한국수학사학회지 제19권 제2호(2006년 5월), 1-24

朝鮮 算學의 堆垜術*

서강대학교 수학과 **홍성사**
sshong@sogang.ac.kr

後山 李昌九 박사님의 70회 생신을 축하드리며 헌정합니다.

조선 산학의 堆垜術의 역사를 연구한다. 李尙爀(1810~?)의 翼算(1868)이 출판되기 전의 역사와 翼算의 결과로 나누어 연구한다. 慶善徵(1616~?)의 默思集算法부터 南秉吉(1820~1869)의 算學正義(1867)까지의 산서를 통하여 翼算 이전의 堆垜術은 큰 발전을 이루지 못한 것을 조사한다. 李尙爀은 朝鮮 算學에서 가장 독창적인 방법을 써서 새로운 결과를 얻어낸다. 그는 퇴타술을 구조적으로 해결하고, 또 새로운 문제인 截積과 이를 위한 分積法을 도입하여 이의 구조도 완전히 밝혀내었다.

주제어 : 堆垜術, 慶善徵, 默思集算法, 崔錫鼎(1646~1715), 九數略, 洪正夏(1684~?), 九一集, 趙泰耉(1660~1723), 籌書管見, 黃胤錫(1719~1791), 算學入門, 裵相說(1759~?), 書計瑣錄(1786), 南秉吉, 算學正義, 李尙爀(1810~?), 翼算(1868), 截積, 分積法

0. 서론

중국에서 급수의 개념, 즉 堆垜術(dui duo shu)은 이미 **九章算術**(Jiu zhang suan shu)부터 시작되었다. 그 후 계차수열을 이용한 수열은 7세기부터 시작하여 역법에 응용되었다. 한편 北宋 沈括(Shen Gua, 1031~1095)의 **夢溪筆談**(Meng xi bi tan, 1095 [2]), 南宋 楊輝(Yang Hui)의 **詳解九章算法**(Xiang jie jiu zhang suan fa, 1261), **楊輝算法**(Yang Hui suan fa, 1274~1275)과 元 朱世傑(Zhu Shi Jie)의 **算學啓蒙**(Suan xue qi meng, 1299), **四元玉鑑**(Si yuan yu jian, 1303), 元 安止齋(An Zhi Zhai)의 **詳明算法**(Xiang ming suan fa, 1373) 등에서 급수가 취급되었는데 이들은 단순한 등차급수, 등비급수를 뛰어 넘는 것으로 거의 모든 산서에서 이들이 취급되었다. 중국의 산학은 **九章算術**이 기본이 되고 그 전통은 계속 이어졌지만 위에서 언급한 급수의 문제는 **九章算術**에서 취급되지 않은 내용이다. 그러나 이 문제도 초기에는 **九章算術**에서 취급한 넓이, 부피와 비교하여 그 합을 구하는 문제로 도입되었다. 또 **九章算術**에

* 이 연구는 2005년도 서강대학교 교내 연구비 지원에 의하여 이루어졌음

서 방정식은 제곱근, 세제곱근의 문제만 다루고 이차방정식은 한 문제만 취급되었다. 그러나 송, 원대에 天元術(tian yuan shu)과 增乘開方法(zeng cheng kai fang fa)이 도입하여 일반 다항방정식을 연구하였다. 실생활의 문제를 취급하는 동양 수학에서 3차 이하의 다항방정식은 넓이, 부피를 통하여 문제가 구성되었다. 4차 이상의 다항방정식을 취급하기 위하여 삼승방, 사승방 등을 도입하였지만 사차원 이상의 도형으로 이들을 받아들이는데 문제가 많았을 것이다. 그러나 실생활과 직결되는 급수의 합으로 다항식이 얻어지므로 모든 수학자들은 이를 취급하였다.

이 전통은 조선에도 그대로 들어와 조선에서 출판된 모든 산서에서 堆垛術은 중요한 연구의 대상이 되었다. 특히 위에서 언급한 **楊輝算法**, **算學啓蒙**, **詳明算法**은 조선 산학에서 기본이 되어 이들에서 취급된 堆垛術의 문제는 모두 조선에서 연구되었다.

이 논문의 목적은 朝鮮 算學의 堆垛術의 역사를 연구하는 것이다.

첫째 절에서는 우리의 연구를 위하여 먼저 中國 算學의 堆垛術에 대한 역사를 간단히 정리하고 또 필요한 용어를 정의한다.

朱世傑의 **四元玉鑑**에서 연구된 堆垛術로 중국의 堆垛術의 역사는 큰 전기를 맞게 된다. 그 이전의 **九章算術**의 확장으로 도입된 퇴타술에서 완전히 탈피하여 대수적으로 정리된다. Pascal 삼각형으로 알려진 古法七乘方圖를 통하여 구조적으로 堆垛術을 정리하고 이를 다항방정식의 문제로 활용한다. 불행하게도 朱世傑은 명대에 잊혀졌는데, 1822년 羅士琳(Luo Shi Lin, 1774~1853)에 의하여 **四元玉鑑**이 재발견되고, 또 그가 **四元玉鑑細草**(Si yuan yu jian xi cao, 1835)를 출판할 때까지 朱世傑의 업적은 완전히 잊혀졌다. 조선에서는 전술한대로 朱世傑의 **算學啓蒙**은 계속 연구되어 天元術과 增乘開方法을 이용한 다항방정식의 연구가 이어져왔다. **四元玉鑑細草**가 조선에 들어왔을 때 조선의 수학계에서는 큰 어려움 없이 이를 받아들일 수 있었다. 특히, 李尙爀(1810~?)과 南秉吉(1820~1869)에 의하여 **四元玉鑑細草**는 다른 송, 원대의 수학과 함께 연구되었다.

둘째 절에서는 **四元玉鑑細草**의 영향을 받은 19세기 중엽 이전에 조선에서 연구된 堆垛術의 역사를 논한다. 위에서 언급한 **楊輝算法**, **算學啓蒙**, **詳明算法**을 잘 계승한 慶善徵(1616 ~?)의 **默思集算法**, 洪正夏(1684~?)의 **九一集**, 黃胤錫(1719-1791)의 **算學入門** 계열과 17세기에 들어온 서양 수학의 **同文算指**(Tong wen suan zhi, 1613)를 연구한 崔錫鼎(1646~1715)의 **九數略**, 趙泰耉(1660~1723)의 **籌書管見**(1718), 裵相設(1759~?)의 **書計瑣錄** 계열로 나누어 이들이 다룬 堆垛術의 역사를 다룬다. 물론 후자들에도 앞의 중국 산서의 영향이 포함되어 있지만 전자와는 구별된다.

마지막 절에서는 **四元玉鑑細草**를 연구한 李尙爀의 **翼算**(1868)을 조사한다. **四元玉鑑**의 주된 목적은 연립 다항방정식이었으므로 **四元玉鑑**의 퇴타술은 용어조차 통일되지 않았고 따라서 체계적이지 못하였다. 李尙爀은 **四元玉鑑**에 들어 있는 결과를 완전히

구조적으로 정리하고 이를 확장하여 새로운 급수를 다루었다. 또 계차수열을 정리하여 이들을 이용한 급수를 연구하였다. 끝으로 截積을 취급하는데 이는 완전히 독창적인 연구결과로 조선의 산학에서 가장 뛰어난 수학적 연구결과이다. 중국의 산학에 전혀 나타나지 않고 또 그가 도입한 分積法을 통하여 절적의 구조를 완전히 정리하였다.

사료는 가능한대로 1차 사료를 사용하고 조선 산학은 **韓國科學技術史資料大系 數學編**([11]), 중국 산학은 **中國科學技術典籍通彙**(Zhong guo ke xue ji shu dian ji tong hui) **數學卷**(Shu xue juan, [9])과 **中國歷代算學集成**(Zhong guo li dai suan xue ji cheng, [10])을 참고한다. 조선과 중국의 산서에 참고문헌의 번호가 없는 경우 모두 이들에 들어 있는 것을 뜻한다. 2차 사료로 [3], [4], [6], [7], [8], [18], [19]를 이용한다.

