칙은 사각 Koch 눈송이(Mandelbrot, 1982)을 나타낸다.

초기값: F+F+F+F+

규칙 1: F → F+F-F-FF+F+F-F

<그림 3>는 이 규칙으로 만들어진 사각 Koch 눈송이의 단계별 모습을 25% 축소하면서 나열한 모습이다.

이 때, 문자는 거북 행동을 나타내고 있다. 기존 Logo 가 “가자”와 “돌자”를 구체적 수와 연결하여 거북 행동을 표현하는 데 비해, L-system은 그 행동을 행동 문자로 나타내고 있는 것이다.



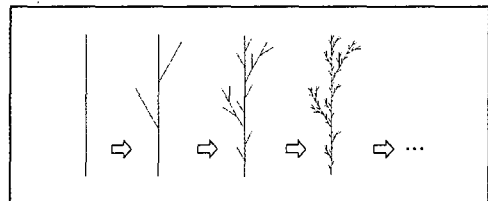
<그림 3> L-system과 Koch 눈송이

L-system의 또 다른 특징은 분기(branching) 기능에 있다. 이는 자기 닮음을 손쉽게 표현하기 위하여 문자열 사이에 표시를 하는 기능이다. 일반적으로 ‘[’와 ‘]’ 기호를 앞선 네 가지의 거북 그래픽의 기본 명령에 더하여 분기 구조를 만든다. 거북 환경에서의 시각적 의미는 분기 기호 안의 행동을 하고 다시 원 위치와 상태로 돌아오라는 의미이다. 이를 통하여 자기 닮음성이라는 프랙탈 그림을 손쉽게 구현할 수 있게 된다.

초기값: F

규칙 1: F → F[+F]F[-F]F

일정한 길이와 기본각도(30°) 상황에서 이 규칙을 통하여 <그림 4>과 같이 자기 닮음성이 강한 그림 패턴을 만들어 낸다. 이는 나무 성장과 연관성이 높은 그림으로 생물학에서 많이 이용되는 패턴이다. 각 단계는 그 이전 단계의 그림을 포함하고 있으며, 이를 위해서 분기 기능 명령을 이용하고 있다.



<그림 4> 분기 기능

4) 거북이를 이용한 시각화이기 때문에 Logo 환경의 거북 그래픽이라는 용어를 사용한다.

(2) L-system의 대수적 구조

이제 L-system⁵⁾을 거북군의 측면에서 살펴보도록 하자. 일단 L-system은 일정한 거리와 기본각도를 먼저 정하고 그 값을 통한 거북이의 움직임을 구현한다는 측면에서 거북군의 부분군으로 생각할 수 있다. 즉,

$$\{F, +\}$$

로 생성된 부분군이다. 예를 들어, 일정한 거리를 10으로 기본각도를 90도로 가정한다면, “+”를 통하여 거북 상태는 아래와 같이 변한다.

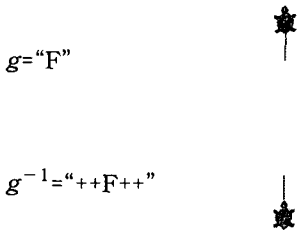
$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow (0, 0, 90) \\ (-50, 50, -90) &\rightarrow (-50, 50, 0) \end{aligned}$$

마찬가지로 “F”에 의하여 거북 상태는 아래와 같이 변한다.

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow (0, 10, 0) \\ (-50, 50, -90) &\rightarrow (-40, 50, -90) \end{aligned}$$

이제 {F, +}로 생성된 부분군을 L-거북군(L-turtle group)이라고 부른다.

하지만 L-system에서는 $g=“F”$ 일 때, g^{-1} 를 나타내는 문자가 없다. $h=“+”$ 일 때, $h^{-1}=“-”$ 이지만 g^{-1} 의 경우는 해당되는 문자가 없다. 역을 표현하기 위해서는 F와 +를 조합해야만 한다. 예를 들어, 일정한 거리를 10으로 하고 기본 각도를 90°로 한다면 $g=“F”$ 에 대하여 $g^{-1}=“++F++”$ 와 같이 나타낼 수 있다. 즉, <그림 5>와 같다.



<그림 5> L-system에서의 역원

그러나 기본 각도가 변하게 된다면 이 역원은 다르게

표현되어야 한다. 기본 각도가 45°라면 +가 더 많아져야 할 것이다.

$$g^{-1}=“++++F++++”$$

이러한 역원에 대한 기호의 문제는 L-system에 대한 좀더 깊은 수학교육적 고려가 필요함을 암시한다.

4. 거북 마이크로월드의 수학교육적 설계

Logo 환경이 거북 행동을 구체적 수를 써서 나타내는 구체적 행동의 단계였다면, L-system은 행동 문자를 사용하는 환경이다. 또한 L-system에서의 행동 패턴 문자는 거북이의 행동 패턴과 연결되고, ‘카오스 현상에 의한 패턴(김상미의, 1997)’을 보다 쉽게 시각화할 수 있다. 그러나 수학교육적으로 약간 혼란스러운 면도 역시 존재한다. 이제 실제 재귀적 패턴과 관련된 컴퓨터 환경을 설계·구현해 보자.

(1) 컴퓨터 환경의 설계 - 마이크로월드

구성주의(constructionism)는 교수보다는 학습을 중요시 하여 물리적 구성 속에 정신적 구성을 강조한다(Kafai et al., 1996). 특별히 구성주의는 학습자 혹은 아동이 의미 있는 물리적 인공물을 직접 만들 수 있는 놀이 공간을 필요로 한다. 이러한 놀이 공간을 컴퓨터 속에 만든 것이 바로 마이크로월드(microworld; Edwards, 1995)이다. Papert(1980)의 Logo 이후 StarLogo(Resnick, 1994), Boxer(diSessa, 2000), JavaMAL(조한혁, 2003)등의 마이크로월드가 구현되었고, 동적인 끝기를 통한 직접 조작 환경인 Geometer’s Sketchpad(GSP; Goldenberg et al., 1998; Serra, 1997), Cabri(Laborde et al., 2001)등이 만들어 졌다. 이들 각각의 마이크로월드는 사용방법이나 모양은 달라도 몇 가지 공통 특징을 가지고 있다. 이러한 공통된 특징은 다시 새로운 마이크로월드 설계 원칙이기도 하다.

1) 언어적 환경이다.

언어적인 구조를 갖는 도구는 그 언어를 사용하는 대상에게 새롭고 복잡한 언어적 표현의 세계를 만들게 한다. 기존의 교육용 소프트웨어는 가르칠 개념과 지식

5) 이후로 L-system은 거북 환경에서 시각화된 것을 지칭하기로 한다. 여기에 제시되지 않은 다양한 프렉탈 그림을 그리는 데 L-system을 이용할 수 있다(Wagon, 1991).

이 미리 담겨져 있는 그릇이었다면, 마이크로월드는 대상과 조작이 있는 수학적 언어 체계로, 학습자가 기존의 개념과 지식 등을 새롭게 해석하고 구성할 수 있는 공간이다. 예를 들어, Logo 거북 언어는 기존의 도형을 “가자”와 “돌자”라는 언어로 표현하고, 또한 이러한 표현을 통해 컴퓨터와 인간이 의사소통을 할 수 있는 환경이다. 언어를 통하여 자신이 원하는 것을 그 환경 체계에 맞도록 디자인하고 또한 그것을 통해 의사소통할 수 있게 된다(Sutherland, 1995). 이렇게 학습자가 마이크로월드에 구성된 표현은 학습자의 사고와 반성을 위한 매우 중요한 도구가 된다(Brizuela et al., 2000). 즉, 언어적 표현을 통한 학습자와 교사, 컴퓨터 사이의 의사소통내지 상호작용의 과정은 그 자체로 하나의 사고체계를 형성하게 된다. 또한 언어적 표현은 오류 분석 등을 통해 자신의 행동에 대한 반성적 사고의 기회를 제공한다.

2) 구성과 조작이 강조되는 환경이다.