1. 中國의 堆垛術

유한급수는 일찍부터 중국 산학의 중요한 연구 대상이었다. 등차급수의 합의 문제는 이미 **九章算術**([1])의 제6권 均輸의 제17-19문 및 **張丘建算經**(Zhang Qiu Jian suan jing) 上卷의 제22문과 제23문으로 취급되는데, 주로 등차급수의 초항과 말항으로 그 합을 구하고, 또 합으로 공차를 구한다. 또 등비급수의 합에 대한 문제도 **九章算術**의 제3권 衰分의 제4문에 들어 있다. 이 문제는 구장산술이 출판되기 전에 제작된 **算數書**(Suan shu shu)에도 이미 나타나있다([17]).

먼저 우리의 논의의 편의를 위하여 다음 용어를 정의하기로 하자. 오랜 기간 동안 여러 학자들에 의하여 도입된 퇴타술의 용어는 여러 종류가 있을 수밖에 없기 때문에 이 논문에서 이들 중에 기본이 되는 것을 편의상 통일하고 이를 사용하기로 한다. 앞으로 m, n, k 등은 모두 자연수를 나타내기로 하고, $S_n^{-1}=1$로 정의한다. 귀납적으로 다음을 정의하자.

$$S_n^{r+1}=\sum_{k=1}^{n} S_k^r \quad (r \geq -1).$$

따라서 $S_n^0=n$, $S_n^1=\sum_{k=1}^{n} k$, $S_n^2=\sum_{k=1}^{n} S_k^1=\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2}$, … 등이다.

이 때, S_n^1, S_n^2, S_n^3, S_n^4, S_n^5을 각각 *茭草垛, 三角垛, 撒星形垛, 撒星更落一垛, 三角撒星更落一形 垛*라 하고, 이들을 모두 *三角垛 계열*이라 한다.

또 같은 방법으로 $T_n^0=n^2$으로 정의하고, 다음을 정의한다.

$$T_n^{r+1} = \sum_{k=1}^{n} T_n^r \quad (r \geq 0).$$

따라서, $T_n^1 = \sum_{k=1}^{n} k^2$, $T_n^2 = \sum_{k=1}^{n} T_k^1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ 등이다.

이 때 T_n^1, T_n^2, T_n^3 을 각각 *四角垛*, *四角落一積*, *四角撒星積*이라 하고 이들을 함께 *四角垛 계열*이라 한다.

楊輝는 그의 **詳解九章算法**의 商功 부분에서 **九章算術** 商功절에서 취급한 입체의 부피를 다루었다. 이 부분에서 比類라는 항목을 넣어 方垛 $\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)^2$, 菓子一垛(= 四角垛와 $\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)(b+k-1)$)와 三角垛를 도입하였다. **楊輝算法**에 들어 있는 **乘除通變算寶**(Cheng chu tong bian suan bao, 1274)의 상권인 算法通變本末에 다시 三角垛와 四隅垛(= 四角垛)를 취급하고, **田畝比類乘除捷法**(Tian mu bi lei cheng chu jie fa, 1275) 상권에서 *方箭*($=1+8S_n^1$), *圓箭*($=1+6S_n^1$), *圭垛*(=교초타), *梯垛* (=교초타의 부분합)를 도입하는데 이들을 平垛로, **詳解九章算法**에서 취급한 급수를 堆垛로 분류하고 있다. 楊輝는 이들 급수를 모두 기하적으로 생각하고 있다. 즉 三角垛, 四角垛와 이들의 일반화인 方垛, 菓子一垛는 모두 삼각뿔, 사각뿔 형태의 부피 문제와 연결시키고, 方箭, 圓箭, 圭垛, 梯垛는 모두 정사각형, 원 (원주율 $\pi = 3$), 정삼각형, 사다리꼴 모양의 넓이와 연결시켜 그 합을 구하고 있다. 후자는 평면 도형 형태이므로 平垛로, 전자는 입체 도형이므로 堆垛로 구별하였다.

楊輝의 과자일타의 일반형인 $\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)(b+k-1)$을 최초로 계산한 학자는 沈括이다. 이 급수를 앞으로 *沈括의 級數*라 하자. 그는 58세에 모든 관직을 그만 두고 夢溪筆談 26권, 補筆談 3권, 續筆談 1권을 저술하였는데 **夢溪筆談** 제18권 技藝에 다음과 같이 *隙積術*(Xi ji shu)을 도입하여 위의 급수의 합을 구하였다.

算數求積尺之法 如芻萌 芻童 方池 冥谷 塹堵 鼈臑 圓錐 陽馬之類
物形備矣 獨未有*隙積一術* 古法凡算方積之物 有立方謂六幕皆方者
其法再自乘得之 有塹堵謂如土墻者 兩邊殺兩頭齊
其法併上下廣折半以爲之廣 以直高乘之 又以直高爲句
以上廣減下廣餘者爲股 句股乘弦以爲斜高
有芻童謂如覆斗者 四面皆殺 其法倍上長加入下長 以上廣乘之
倍下長加入上長 以下廣乘之 併二位 法以高乘之六而一
隙積者 謂積之有隙者 如累棊 *層壇及酒家積罌之類* 雖似覆斗 四面皆殺

緣有刻缺及虛隙之處 用芻童法求之 常失於數少 予思而得之 用芻童法爲 上行下行別列 下廣以上廣減之 餘者以高乘之 六而一 併入上行

즉 **九章算術** 제5권 商功에서 취급된 여러 종류의 입체, 즉 芻甍(= 芻薨), 芻童, 方池, 冥谷, 塹堵, 鱉臑, 圓錐, 陽馬([1]) 등의 부피에 대하여 언급한 후 隙積術을 설명하고 있다. 추동은 밑면과 윗면이 직사각형으로 이루어진 사각뿔대로 추동법은 윗면과 밑면의 양변이 각각 a, b, c, d이고 높이가 h일 때 그 부피가

$$\frac{h}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]$$

임을 뜻한다. 추동법과 沈括의 급수를 연결시켜 그는

$$\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)(b+k-1)=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)$$

를 얻어내었다. 오른쪽 변의 첫째 항은 추동법에서 얻어지는 부피이고, 이에 $\frac{n}{6}(c-a)$를 더하여 그 합을 구하고 있다. **詳解九章算法**에 沈括을 언급하지 않고 芻童의 比類로 楊輝는 이를 인용하였다.

한편 朱世傑은 그의 **算學啓蒙**의 하권 퇴적환원문堆積還源門에서 茭草(= 교초타), 圓箭, 方箭, 三角垜, 四角垜를 취급하는데 먼저 합의 문제를 취급한다. 또, 합을 알고 항의 수를 구하는 방정식을 취급한다. 그는 하권의 마지막 절인 開放釋鎖門에서 천원술을 도입하여 방정식을 다루는데 堆積還源門에서 다루는 방정식은 천원술을 사용하지 않고 있다. 그러나 楊輝와 달리 朱世傑은 茭草를 먼저 취급하고 이의 변형으로 圓箭, 方箭을 취급하여 그가 堆垜術을 제대로 이해하고 있음을 알 수 있다.

전술한대로 중국의 산학에서 堆垜術을 가장 완벽하게 연구한 책은 **四元玉鑑**이다. **四元玉鑑** 중권 如意混合의 제2문에서 三角垜, 四角垜, 方箭, 圓箭, 茭草垜를 다루고, 이어서, 茭草形段에서 落一形, 撒星形, 嵐峰形, 撒星更落一形, 嵐峰更落一形이 도입되었다. 중권 箭積交參에서 다시 圓箭, 方箭을 다루고, 앞에서 다룬 급수의 응용문제를 如像招數에서 취급하였다. 下卷의 果垜疊藏에서 四角落一形, 三角嵐峰形, 四角嵐峰形, 三角撒星更落一形, 奇層圓錐垜, 四角臺垜, 芻童垜, 圓錐垜를 사용하여 고차방정식을 구성하였다. 기본이 되는 급수와 이에 따라 여러 종류의 급수가 정의되는데 이들은 제 3절에서 논한다. 그러나 下卷에 와서 그의 용어가 정립되었으나, 中卷과 같지 않은 것을 볼 수 있다. 朱世傑은 이들 급수의 합을 구하는 것은 이미 알고 있고, 그 합이 주어질 때 그 항수나 말항을 구하는 문제를 그의 四元術을 이용하여 다루고 있다. 특히 그의 古法七乘方圖(= Pascal 삼각형)의 빗금 줄에서 三角垜 계열 S_n^r ($r=-1,0,1,2,3,4,5$)의 항이 차례로 나타나고 또 그 합이 바로 아래 줄에 나타남을 알고 있었다. 그의 "落一形"이

라는 단어가 바로 이 사실을 나타낸 것이다. 따라서 朱世傑은 최초로 三角垜 계열의 구조를 완벽하게 정리한 학자이다. 현재 우리가 조합의 성질을 이용하여 이를 쉽게 증명할 수 있지만 다만 그는 귀납적으로 그 구조를 찾아내었다.