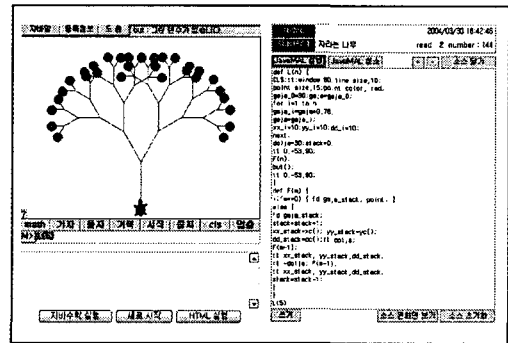
‘구성(construct)’와 ‘조작(manipulate)’의 환경이어야 한다(Eisenberg, 1995). 여기서 ‘구성’이란 마이크로월드에서 언어를 사용하여 인공물 만들기를 뜻하며, ‘조작’이란 마우스 끌기와 같이 만들어진 인공물에 변화를 가하는 것을 의미 한다. 예를 들어, Logo 환경에서 ‘별’을 그리거나, GSP나 Cabri와 같은 동적 기하 환경(dynamic geometry system; DGS)에서 점들의 종속성을 이용하여 ‘평행사변형’을 작도하는 것은 구성에, 이미 만들어진 ‘별’이나 ‘평행사변형’에 변화를 주는 것이 조작에 해당된다. 마이크로월드는 인공물을 구성할 수 있는 환경인 동시에 만들어진 인공물을 조작할 수 있는 환경이어야 한다. Logo를 비롯한 기호적 마이크로월드는 구성이 보다 강조되며, DGS의 동적 기하 마이크로월드는 조작이 좀더 강조된다. 또한 조작과 구성의 방법으로 기호적 마이크로월드는 문자를 주로 사용하며 동적 마이크로월드는 마우스 끌기나 메뉴 등을 주로 사용한다.

(2) 재귀적 패턴과 마이크로월드

1) Logo 환경과 재귀적 패턴

Logo 환경에서도 재귀적 패턴이 나타나는 그림을 그리는 것이 가능하다. <그림 6>은 Logo 환경에서 재귀적

패턴을 생성하는 예이고, 나아가 Logo와 재귀적 패턴의 다양한 예는 Abelson et al.(1980)에서 찾아볼 수 있다. 이 때, Logo 환경을 통해 스스로 기하적 패턴을 만들 수 있으며, 기하적 패턴의 생성 원리를 거북이의 행동과 연결할 수 있다. 즉, 학습자는 Logo 환경에서 재귀적 관계를 통하여 패턴을 생성하고 나아가 이를 수학적으로 분석하는 경험을 할 수 있다.



<그림 6> Logo 환경과 패턴 생성

그러나 Logo 환경에서 재귀적 패턴을 만들 때는 전·후항의 관계뿐만 아닌 길이와 각을 변수로 사용하는 명시적 식을 고려하고, 이에 따라 재귀적 함수를 정의하여야 한다. 즉, 원하는 패턴을 모두 분석하여 명시적, 재귀적 관계를 모두 파악한 후에 이를 다시 Logo 프로그래밍을 해야 하는 것이다. 이는 먼저 스스로 패턴을 만들고 그 이후 분석하는 환경을 설계하려는 원래의 의도와 반대 방향의 작업이 된다. 다시 말해 Logo 환경에서는 컴퓨터 화면에 원하는 패턴을 생성하는 것이 너무 어려워 원활한 패턴 생성과 조작을 방해한다. <그림 6>의 오른쪽 명령은 너무 복잡하다.

2) 재귀적 마이크로월드의 수학교육적 설계

L-system은 본래 식물의 생장을 설명하려 도입된 문자 되쓰기의 체계이므로 학교 수학에서의 연산 기호인 +, -를 거북이의 행동을 나타내는 기호로 사용하여 혼란을 야기한 측면이 있다. - 기호의 경우 수학에서는 덧셈에 대한 역원을 나타내는 기호로 사용하지만 “-F”는 F의 역원의 의미가 아닌, “-” 그리고 “F”의 의미로 먼저 오른쪽으로 돌고 앞으로 가라는 행동을 나타낸다.

이러한 문제점에 대한 해결 방안으로 명령어 체계를

<표 4>와 같이 수정하자. 우선 명령은 모두 소문자 알파벳을 사용했으며, +, -의 기호를 사용하지 않았고, '돌자'의 의미가 강조될 수 있도록 화살표 모양(<, >)을 사용하였다.

<표 4> L-system 수정된 명령어

Table with 2 columns: 명령 (Command) and 의미 (Meaning). Rows include f (forward), g (backward), < (left turn), and > (right turn).

또한 역원의 문제점을 해결하기 위하여 '-' 기호는 역원을 나타내는 기호로 사용한다. 즉, h ∈ G에 대하여 h^-1 = -h로 나타내는 것이다.

-f = g, -< = >, -g = f, -> = <

h=f<라면 h^-1=-h=>가 된다. 이 때, 등호의 의미는 거북 상태의 변화를 같게 한다는 의미이다.

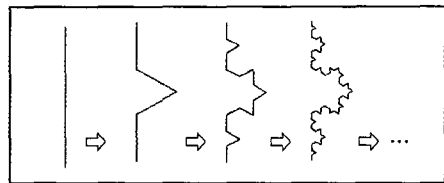
기존 Logo 환경의 명령 방식과의 호환성과 구별을 위하여, 'do f<'와 같은 방법으로 명령을 실행되도록 하고, 'do' 명령은 단계(수)를 변수로 취할 수 있도록 설계하였다.

이렇게 역원이 정의된 L-거북군 L에 대하여 군 L 위의에서의 군 준동형사상을 생각해 보자. 만약 어떤 대응 phi: L -> L이 준동형사상이기 위해서는 phi(f)와 phi(<)이 정의되어야 한다. 예를 들어 f='f'f<<<<f'6)에 대하여, 초기값을 f로 하여 준동형사상 f='f'f<<<<f'의 합성으로 각 단계의 문자열을 나타내면 <표 5>과 같다.

<표 5> 단계별 문자열

Table with 2 columns: 단계 (Stage) and 명령 (Command). Shows recursive patterns for do_0 to do_3.

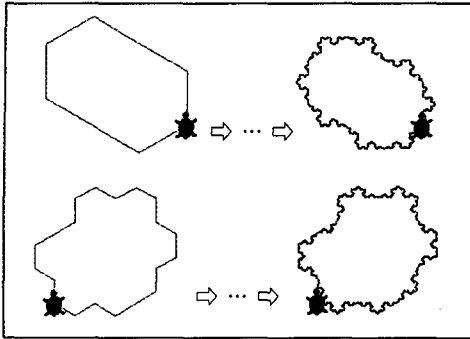
이 행동 문자열에서 기본 각도가 60°일 때, <그림 7> 과 같이 단계별로 나타낼 수 있다.



<그림 7> 단계별 패턴

문자 되쓰기는 준동형사상으로 이해될 수 있고, 만약 phi: L -> L가 준동형사상이라면 항등원을 보존한다. 즉, 단순 도형은 몇 번의 L-system 단계, 즉 합성을 거치더라도 항상 닫힌 그림을 그리게 된다. <그림 8>은 f='f'f<<<<f'이라는 준동형사상을 여러 번 합성한 그림이다. 이 때, 모든 단계에서 그림은 닫혀 있게 된다.

6) phi(f)=f'f<<<<f와 같은 의미로 사용한다.



<그림 8> 항등원과 준동형사상

우리는 문자가 거북이의 행동을 나타내는 L-system 환경을 수학교육적 고려를 통해 보다 수학적인 구조를 갖도록 명령어를 수정하여 마이크로월드를 설계하였다. 이 컴퓨터 환경은 문자라는 언어적 명령을 사용하여 거북 행동을 만들고, 거북 행동 패턴을 구성, 조작할 수 있는 마이크로월드이다.

5. 통합 환경의 설계와 교육적 의의

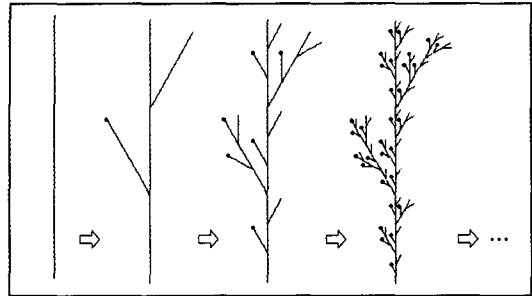
(1) 통합 환경 설계

우리는 기존에 존재하는 L-system이라는 환경을 교육적 고려를 통해 수정하여 수학교육 환경으로 설계하였다. 이 환경은 새로운 별도의 환경이 아니라 기존의 Logo 기반의 마이크로월드에 포함되어 기존 환경과 호환하는 환경이다. 이제 보다 적극적인 기존의 Logo나 DGS등의 다른 환경과의 통합을 생각해 보자.