전술한 결과에 더하여 **四元玉鑑**에서 朱世傑은 堆垜術에 대한 큰 업적을 완성하였는데, 이는 계차수열을 이용한 급수의 합에 대한 이론이다. 계차수열을 이용한 보간법은 모두 천문학에 이용되었는데, 隋대의 劉焯(Liu Zhuo, 544~610)이 편집한 **皇極曆**(Huang ji li, 600)에 이미 사용하였고, 一行(Yi Xing)이 편집한 **大衍曆**(Da yan li, 727), 또 徐昻(Xu Ang)이 편집한 **宣明曆**(Xuan ming li, 822), 王恂(Wang Xun, 1235~1281), 郭守敬(Guo Shou Jing, 1231~1316) 등이 편집한 **授時曆**(Shou shi li, 1280)에서 이들이 자세하게 취급되었다. 朱世傑의 결과를 정리하면 다음과 같다.

수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$에 대하여 제$(r-1)$계차수열이 등차수열을 이루는 수열의 각 계차수열의 초항을 각각 $\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_r$로 나타내면 다음이 성립한다.

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{r} S_{n-k}^{k-1} \varDelta_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = na_1 + \sum_{k=2}^{r+1} S_{n-k+1}^{k-1} \varDelta_{k-1}.$$

일반으로, $f(x)$가 m차 다항식이면 이항정리에 의하여 수열 $f(1), f(2), \cdots, f(n)$의 제 $(m-1)$계차수열은 등차수열이 된다. 따라서 모두 위의 방법을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있다. 沈括의 급수는 2차다항식 $f(x)=(a+x-1)(b+x-1)$에서 얻어지는 급수이다. 또 **授時曆**에서는 3차다항식을 이용하는데, $\varDelta_1, \varDelta_2, \varDelta_3$를 각각 定差, 立差, 平差라 하였다.

四元玉鑑 이후에 여러 산학자들이 급수의 문제를 다루었다. 예를 들어 丁巨(Ding Ju)의 **丁巨算法**(Ding Ju suan fa, 1355)에는 다음과 같이 급수의 합에 대한 구결이 들어 있다.

草垜添尖以元乘今折半積 眞三角添一又添二乘六而一
精四角添一又添半乘三而一
盈四角長垜長闊相減餘數折半添半長攬以闊乘旣添一乘次如三一
是圓箭添六以乘實數十二除之入心一箇
方箭副置各添以四自乘見數十六一

그는 草垜(= 茭草垜), 三角, 四角, 四角長垜(= **詳明算法**의 缶瓶一垜), 圓箭, 方箭에 대한 합을 나타내고 있다. 세종 때부터 **算學啓蒙**, **楊輝算法**과 함께 조선의 산학에 중요한 영향을 준 安止齋의 **詳明算法** 下卷의 堆垜절도 다음 구결로 시작한다.

缶瓶堆垜要推詳 脚底先將闊減長 餘數折來尖半箇 併歸長內闊乘相
再將闊搭一乘實 三以除之數便當

若算平尖只添一 乘來折半法如常
三角果垜也須知 脚底先求幾箇兒 一二添來乘兩遍 六而取一不差池
要知四角盤中果 添半仍添一箇隨 乘此數來以爲實 始三而一去除之

詳明算法에서 缶瓶一垜는 바로 다음 문제에서는 酒瓶一垜라 하였다. 이는 沈括의 급수에서 윗면의 직사각형 모양의 한 변이 1인 것을 뜻한다. 따라서 밑면의 짧은 변 闊($=c$), 긴 변 長($=d$)이 주어지면, 윗면의 闊은 1, 長은 $d-c+1$이고 높이가 c인 沈括의 급수로 이 구결은 그 합이 $[(\frac{d-c}{2}+\frac{1}{2})+d]c(c+1)\times\frac{1}{3}$인 것을 뜻한다. 이 문제와 함께 平尖草(= 교초타), 삼각타, 사각타의 합을 구하는 문제를 각각 하나씩 들고 있다. 특히 缶瓶一垜는 조선의 모든 산서에서 취급되는데 이는 **算學啓蒙**과 **楊輝算法**에는 나타나지 않았다. 그러나 **詳明算法**의 三角垜와 四角垜는 **楊輝算法**의 계산법과 일치한다. 이 외에도 嚴恭(Yan Gong)의 **通源算法**(Tong yuan suan fa, 1372), 원대 후기 저자 미상의 **透簾細草**(Tou lian xi cao) 등에서 **詳明算法**과 같은 급수를 취급하고 이는 그대로 이어 진다. 이들과 **四元玉鑑**의 堆垜術을 비교하면 그 당시 산학자들이 **四元玉鑑**을 전혀 연구하지 않은 것을 알 수 있다. 실제로 淸 阮元(Ruan Yuan, 1764~1848)의 **疇人傳**(Chou ren chuan, 1799, [4])에는 朱世傑이 들어있지 않고 續疇人傳(1840)에 처음으로 朱世傑과 **算學啓蒙**의 서문을 쓴 趙城(Zhao Cheng)이 자세히 언급된다. 續疇人傳의 서문에 續編을 쓸 수밖에 없는 이유로 羅士琳이 **四元玉鑑**에서 **授時曆**의 계차수열과 퇴타술을 연결시킨 것을 다음과 같이 들고 있다.

羅氏(茗香 =士琳)又因讀**四元玉鑑** 於一門有所會通 更取明氏捷法 御以天元
知密率亦可招差 其弧與弧矢互求之法 與**授時曆草**之垜積招差 一一符合

朱世傑의 위대한 수학적 업적은 14세기 중엽부터 이미 잊혀졌다가, 19세기 초에 조선에서 출판된 **算學啓蒙**이 재수입되고, 羅士琳의 **四元玉鑑細草**가 출판되므로 중국에서 퇴타술에 대한 체계적인 연구가 재개되었다. 특히 李善蘭(Li Shan Lan, 1811~1882)이 그의 저서 **則古昔齋算學**(Ze gu xi zhai suan xue, 1867)의 **垜積比類**(Duo ji bi lei) 4권에서 **四元玉鑑**의 내용을 다시 정리하고 이를 확장하므로 중국의 퇴타술은 세계적으로 인정받게 된다. 그는 삼각타 계열의 급수는 얼마든지 일반화될 수 있다는 사실부터 시작하여, S_n^r $(r \geq -1)$을 차례로 元, 一乘垜, 二乘垜, 三乘垜, …, 十二乘垜까지 나타내고 그 합을 바로 아래 줄에서 찾을 수 있다는 朱世傑의 결과를 인용하는 것으로 시작한다.

2. 朝鮮 算學과 堆垛術

이 절에서는 **四元玉鑑**의 영향을 받기 이전에 연구된 조선의 堆垛術을 조사한다.

慶善徵은 **默思集算法** 堆垛開積門에서 堆垛術을 다루는데 그는 합을 구하는 문제, 즉 平尖草(= 茭草垛), 圓箭, 方箭, 三稜箅子($=6+12S_n^1$), 缶瓶一垛, 三角垛, 四角垛의 합을 구하는 문제만 다루었다. 平尖草라는 용어와 缶瓶一垛의 구하는 법을 보면 慶善徵은 **算學啓蒙**과 **楊輝算法**이나 **詳明算法**을 연구한 것으로 보인다. 그는 삼각타 S_n^2과 사각타 T_n^1을 **算學啓蒙**과 **楊輝算法**의 것을 차례로 나타낸

$$S_n^2=\frac{[(n+3)n+2]n}{6}=\frac{(n+1)(n+2)n}{6}$$

$$T_n^1=\frac{[(n+\frac{3}{2})n+\frac{1}{2}]n}{3}=\frac{(n+1)(n+\frac{1}{2})n}{3}$$

을 사용하여 구하였다. 대수적으로 정리하는 일이 어려운 동양의 산학에서는 이와 같이 여러 종류의 방법을 사용하고 있다. 三稜箅子는 정육각형을 정삼각형의 합으로 만들어 나가는데 정육각형의 각 변을 차례로 1, 3, 5, … 로 늘여 가는 것을 단면이 정삼각형 모양인 산대를 이용하여 만든 것으로 보아 三稜箅子로 부르고 있다. 이 급수도 조선 산학에서 자주 취급하고 있다. **算學啓蒙**의 합을 알고 항의 수를 구하는 문제는 **默思集算法** 開放解隱門에서 취급하였다. 그러나 缶瓶一垛의 문제는 다루지 않고, 방정식을 구성하는 방법은 **楊輝算法**의 방법을 사용하였다. 방정식을 정확하게 표시할 수 있는 天元術을 사용하지 않은 慶善徵이므로 그의 풀이과정은 비교적 복잡하고 增乘開方法을 정확하게 표현하지 못하고 있다.