하나의 방법으로 점이라는 기능의 추가를 생각할 수 있다. <그림 9>는 분기 명령 중에서 왼쪽 분기가 일어나는 부분에 점을 찍게 한 패턴이다. 이러한 점이라는 새로운 대상을 도입한 패턴 만들기를 보다 풍요롭게 하며 새로운 탐구 문제를 제시한다.

만약 동적으로 DGS와 상호호환 환경을 생각한다면 위의 나무 그림에서 초기값에 해당하는 처음 그림을 DGS의 점과 선분으로 만들고 그 점을 마우스 끌기로 움직일 때 마다 단위 길이가 변하여 전체적 나무의 크기가 변하는 환경을 생각할 수 있다. 이러한 실험을 통해 단위 길이의 변화는 패턴의 모양에는 영향을 주지 않는다는 점을 확인할 수 있다. 또한 초기값이 변함에 따른

길이 등의 변화를 시각적, 조작적으로 확인할 수 있는 환경이 될 수 있다.



<그림 9> L-system 점 추가

더 나아가 새로운 대상과 관련 지어 기존 환경과의 호환성을 고려할 수 있다. Cho et al.(2004a)과 Cho et al.(2004b)은 Logo와 DGS를 통합하는 자바말(JavaMAL) 마이크로월드를 설계하고 여기에서 Logo와 DGS를 연결하는 중간 다리 역할을 위해 준동적(semi-dynamic) 대상인 타일(tile)의 설계와 도입에 대하여 논하고 있다. 마찬가지로 전개도(folding net)를 도입하여 Logo와 DGS의 통합 환경을 생각할 수 있다. 이때, 통합 환경이라는 의미는 새로운 대상인 타일이나 전개도를 Logo와 DGS의 명령으로 각각 독립적으로 만들 수 있으며, 또한 만들어진 대상을 Logo와 DGS의 명령으로 조작할 수 있다는 의미인 것이다.

마찬가지로 타일이나 전개도 역시 L-system의 행동 문자로 만들고, 또한 만들어진 타일이나 전개도는 L-system의 f, < 등의 명령으로 움직이도록 환경을 생각할 수 있다. 이렇게 설계된 환경은 타일이나 전개도에 보다 다양한 동적인 움직임을 부여할 수 있을 것이며, 다양한 타일 모양을 가능하게 할 수 있을 것이다. 이러한 노력으로 새로운 L-system을 기존의 환경과 통합하는 동시에 기존의 환경은 L-system을 통해 풍부해 질 수 있을 것이다.

(2) 수학교육적 의의

앞서 우리는 거북 대수와 행동 문자를 다루고 조작할 수 있는 마이크로월드 설계에 대하여 알아보았다. 이러한 환경이 가지는 수학교육적 의의를 생각해 보자.

Leron et al.(1992)은 거북군 개념은 Logo 환경을 수학교육적으로 이용하려는 교사나 교재 개발자에게 유용하다고 말하고 있다. 즉 배경 지식으로 그 의미를 강조한 것이다. 마찬가지로 L-system과 관련한 패턴 학습에서도 앞서 살펴본 대수적 구조는 그 배경 지식으로 교사나 교재 개발자에게 의미를 가진다. 또한 Leron et al.(1992)은 거북군이 추상대수의 군이라는 개념을 설명하기 위한 예가 될 수 있음을 지적하고 있듯이, L-거북군은 부분군의 개념을 이해하는 새로운 예가 될 수 있다.

다음으로 행동 문자를 통해 문자에 시각적으로 풍부한 의미를 부여할 수 있다. 즉, 문자를 사용하여 행동을 만들고 문자 조작을 통해 기하적 패턴을 생성하는 경험을 통해 문자가 가지는 의미를 풍부하게 할 수 있다. 이러한 경험은 나아가 대수적 개념을 설명하기 위한 다른 예를 제공을 기대할 수 있을 것이다. 실제 의미 있는 문자와 그 조작은 학교 대수 교육의 주요한 문제이다. 이는 마치 Logo 환경이 유클리드 기하나 좌표 기하와는 다른 평면도형의 새로운 표현인 것과, 마찬가지로 행동을 표현하는 새로운 방식이다. Abelson et al.(1980)은 새로운 표현이나 새로운 의미의 중요성을 다음과 같이 강조하고 있다.