慶善徵의 堆垛術과 같은 계열로 洪正夏의 **九一集**이 있다. 그는 堆垛術을 缶瓶堆垛門에서 취급하는데, 酒瓶一垛(= 缶瓶一垛), 平尖草, 三角垛, 四角垛, 方田, 圓田, 三稜物($=1+9S_n^1$), 圭垛, 梯垛의 순서로 다루고 있다. 洪正夏도 慶善徵과 같이 **詳明算法**의 영향으로 缶瓶一垛, 平尖草, 三角垛, 四角垛를 다루고, 이들의 변형인 나머지 급수를 다루고 있다. 그는 慶善徵과 달리 三角垛, 四角垛를 구하는 방법은 모두 **楊輝算法**의 방법만 사용하고 **算學啓蒙**의 것은 언급하지 않고 있다. 또, 그는 平尖草, 圭垛가 같은 것인데 이를 구별하여 다루고 있고, 또 梯垛를 다루었는데 이는 **楊輝算法**의 영향을 받은 것으로 보인다. 그는 **算學啓蒙**에서 취급된 堆垛術과 다항방정식의 문제와 같은 類題를 취급하였다. 합을 구하는 방법은 **楊輝算法**의 방법을 사용하고 있지만 방정식의 문제는 **算學啓蒙**의 방법을 사용하였다. 洪正夏는 朱世傑과 달리 이 경우 모두 천원술을 이용하여 정리하였다. 洪正夏의 수학에 대한 이해를 알 수 있는 대목이다.

같은 계열로 퇴타술을 취급한 책인 黃胤錫의 **算學入門**을 조사하자. 그는 堆積還源

절에서, 茭草, 倚墻尖堆, 倚墻平堆, 三稜箅子, 圭垛, 圓箭, 方箭, 三稜箭, 三角垛, 四角垛, 缶瓶堆垛를 다루었다. 그는 沈括의 隙積術을 조선에 처음 소개하였다. Matteo Ricci (利瑪竇, 1552~1610)와 淸 李之藻(Li Zhi Zao, 1565~1630)가 편역한 **同文算指**를 黃胤錫이 연구하였는데, 堆垛術도 그 영향을 받았다. 그는 그가 인용한 서적을 많이 附記하고 있는데 이 절에서 **詳明算法**, **指明算法**(Zhi ming suan fa), **楊輝算法**, **算學啓蒙**을 인용한 것을 기술하고 있다. 취급한 용어와 계산법 모두 이들에서 나온 것을 사용하고 있다. 다만 倚墻尖堆는 茭草垛, 倚墻平堆는 梯垛를 뜻하고, 또 三稜物과 함께 이들은 **同文算指** 通編 제5권 제9절 遞加法에서 인용하였다. 그는 **詳明算法**의 구결을 그대로 인용하여 사용하고, **詳明算法**은 **楊輝算法**을 인용한다고 하였다. 缶瓶堆垛를 다루면서 앞에서 인용한 沈括의 隙積術을 설명하면서 그 예로 "酒家積罌之類"를 들었다. **夢溪筆談**에서 隙積術을 설명한 다음에 예를 들어 놓은 積罌의 문제를 그대로 인용하고 있다. 다른 곳과 달리 그는 沈括의 **夢溪筆談**을 언급하지 않고, 또 隙積術을 積罌術이라 하였다. 그는 缶瓶一垛와 四角垛가 隙積術의 특별한 경우라고 말하였다. 전술한 楊輝의 **詳解九章算法**에 菓子一垛로 들어있는 隙積術에 대한 언급은 없다. 그는 이 책의 존재를 모르고 있는 것으로 보인다. 朝鮮 算學에서 **詳解九章算法**의 영향을 거의 찾아볼 수 없는데 아마도 이 책이 들어오지 않았을 가능성이 크다. 黃胤錫은 堆垛術과 方程式을 연결시키지는 않았다. 그러나 등차급수를 먼저 다루고 나서 三角垛, 四角垛, 缶瓶一垛를 취급한 것은 앞의 두 저자보다 堆垛術을 더 잘 이해하고 있는 것으로 보인다.

다음으로 서양 수학, 특히 李之藻의 **同文算指**의 영향을 가장 많이 받은 崔錫鼎(1645~1715)의 **九數略**의 堆垛術을 알아보자. 전술한대로 黃胤錫도 **同文算指**의 영향을 받았지만 직접 **同文算指**를 인용하지는 않았고, 또 等差級數를 완전히 이해한 것으로 볼 수 없고, 等比級數는 아예 다루지도 않았다. 따라서 우리는 **九數略**을 이 분야의 대표 저술로 보고 논의를 전개한다.

崔錫鼎은 **同文算指**를 완전히 이해하였다고 볼 수도 없고, 또 그의 四象理論으로 산학을 전개하여, 산학과 상수학을 섞어 놓음으로 양 쪽 모두 제대로 정리하지 못하고 있다. 그러나 서양 수학을 가장 일찍 산서로 소개한 것은 큰 의의가 있다([16]).

그의 퇴타술을 알아보자. 그는 朝鮮에서 처음으로 **同文算指**에 소개된 等差級數와 等比級數의 합을 제대로 옮긴다. 특히 등차급수의 경우 超母(= 公差)를 최초로 조선 산학에 도입하였다. **同文算指**는 等差數列을 도입하고 이를 이용하여 等差級數를 취급한다. 崔錫鼎은 等差數列의 개념은 도입하지 않았지만, 그 성질은 인용하였다. 예를 들어 등차수열에서 연속하는 세 항들 사이의 관계나 네 항들 사이의 관계를 논한 것을 인용하였다. 또 등차급수의 합을 구하는데 초항(=首位)과 말항(=末位)만 이용하여 계산할 수 있는 것을 현재 우리가 사용하고 있는 방법을 통하여 설명한 것을 인용하고 있다. 또 圓箭, 方箭, 三稜箭(=三稜物), 倚墻一面尖堆, 倚墻一面平堆 등을 모두 등차급수의 합으로 이해하여 계산한 **同文算指**와 **算學啓蒙**의 문제를 인용하였다. 조선

산서에서 최초로 이들을 별개의 堆垛로 보지 않고 체계적으로 그 합을 구한 산서가 **九數略**이다. 또 등차급수의 초항, 말항, 공차, 합 중의 일부를 알고 그 나머지를 구하는 법을 다룬 **同文算指**의 결과를 그대로 인용하고, 대응되는 문제도 인용하여 등차급수에서 수열에 대한 정보를 얻는 방법을 崔錫鼎은 소개한다. 圓箭, 方箭을 다루면서 그는 邵雍(Shao Yong, 1011~1077)을 언급하였는데 전술한 黃胤錫의 **算學入門**에도 이를 인용하였다. 그는 **同文算指**의 내용이 등차급수, 등비급수에 대한 것만 다루고 있어서, 전통적인 동양 수학의 堆垛術을 다루기 위하여 **算學啓蒙**의 내용을 인용하였다. 따라서 慶善徵을 제외한 나머지 조선 산서에서는 **楊輝算法**과 **詳明算法**의 방법을 사용하여 三角垛, 四角垛의 합을 구하는데 崔錫鼎은 **算學啓蒙**의 방법을 사용하여 이들을 계산하고 있다. 三角垛, 四角垛의 합을 논의한 후 다시 三稜箅子와 缶瓶一垛를 다루었다. 三稜箅子는 **同文算指**를 인용하는 데 함께 포함하지 않고 다시 전통적인 방식으로 다루고 있다. 마지막으로 等比數列과 等比級數를 다루었는데 이는 모두 **同文算指** 通編 제5권 제10절 倍加法을 인용한 것이다. 동양 수학에서 등비수열과 등비급수는 다른 급수에 비하여 덜 강조되는 분야인데 崔錫鼎은 이 부분을 강조하고 있다. 특히 그는 **同文算指**의 다음 문장을 인용하여 무한 과정(infinite process)에 대한 관심을 보였다.

> 凡挨(循으로 대치)次遞加者(其加數를 첨가)由少加多其多(2자 생략)至于無窮
> 蓋凡數(其減數로 대치)從多減少其減(2자 생략)至于單數而止無復零分之可減也(10자 생략)
> 惟此倍加之數則進而加之(至於 첨가)無窮(極으로 대치)
> 減(約으로 대치)而約(減으로 대치)之亦無窮(3자 생략) (至於無倪 첨가) 剖之又剖細微毫忽
> (加亦一無窮也減亦一無窮也斯豈非至隱至賾至深至遠者乎 此以倍一約之其數無窮첨가)
> 按法而約求焉豈可以數盡乎(12자 생략)

괄호 속은 崔錫鼎이 **九數略**에 변경한 字句이다. 위의 문장 다음에 **同文算指**의 예, 즉 공비가 $\frac{1}{2}$, 초항이 512인 등비수열을 인용하였는데 이 경우가 無倪로 또 公比가 1보다 큰 경우를 無極으로 구별하였다. **同文算指**에서 無窮으로 이를 구별하지 않았는데, 崔錫鼎은 이를 구별하고 있다. 무한 과정은 생각하였지만 극한을 취급한 것은 아니다. 왜냐하면 無倪는 끝이 없는 것으로 보아야 하는데 그 극한은 0이기 때문이다. 등비수열의 성질과 함께, 현재 우리가 사용하는 등비급수의 합을 얻어내는 방법을 사용하여 그 합을 구하고 또 그 예를 든 **同文算指**를 계속하여 인용하였다.

崔錫鼎의 **九數略**을 많이 연구한 조선 산서로 趙泰耉(1660~1723)의 **籌書管見**과 裵相設(1759~?)의 **書計瑣錄**이 있다. 이들이 다룬 堆垛術을 알아보자.

趙泰耉의 **籌書管見**은 그의 雜法에서 圓積, 方積, 三稜積을 들어 놓았는데, 물론 이들은 圓箭, 方箭, 三稜箭으로 **九數略**의 정의를 그대로 인용하고 있다. 산법에 대한 일

반 이론으로 崔錫鼎을 인용하고, **九章算術**을 정리한다. 堆垛術은 이 부분의 商功장에 "**附堆積法**"으로 취급하였다. 이는 楊輝의 **詳解九章算法**의 영향으로 볼 수 있지만 실제로 그가 이 책을 참고하였을 가능성은 앞으로 정리되어야 할 문제이다. 그가 취급한 급수는 倚壁草堆, 竹箭圓束, 竹箭方束, 三稜平積, 三角垛, 四角垛인데 그는 商功장에서 이들을 취급하여 茭草垛(= 倚墻尖堆)와 梯垛(= 倚墻平堆)를 함께 倚壁草堆로 정리하였다. 竹箭圓束, 竹箭方束, 三稜平積은 전술한 圓積, 方積, 三稜積이다. 三角垛와 四角垛의 합은 **楊輝算法**의 방법으로 구하였다. 모든 경우에 합을 구하고 또 합에서 항 수를 구하는 문제를 다루었다. 이로 미루어 그의 퇴타술은 崔錫鼎의 것과 구별된다. **九章算術**을 간단히 정리 한 후 趙泰耉는 서양 수학을 연구한 후에 이들에 대한 접근을 九章問答이라는 장에서 기술하고 있다. 이 장에서 그는 다시 草堆(= 茭草垛)를 기하적으로 그 합을 구하고 圓束, 方束, 三稜積도 등차수열이므로 草堆와 같이 기하적으로 그 합을 구할 수 있음을 설명하였다. 崔錫鼎은 **同文算指**에서 이들을 모두 等差級數로 이해하였는데 趙泰耉는 모두 기하적으로 다루었다. 삼각타와 사각타도 입체로 보아 그 합을 구하였다. 그는 沈括의 隙積術과 연결시키지는 못하였다.

裵相說의 **書計瑣錄]**에서 다룬 堆垛術은 崔錫鼎의 **九數略**을 거의 그대로 인용한 것이다. 즉 등차급수, 등비급수를 **同文算指**에서 인용한 것을 재인용하였다. 그러나 전술한 등비급수와 "無窮"에 대한 것은 인용하지 않았다. 酒甁一垛, 三角垛, 四角垛도 다루고, 등차급수, 등비급수와 달리 三角垛, 四角垛의 합은 崔錫鼎과 다르게 **楊輝算法**의 방법을 사용하였다.

洪大容(1731～1781)은 그의 저서 **籌解需用**(= **湛軒書** 外集 4-6권)에서 堆垛術을 전혀 취급하지 않고 있다. 다만 **湛軒書** 外集 4권의 衰分法에서 $\sum_{k=101}^{200} k$를 구하는 문제를 다루는데 이도 101부터 200까지의 합이 아니고 초항이 200이고 공차가 -1인 等差數列의 합의 문제로 취급한 것으로 보아 그는 堆垛術에 전혀 관심이 없었던 것으로 보인다.

같은 4권 雜法에서

錢一文日增一倍 至三十日 問爲數幾何

의 문제는 초항이 1이고 공비가 2인 等比數列의 제31항을 구하는 것이다. 그는 답으로 2^{30}을 구하는데 $2^{30}=(2^3)^{10}=((2^5)^3)^2=(2^6)^5$과 같이 세 가지 방법으로 계산하였다.

이상에서 18세기 이전의 조선 산학에서 堆垛術은 비교적 수평적으로 연구가 진행되었고, 조선의 산학자들은 중국의 산학자들과 마찬가지로 堆垛術을 체계적으로 정리하

지 못하였음을 알 수 있다.

3. 李尙爀의 堆垜術

조선 산학자중에서 수학을 철저하게 구조적으로 접근하고 이를 기초로 하여 창의적인 결과를 만들어 낸 유일한 사람이 李尙爀이다. 그는 **借根方蒙求**(1854), **算術管見**(1855)을 저술하였다. **借根方蒙求**는 **數理精蘊**(Shu li jing yun)에 나와 있는 다항식론을 완전히 이해하고 이를 天元術과 비교한 것이다. **算術管見**은 **數理精蘊** 下篇 제14권과 제22권의 내용에 대한 해설과 삼각함수의 값을 계산하는 P. Jartoux(杜德美, 1688~1720)의 방법과 J. N. Smogolenski(穆尼閣, 1611~1656)의 **天步眞原**(Tian bu zhen yuan)의 해설을 모은 것이다([16]). 이를 보면 그는 이미 동양 수학과 서양 수학을 會通하였음을 알 수 있다. 또 그는 南秉吉과 수학적 교류를 가졌었다. 南秉吉의 거의 모든 저서에서 李尙爀이 인용되고, 또 李尙爀의 저서에 그는 서문을 써서 그와의 교류를 나타내었다. 따라서 李尙爀은 南秉吉이 얻은 모든 수학적 자료를 공유한 것으로 보인다. 또 1865년에 南秉吉은 **算學正義** 上中下 세 편을 출판하는데, 서문에서 "余於養痾之餘采輯諸書 *李君志叟*釐正編修彙成一書曰算學正義"라 한 것을 보면 **算學正義**는 南秉吉과 李尙爀의 共著로 보아야 한다. 志叟는 李尙爀의 字이다. 또, 南秉吉은 **算學正義** 각 편에 "**宜寧南秉吉編撰 陜川李尙爀校正**"이라는 문구를 넣어 李尙爀의 기여를 나타내고 있다. **算學正義** 역시 서양 수학을 충분히 이해하고 그 방법을 사용하고 있다. 특히 이 논문과 관계되는 것은 **算學正義**가 조선의 산서로 **四元玉鑑**의 四元術을 최초로 소개한 책이라는 사실이다. 下篇은 測量, 天元一, 多元, 大衍등 네 절인데, 먼저 이들을 정의하고 그 기본적인 성질을 언급한 후 이의 응용으로 문제를 풀고 있다. 이는 **數理精蘊**의 전개 방법과 일치한다. 多元과 大衍은 특별한 의미가 있다. 多元은 **四元玉鑑**의 내용이고 大衍은 秦九韶(Qin Jiu Shao, 1202?~1261)의 **數書九章**(Shu shu jiu zhang, 1247)을 인용한 것이다. 算學正義는 大衍術을 최초로 인용한 조선의 산서이다([15]). 따라서 李尙爀은 이 때 이미 **四元玉鑑**과 **數書九章**을 완전히 연구한 것으로 확인된다.