... 같은 것에 대한 두 개의 다른 표현을 가질 때마다 우리는 이 두 표현을 비교하면서 또는 하나를 다른 하나로 번역하면서 많은 것을 배우게 된다. 우리는 두 표현 사이를 오가며 하나의 표현으로는 얻어질 수 없는 통찰을 얻을 수 있을 것이다(Abelson et al., 1980, p.185).

보다 구체적으로 초등학교 수학 익힘책 3-가, 4-가의 '가자 10', '가자 20', '가자 30' 과 같은 거북 명령어는 문자 'f'로 나타낼 수 있다. 또한 '가자 10; 돌자 90; 가자 10; 돌자 90; 가자 10; 돌자 90; 가자 10; 돌자 90'의 정사각형은 일반적으로 문자 'f<f<f<f<f'의 특수한 형태로 볼 수 있다. 이는 학교수학에서 수의 일반화로 문자를 도입하는 것과 마찬가지로 거북 행동의 일반화로 문자를 사용하는 것이다. 즉 거북 마이크로월드와 학교수학은 구체적 행동이나 수를 일반화하여 문자를 도입하고, 이 문자를 조작하는 일련의 대수 절차를 진행한다는 측면에서 유사하다. 나아가 거북 마이크로월드에서는 문자와 문자 조작에 시각적 의미를 부여한다는 측면에서는 학교

수학에 보완적 역할을 기대할 수 있다.

보다 구체적으로 문자 조작을 통한 재귀적 패턴은 학교수학의 수열과 그 점화식이라는 내용과 연결된다. 수열의 점화식에 시각적 의미를 부여할 수 있으며, 재귀적 패턴으로부터 수열을 만들 수도 있다. 예를 들어 <그림 9>의 단계별 점의 개수 수열을 생각해 보자. 만약 n 단계에서의 가지의 수, 즉 문자 f의 개수를 수열 $\{a_n\}$ 이라고 하고, n 단계에서의 점의 개수를 수열 $\{b_n\}$ 이라고 한다면 <표 6>과 같은 수열을 얻을 수 있다.

<표 6> L-system과 수열

n	1	2	3	4	...
a_n	1	5	25	125	...
b_n	0	1	6	31	...

이 두 수열은 다음과 같은 점화식으로 연결된다.

$$a_{n+1} = 5a_n, \quad a_1 = 1$$

$$b_{n+1} = b_n + a_n, \quad b_1 = 0$$

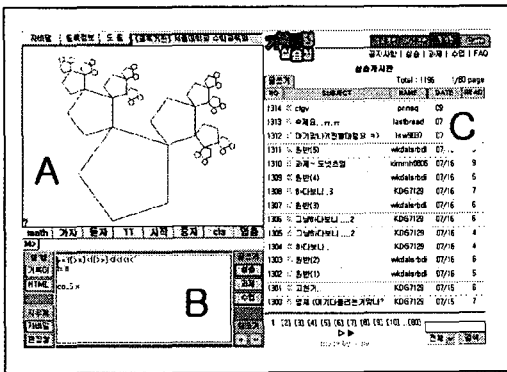
이는 컴퓨터 마이크로월드에서 만든 재귀적 패턴의 특징을 수열을 통해 해석하려는 시도이다. 마찬가지로 주어진 수열의 점화식으로 재귀적 관계를 부여하고 이를 통한 패턴의 생성도 생각해 볼 수 있다. 즉 <표 6>의 수열과 <그림 9>의 그림열은 동일한 재귀적 관계에 대한 서로 다른 표현이다.