算學正義가 출판 된 후 1868년 李尙爀은 **翼算** 上編 正負論, 下篇 堆垜說 두 권을 출판한다. 물론 正負論은 방정식론이다([4], [12], [13], [14]). 그는 上篇에서 梅文鼎(Mei Wen Ding, 1633~1721)의 **方程論**(1672), 李冶(Li Ye, 1192~1279)의 **測圓海鏡**(Ce yuan hai jing, 1248년 완성, 1282년 출판), **益古演段**(Yi gu yan duan, 1259)과 **四元玉鑑**, **算學正義**, **楊輝算法**, **數書九章**, **授時曆**, **夢溪筆談**, 梅瑴成(Mei Ke Cheng, 1681~1763)의 **赤水遺珍**(Chi shui yi zhen), **數理精蘊** 등을 인용하였다. 송, 원대의 수학으로 **楊輝算法**, **算學啓蒙**, **詳明算法**만 朝鮮에 들어왔었는데, 19세기에 송 원대의 찬란한 수학적 업적을 포함한 책들이 朝鮮에 한꺼번에 들어 온 것을 알 수 있고 이들은 모두

李尙爀과 南秉吉, 南秉哲형제에 의하여 연구되고 또 그 결과는 이들이 출판한 책에 나타난다. 물론 **翼算**을 보면 李尙爀이 세 사람 중에서 가장 주도적으로 이 일을 한 것을 알 수 있다.

다시 **翼算**의 堆垜術로 돌아가자.

李尙爀은 서문에서 퇴타술은 沈括(存中은 字)의 隙積術에서 시작하여 朱世傑(漢卿은 字)의 **四元玉鑑**에서 완성되었고, 또 그는 羅士琳(茗香은 字)의 **細草**를 읽었지만 만족하지 못함을 다음과 같이 나타내고 있다.

堆垜之法發端於*沈存中 隙積術* 大備於*朱漢卿 四元玉鑑*
其提要曰 茭草形段 如像招數 果積疊藏 各問爲自來算書所未及 第其術義初無發明
至於落一 撒星 爐峰等形 並與命名之義 而未可解焉
*羅茗香補草*亦只詳算式 學者終未免望洋矣 盖嘗論之
堆垜之以三角平堆爲本 猶面體之宗於勾股 落一等積之 不必求諸實體
亦猶諸乘方之無形加稽 然不以度量衡紀數而綦累箇積
有疊有隙 故別開門戶 方斜同數 分合異積 而它數之 藉此爲用者亦多焉
授時曆平立定三差亦本於此
玆乃尋究原術衾以愚見闡其賾而補其闕
三四角垜積及落一積 三角撒星積之截積分積法 茭草爐峰積之截積分積及三差法
三角爐峰積之截積四差法 正方爐峰積 正方爐峰更落一積之全積法
四角撒星積之全積及截積分積法 *並玉鑑所無增補者*
比其數而徵其理 表列七位法 實之目附以總解七則
設例十二問質諸遊藝君子云

한편 위의 서문에서 그는 지금까지 퇴타술을 기하적으로 이해하려고 한 것에 한계가 있음을 지적하고 이를 정리하겠다고 하였다.

마지막으로 그는 截積에 대하여 논한다. 일반으로 급수 $\sum_{k=1}^{n} a_k$를 *全積*이라 하고 이에 대하여 급수 $\sum_{k=m}^{n} a_k$을 *截積*이라 한다. 堆垜術의 연구에 李尙爀이 도입한 새로운 개념은 *分積法*이다. 이를 이용하여 三角垜積, 四角垜積, 三角撒星積, 四角撒星積, 茭草嵐峰積의 截積을 계산하고, 또 계차수열을 이용하여 茭草嵐峰積, 三角嵐峰積의 절적을 구하였는데 *이는 **四元玉鑑**이나 그 **細草**에 나타나지 않는다고 하였다.* 그는 "垜"자 대신에 "積"자를 많이 사용하고 있다.

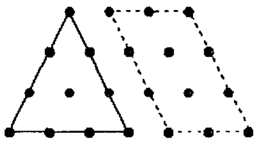
李尙爀의 **翼算** 下篇의 체재로 그가 수학을 철저하게 구조적으로 접근한 것을 잘 보여주고 있다. 삼각타 계열의 급수를 우리가 위에서 귀납적으로 도입한 순서를 택하여 이론을 전개하고 있다. 물론 **翼算** 이전의 산서에서는 삼각타 계열의 급수라는 개념도 없었고, 또 **四元玉鑑은** 방정식의 구성에만 관심이 있었기 때문에 堆垜術을 체계적으

로 다루지 않고 있다. **翼算**과 같은 순서를 택한 것은 李善蘭의 **垛積比類**가 최초이다. 또 각 경우에 李尙爀은 먼저 급수를 정의하고 그 합을 구하고 나서 또 截積을 논하고 있는데 三角垛 계열과 四角垛 계열 모두 그 합에 들어 있는 구조를 정확하게 들어내고 있다. 여러 경우에 $n=3$인 경우에 그 결과에 대한 증명을 첨가하는데 이들은 매우 논리적이다.

제일 먼저 茭草積을 "茭草積卽*三角平堆積*以挨次遞加之數 卽逐位底邊也"와 같이 정의하여 "遞加", 즉 등차수열을 사용하여 정의한다. 따라서 그는 圓箭積, 方箭積을 같은 절에서 취급하고, 茭草積의 截積도 같은 방법(梯田法)으로 구하고 나서, 그는 새로운 分積法을 도입하여 그 합을 구한다.

求截積 凡截去上尖幾層者爲之截積者 亦用梯田法
或用*分積法* 置本位茭草積
凡位數爲底邊亦爲層數 至於截積 底邊必多於層數 以層數作本位
底邊求之 *後倣此* 以上邊減一乘層數從之

分積法은 截積을 아래 그림과 같이 사다리꼴로 나타내고, 이를 삼각형과 평행사변형으로 나누어 그 합을 계산하는 것이다.



그림

분할을 통하여 합을 계산하므로 分積法이라 하였다([4]). 앞으로 절적의 항 수 n을 나타내기 위하여 절적을 $\sum_{k=m}^{m+n-1} a_k$로 나타낸다.

분적법을 대수적으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{m+n-1} k &= m+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+n-1)\\ &=(1+(m-1))+(2+(m-1))+(3+(m-1))+\cdots+(n+(m-1))\\ &=(\sum_{k=1}^{n} k)+(m-1)n = S_n^1+(m-1)n,\ \text{즉}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^0 = S_n^1 + S_{m-1}^0 S_n^0.$$

이때 n은 층수이고, 첫째 항은 *층수를 本位*로 하는 교초적이고 둘째 항은 상변에서 1을 뺀 것에 층수를 곱한 것이 되고 그들의 합으로 절적 교초적을 구한다. 물론

$\sum_{k=m}^{m+n-1} k = S^1_{m+n-1} - S^1_{m-1}$을 통하여 계산할 수 있지만 위의 결과와 비교하면 李尙爀의 결과가 매우 우수함을 알 수 있다. 또 앞으로 그가 얻은 나머지 三角垜 계열의 截積을 分積法을 사용하여 이와 같은 결과를 얻어내므로 그들에 들어 있는 구조를 밝힐 수 있게 된다.

三角垜積에 대하여 자세히 알아보자. 이 방법을 귀납적으로 사용하면 나머지 三角垜 계열에 대한 그의 이론을 미루어 알 수 있기 때문이다.

三角垜積或稱*茭草落一積* 卽層累茭草積之共數也
其底邊卽最大茭草底邊而六稜俱等 其形爲三角尖體
然最上一箇亦占實數 故以一箇爲上闊添一爲上長
以底邊爲下闊添一爲下長乃以上長倍之加入下長以上闊乘之得數
又以下長倍之加入上長以下闊乘之得數 又以上下長相減 得數
乃倂三位 以下闊爲高乘之如十二而一 得積
此御三角臺體法而層累之積 異於塹堵等體之湊合
故更加上下邊之較 卽沈存中之創獲者也
上下邊各加一爲長者 底面爲茭草積 故用其法也

우선 그는 三角垜積을 茭草落一積으로 보는데 이는 바로 Pascal 삼각형에서 전술한 茭草積과 三角垜積의 관계를 나타낸 것이다. 또 그는

$$S^2_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\text{에서}$$

$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$를 沈括의 級數로 보고, 隙積術을 사용하여 그 합을 구하였다.
이어서,

其積亦爲以*反錐差乘*各層底邊之共數也
反錐差乘者以挨次遞加之各數 從末位起一乘之也 盖三角垜積旣爲茭草積之層累 而茭草積又爲底邊之層累 故如第三位三角垜積 卽第一第二第三位茭草積之共數 而第一位茭草積 卽第一位底邊 第二位茭草積 卽第一 第二位底邊之共數 第三位茭草積 卽第一第二第三位底邊之共數 卽合爲第一位底邊三倍 第二位底邊二倍第三位底邊一倍 凡以反錐差乘者皆倣此
又法以茭草積爲實 以底邊加二乘之三歸 得積

이 부분은 朱世傑이 **四元玉鑑**에서 도입한 것을 이용한 것이다.
수열 a_1, a_2, $a_3,\cdots$, a_n에 대하여, *反錐差를 수열의 항에 차례로 곱하는 것*은 수열

$$na_1,\ (n-1)a_2,\ (n-2)a_3,\ \cdots,\ 1\times a_n$$

을 얻어내는 것을 뜻한다.

四元玉鑑에는 反錐差 이외에도 뒤에 취급할 *梯田積*을 곱하는 것과 함께 錐差또는 抛差를 곱하는 것도 다루고 있다. 錐差는 수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n에 차례로 1, 2, $\cdots$, n을 곱하는 것을 뜻하고, 抛差는 錐差 이외의 등차수열을 차례로 곱하는 것을 뜻하는데, 李尙爀은 錐差는 층수를 곱하는 것으로 대치하였다.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right)=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)k$$

에서 곱의 인수 k는 1, 2, $\cdots$, n, 즉 S_k^0으로 이루어진 수열의 항으로 이에 反錐差를 곱하여 얻어진 수열의 급수로 三角垛積

$$S_n^2=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)S_k^0$$

을 나타낸 것이다. 끝으로 그는 교초적에서 $S_n^1=S_n^0\times\dfrac{n+1}{2}$과 같이 $S_n^2=S_n^1\times\dfrac{n+2}{3}$을 언급한다.

다음으로 절적에 대하여

求截積者亦用三角臺體法 亦加上下邊較
或用*分積法* 置本位三角垛積 上邊減一以乘本位茭草積 上層面積
爲第一層茭草積 凡三角諸積之稱面積者皆茭草積也
內減一邊以乘本位底邊 相併從之

李尙爀은 $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}\frac{k(k+1)}{2}$을 三角垛積과 같이 沈括의 급수로 계산할 수 있음을 언급하고, 分積法을 사용하여 구하는 것을 설명하고 있다. 茭草積의 截積과 마찬가지로

$$S_n=\sum_{k=m}^{m+n-1}S_k^1=(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m+1)+\cdots$$
$$+(1+2+\cdots+(m+n-1))$$

에서, $S_n^2=1+(1+2)+\cdots+(1+2+\cdots+n)$을 빼면

$$S_n-S_n^2=(2+3+\cdots+m)+(3+4+\cdots+(m+1))+\cdots$$
$$+((n+1)+(n+2)+\cdots+(m+n-1)) \quad \cdots \text{(A)}$$

이 되는데, 우변의 각 항은 절적교초적이고 그 층수는 모두 $m-1$이다. 分積法을 이용한 截積 茭草積을 이용하여 (A)를 계산하면,

$$[\frac{(m-1)m}{2}+(2-1)(m-1)]+[\frac{(m-1)m}{2}+(3-1)(m-1)]$$
$$+\cdots+[\frac{(m-1)m}{2}+((n+1)-1)(m-1)]$$
$$=n\times\frac{(m-1)m}{2}+(m-1)(1+2+\cdots+n)$$
$$=(m-1)S^1_n+nS^1_{m-1}=(m-1)S^1_n+n(S^1_m-m)$$

이다. 따라서

$$S_n-S^2_n=(m-1)S^1_n+n(S^1_m-m)$$

이므로 구하는 절적삼각타적은

$$\sum_{k=m}^{m+n-1}S^1_k=S^2_n+(m-1)S^1_n+n(S^1_m-m)=S^2_n+(m-1)S^1_n+S^1_{m-1}n$$

이고, S^1_m은 상층 면적(=茭草積)이므로 구하는 합이 얻어진다. 한편 $n=S^0_n$으로 치환하면 위의 식은 다음과 같다.

$$\sum_{k=m}^{m+n-1}S^1_k=S^2_n+S^0_{m-1}S^1_n+S^1_{m-1}S^0_n.$$

이어서,

或用三差法 以第一層面積爲上差 第二層面積內減上差爲中差
第三層面積內減二中差及一上差爲下差
乃以本位底邊乘上差 以前位茭草積乘中差 以前前位
前前位者層數減二之位 後倣此
三角垛積乘下差 併之 得逐層茭草積之共數也

절적을 구하는데 $a_k=S^1_k=\frac{k(k+1)}{2}$ $(k=m,\ m+1,\ \cdots,\ m+n-1)$에서, 계차수열을 이용하여 그 합을 구한다. 즉, 초항 a_m(=제1층 면적)이 上差, $\Delta_1=m+1$, $\Delta_2=1$을 구하여

$$\sum_{k=m}^{m+n-1}S^1_k=nS^1_m+(m+1)S^1_{n-1}+S^2_{n-2}$$ 임을 보였다.

李尙爀은 현재 사용하고 있는 제1계차수열의 초항 Δ_1을 *中差*, 제2계차수열의 초항 Δ_2를 *下差*라 부르고 있다. 특히 $m=1$인 경우, 즉 $a_m=1$을 대입하여 다음을 얻는

다.

$$S_n^2 = n + 2S_{n-1}^1 + S_{n-2}^2.$$

置本位三角垜積 上邊減一以乘本位茭草積併之 得以反錐差乘 逐層底邊之共數也
截積比全積少上尖虛積 卽以反錐差乘上尖各層底邊之數也
以反錐差乘截積逐層底邊數比全積少以全積層數及遞減之數
挨次乘上尖各層底邊之數也 其較爲以虛積底面積乘截積層數
而虛積底面積 卽上層面積減一邊也

反錐差를 이용하여

$$\begin{aligned} S_n' &= nm + (n-1)(m+1) + \cdots + 1\times(m+n-1) \\ &= m + (m+(m+1)) + \cdots + (m+(m+1)+\cdots+(m+n-1)) \end{aligned}$$

을 구하는 방법을 설명하고 있다.

$$S_n' - S_n^2 = (m-1)(1+2+\cdots+n) = (m-1)S_n^1$$

에서 구하는 식

$$S_n' = S_n^2 + (m-1)S_n^1$$

을 얻었다. 한편, $S_{m-1}^1 + (m+(m+1)+\cdots+(m+k)) = S_{m+k}^1$이므로 截積

$S_n = \sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^1 = S_n' + nS_{m-1}^1$이므로, 위에서 얻은 식을 사용하여

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^1 = S_n^2 + (m-1)S_n^1 + n(S_m^1 - m) = S_n^2 + S_{m-1}^0 S_n^1 + S_{m-1}^1 S_n^0$$

이 된다. 앞에서 구한 방법보다 이 분적법이 더욱 간단하다.

이상에서 李尙爀이 茭草積과 三角垜積과 그 截積을 구하는 방법을 모두 들어 놓고 또 그 이유를 정확하게 설명하고 있다. 이는 그대로 이어져 三角垜, 四角垜 계열의 급수에 대하여 다음 결과를 얻어내었다 ([4]). 李尙爀은 우리가 사용하고 있는 대수적 표현을 사용하지 않았지만 편의상 그의 결과를 전술한 두 경우와 같이 대수적 표현을 써서 나타낸다.

A) $S_n^r = \dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{(r+1)!} = S_n^{r-1} \times \dfrac{n+r}{r+1}.$

한편 反錐差의 곱을 써서 그들 사이에 다음이 성립하는 것을 이용한다.

$$S_n^{r+2}=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)S_k^r \quad (r=0,1,2,3).$$

B) $T_n^r=S_n^r\times\dfrac{2n+r}{r+2}=2S_n^{r+1}-S_n^r$ $(r=1,\ 2,\ 3)$.