6. 맺으며

이 글에서 우리는 행동과 문자를 연결시켜 문자에 의미를 부여하고, 문자 조작에 패턴의 생성이라는 의미를 부여할 수 있는 컴퓨터 환경의 설계를 논의하였다. 먼저 문자에 의미를 부여하려는 기존의 노력들을 살펴보고, 문자와 행동을 연결하는 Logo 환경과 그 대수적 구조를 살펴보았다. 나아가 문자 조작을 행동의 패턴과 연결하는 L-system에 대하여 살펴보았다. 이후 구성주의적 관점과 기존 환경에 대한 수학교육적 고려를 통해 컴퓨터

환경 설계하여 제시하였다. 마지막으로 새로이 설계된 환경과 기존의 마이크로월드의 통합을 고려하였고, 이 환경이 가지는 수학교육적 의의를 생각해 보았다.

실제 구현된 환경은 <그림 10>과 같이 인터넷으로 접속기할 수 있다. <그림 10>에서 A 부분은 마이크로월드이고, B 부분은 수학적 표현으로 컴퓨터에게 명령할 수 있는 공간이며, C 부분은 협동 학습과 온라인 의사소통을 위한 인터넷 게시판이다. 여기서 마이크로월드(A)와 게시판(C)은 서로 분리되어 있는 것이 아니라, 명령 저장과 의사소통을 통하여 유기적으로 연결되어 있다. 이를 통하여 학습자는 컴퓨터와 상호작용이 가능하며, 나아가 학습자들끼리 온라인으로 의사소통할 수 있도록 설계되어 있다.



<그림 10> 인터넷 기반 환경

이 글은 기하적인 거북 환경을 대수적인 입장에서 바라보려고 시도하였다. 특히 거북군과 그 부분군인 L-거북군을 생각하고, 나아가 L-거북군 위에서의 대응으로서 문자 되쓰기, 패턴을 바라보고 있다.

이후 여기서 실제·구현된 컴퓨터 환경을 학습자의 입장에서 바라보는 연구가 필요하다. 앞선 수학적 고려와 교육적 고려에 병행하여 교육과정 및 수업 설계를 시도하여야 할 것이며, 교육과정과 연계시킬 수 있는 교재의 개발과 수업 모형이 설계되어야 한다. 이 때, 기존의 대수 교육과정에 포함되는 것보다는 별도 과정으로 구성되는 것이 바람직할 것이다. 학교대수에無理하게 포함되기 보다는 시각적 패턴 생성경험을 학교대수에서 문자

도입 이전의 도입 단계에 활용하여 문자에 풍부한 의미를 부여하는 기회나 분수를 표현을 사용하는 기회로 활용하거나, 심화학습이 강조되는 초·중학교 창의성 교육이나 영재 교육을 위한 별도의 교육과정을 위한 교재로 개발되어 적용하는 것이 바람직할 것이다. 나아가 이러한 환경에서 패턴 생성 경험을 고등학교에서 수업과 점화식과 연결할 수 있는 방법도 연구되어야 할 것이다. 이 때, 설계된 환경이 가지는 수학적 구조는 중요 참고 요소가 되어야 한다. 나아가 이러한 교재 개발과 수업 모형 설계 과정에서의 경험이 다시 컴퓨터 환경 설계에 반영되어야 한다. 이렇게 될 때에만 컴퓨터 환경은 보다 바람직한 모습을 갖게 될 것이다.

참 고 문 헌

교육인적자원부 (2002a). 수학 3-가 익힘책. 대한교과서 주식회사.
 교육인적자원부 (2002b). 수학 4-가 익힘책. 대한교과서 주식회사.
 김상미·신인선 (1997). 초등수학에서의 수학적 패턴지도, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 1(1), pp.3-22, 서울: 한국수학교육학회.
 김성준 (2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰 -패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로, 대한수학교육학회지 <수학교육학연구> 12(3), pp.353-369, 서울: 대한수학교육학회.
 조한혁 (2003). 컴퓨터와 수학교육, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 42(2), pp.177-191, 서울: 한국수학교육학회.
 Abelson, H. & diSessa, A. (1980). *Turtle geometry*, Cambridge, MA: MIT Press.
 Brizuela, B.; Carraher, D. & Schliemann, A. (2000). Mathematical notation to support and further reasoning, *Symposium paper, 2000 NCTM Research Pre-session Meeting*, pp.18.
 Cho, H.; Han, H.; Jin, M.; Kim, H. & Song, M. (2004a). Designing a microworld: activities and programs for gifted students and enhancing mathematical creativity, *Proceedings of ICME TSG 4*, pp.110-120.

7) <http://javamath.snu.ac.kr>

- Cho, H.; Kim, S.; Han, H.; Jin, M.; Kim, H. & Song, M. (2004b). Designing a microworld for mathematical creativity and gifted education, *The SNU Journal of Education Research* 13, pp.133-147.
- diSessa, A. (2000). *Changing minds*, Cambridge, MA: MIT Press.
- DuBois, R. L. (2003). *Applications of generative string-substitution systems in computer music*, Thesis of doctor of philosophy at Columbia University.
- Edwards, L. D. (1995). Microworlds as representation. In diSessa, A., Hoyles, C., Noss, R. & Edwards, L.(Eds.), *Computers and exploratory learning*, Berlin: Springer.
- Eisenberg, M. (1995). Creating software application for children: some thoughts about design, In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards(Eds.) *Computers and exploratory learning*, Berlin: Springer.
- Goldenberg, E.P. & Cuoco, A.A. (1998). What is dynamic geometry? In R. Lehrer & D. Chazan(Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Kafai, Y. & Resnick, M. (1996). *Constructionism in practice*, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2001). Grounding the notion of function and graph in DGS, *Cabri World 2001* - Montreal.
- Leron, U. & Zazkis, R. (1992). Of geometry, turtles and groups, In Hoyles C. & Noss R.(Eds), *Learning mathematics and Logo*, MIT Press.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*, San Francisco: W. H. Freeman.
- Murdock, J.; Kamischke, E. & Kamischke, E. (2002). *Discovering algebra: An Investigative Approach*, CA: Key Curriculum Press.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*, Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*, London and New York: Routledge.
- Prusinkiewicz, P. & Lindenmayer, A. (1990). *The algorithmic beauty of plants*, New York: Springer-Verlag.
- Resnick, M. (1994). *Turtles, termites, and traffic jams: explorations in massively parallel microworlds*, Cambridge: MIT Press.
- Roodhardt, A.; Kindt, M.; Burrill, G. & Spence, M. (1997). Patterns and symbols, In National Center for Research in Mathematical Sciences Education & Freudenthal Institute(Eds.), *Mathematics in context*. Chicago: Encyclopaedia Britannica.
- Serra, M. (1997). *Discovering geometry: an inductive approach*, Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Steen, L. A. (1988). The science of patterns, *Science* 240, pp.611-616.
- Sutherland, R. (1995). Mediating mathematical action, In Sutherland, R. & Mason, J.(Eds.), *Exploiting Mental imagery with computers in mathematics education*, Berlin: Springer.
- Tannenbaum, P. (2003). *Excursions in modern mathematics*, New Jersey: Pearson Education.
- Wagon, S. (1991). *Mathematica in action*, New York: W. H. Freeman.
- Watson, A.; Spirou, P. & Tall, D. (2003). The relationship between physical embodiment and mathematical symbolism: The concept of vector, *The mediterranean journal of mathematics education* 12, pp.73-97.
- Yerushalmy, M. & Chazan, D. (2002). Flux in school algebra: Curricular change, graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge, In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, pp.725-755.

Designing a Microworld for Recursive Patterns and Algebra

Kim, Hwa Kyung

Dept. of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea

E-mail : indices2@snu.ac.kr

In this paper, we consider changes of algebra strands around the world. And we suggest needs of designing new computer environment where we make and manipulate geometric recursive patterns.

For this purpose, we first consider relations among symbols, meanings and patterns. And we also consider Logo environment and characterize algebraic features. Then we introduce L-system which is considered as action letters and subgroup of turtle group. There are needs to be improved since there exists some ambiguity between sign and action. Based on needs of improving the previous L-system, we suggest new commands in JavaMAL microworld. So we design a microworld for recursive patterns and consider meanings of letters in new environments. Finally, we consider the method to integrate L-system and other existing microworlds, such as Logo and DGS. Specially, combining Logo and DGS, we consider the movement of such tiles and folding nets by L-system commands. And we discuss possible benefits in this environment.

* ZDM classification : U73

* MSC2000 classification : 97C80

* key word : microworld, recursive pattern, symbol and meaning, computers and mathematics education, JavaMAL, L-system