反錐差 표시는 앞에서와 같이

$$T_n^{r+2}=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)T_k^r \quad (r=0,1).$$

C) $L_n^r=\sum_{k=1}^{n}kS_k^r$로 정의하고, L_n^1, L_n^2를 각각 *茭草嵐峰積*, *三角嵐峰積*이라 하고,

$$L_n^r=S_n^{r+1}\times\frac{(r+2)n+1}{r+3}=(r+1)S_{n-1}^{r+2}+S_n^{r+2}.$$

梯田積의 곱을 써서

$$L_n^r=\sum_{k=1}^{n}(k+(k+1)+\cdots+n)S_k^{r-1}.$$

마찬가지 방법으로 $\sum_{k=1}^{n}k\times k^2=\sum_{k=1}^{n}k^3$, $\sum_{k=1}^{n}kT_k^1$을 각각 *正方嵐峰積*, *四角嵐峰積*이라 한다. $\sum_{k=1}^{n}kT_k^1=S_n^2\times\dfrac{8n^2+11n+1}{20}=2L_n^2-L_n^1$을 얻고, 正方嵐峰積에서 *正方嵐峰更落一積* $\sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{k}j^3)=S_n^2\times\dfrac{3n^2+6n+1}{10}$을 정의하고 그 합을 구하였다.

四元玉鑑에서는 단지 위의 합을 사용만 하고 그 이유에 대한 언급이 전혀 없다. 그러나 저자 李尙爀은 이를 체계적으로 정리하여 세 경우 *급수의 합에 대한 구조*를 밝혀내었다.

위의 B), C)의 경우 李尙爀은 비례식 $(n-1):(n+r)=S_{n-1}^r:S_n^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$이 성립하는 것을 보이고, 이를 사용하여 점화식

$$S_{n-1}^{r+1}=S_n^r\times\frac{n-1}{r+2}$$

을 얻어 그 합을 구하고 있다. 이는 저자의 *독창적*인 방법이다.

그의 截積法의 결과를 종합하면 다음과 같다.

D) 分積法을 사용한 경우

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^r = S_n^{r+1} + S_{m-1}^0 S_n^r + S_{m-1}^1 S_n^{r-1} + S_{m-1}^2 S_n^{r-2} + S_{m-1}^3 S_n^{r-3}$$

($r=0, 1, 2, 3$이고, $r-k<0$이면 $S_n^{r-k}=0$이다).

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (n-k+1)(m+k-1) = S_n^2 + S_n^1 S_{m-1}^0.$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (n-k+1)(m+(m+1)+\cdots+(m+k-1))$$

$$= S_n^4 + S_n^3 S_{m-1}^0 + S_n^2 S_{m-1}^1 + S_n^1 S_{m-1}^2.$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} T_k^r = T_n^{r+1} + 2(m-1) S_n^{r+1} + T_{m-1}^0 S_n^r + T_{m-1}^1 S_n^{r-1} + T_{m-1}^2 S_n^{r-2}$$

($r=0, 1, 2$이고, $r-k<0$이면 $S_n^{r-k}=0$이다).

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (n-k+1) T_{m+k-1}^1 = T_n^3 + 2(m-1) S_n^3 + T_{m-1}^0 S_n^2 + T_{m-1}^1 S_n^1.$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} (k-m+1) S_k^1 = L_n^1 + (2m-2) S_n^2 + (S_m^1 + 1 - 2m) S_n^1.$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} k S_k^1 = L_n^1 + (3m-3) S_n^2 + [(m-1)^2 + S_{m-1}^1 - (m-1)] S_n^1$$

$$+ S_{m-1}^1 (m-1) n.$$

E) 三差法, 四差法을 사용한 경우

1. $$\sum_{k=m}^{m+n-1} S_k^1 = n S_m^1 + (m+1) S_{n-1}^1 + S_{n-2}^2.$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} k^2 = m^2 n + (2m+1) S_{n-1}^1 + 2 S_{n-2}^2.$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} k^3 = m^3 n + (3m^2+3m+1) S_{n-1}^1 + (6m+6) S_{n-2}^2 + S_{n-3}^3.$$

2. $$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1) S_{m+k-1}^1 = S_m^1 S_n^1 + (m+1) S_{n-1}^2 + S_{n-2}^3.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(m+k-1)^2 = m^2 S_n^1 + (2m+1) S_{n-1}^2 + 2 S_{n-2}^3.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k+1)(m+k-1)^3$$

$$= m^3 S_n^1 + (3m^2+3m+1) S_{n-1}^2 + (6m+6) S_{n-2}^3 + 6 S_{n-3}^4.$$

$$\sum_{k=1}^{n} (m+k-1)(k+(k+1)+\cdots+n) = m S_n^1 + 2(m+1) S_{n-1}^2 + 3 S_{n-2}^3.$$

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} kS^1_k = S^1_m S^1_n + 2(m+1)S^2_{n-1} + 3S^3_{n-2}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+(k+1)+\cdots+n)S^1_{m+k-1}$$

$$= S^1_m S^1_n + 2S^1_{m+1}S^2_{n-1} + 3(m+2)S^3_{n-2} + 4S^4_{n-3}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} kS^2_{m+k-1} = S^2_m S^1_n + 2S^1_{m+1}S^2_{n-1} + 3(m+2)S^3_{n-2} + 4S^4_{n-3}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+(k+1)+\cdots+n)(m+k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k\left(\sum_{j=1}^{k}(m+j-1)^2\right)$$

$$= m^2 S^1_n + 2(m+1)^2 S^2_{n-1} + 3(2m+3)S^3_{n-2} + 8S^4_{n-3}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} kT^1_{m+k-1} = T^1_m S^1_n + 2(m+1)^2 S^2_{n-1} + 3(2m+3)S^3_{n-2} + 8S^4_{n-3}.$$

위의 경우 모두 층수 $(=n)$와 초항에 관계되는 수 $(=m)$와 三角垜 계열의 급수를 사용하여 계산할 수 있게 하고, 또 각 경우에 r을 제한적으로 사용하였지만, 이들은 모든 r에 대하여도 성립하는 것을 알 수 있다.

이는 저자가 수학을 총체적이고 체계적으로 이해하여 그 안에 들어 있는 구조를 찾아내고 있는 것으로, 현재 사용하고 있는 방법이다. 또 그는 여전히 기호화한 일반적인 증명은 못하였지만 전술한대로 세 개의 항을 택하여 증명을 하는데 이는 기호로 바꾸기만 하면 그대로 현재의 증명으로 사용될 수 있다.

저자는 總解에서 이 사실을 체계적으로 정리하고 또 12개의 예문을 들어 이를 설명하고 있다. 이 예문에서 그는 **四元玉鑑**의 해법과 같은 방법을 사용하고 있는데, **四元玉鑑**의 방법과 다른 점을 부각시키려고 하였다. 그러나 三角垜 계열의 급수의 합을 사용할 때, 음수를 최대한 사용하지 않으려고 **四元玉鑑**에서는 층수 $(=n)$를 치환하는 과정을 거치는데 이 부분을 저자가 간과하고 있는 것으로 보인다. 이에 대한 자세한 논의는 다음 기회로 넘긴다.

翼算 上篇에서 방정식론을 다루면서 여러 가지 내용을 취급할 수밖에 없었지만 下篇은 급수론이라는 한 주제를 대상으로 하고 사용되는 도구도 上篇에 비하여 간단하다. 따라서 그의 서술은 上篇보다 훨씬 체계적이고 통일되어 수학적 구조를 밝혀내는데 성공하였다.

4. 결론

퇴타술, 즉 유한급수론은 **九章算術**부터 시작하여 모든 수학자들이 취급한 분야이다.

초기에는 간단한 등차급수와 등비급수를 이용하는데 algorithm 위주로 이들을 취급하였지만, 항상 기하적 도형과 연결시켜 이들을 이해하려고 노력하였다. 등차급수의 경우는 넓이를 통하여 이들을 구하는데 문제가 없었지만, 입체의 부피와 연결 시켜야 하는 경우에 문제가 있음을 알아내고 이를 처음으로 해결한 학자가 沈括이다. 그는 隙積術을 도입하여 급수 $\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)(b+k-1)$의 합을 얻어내었다. 그의 결과는 $a=1$, $b=1$의 경우가 $\sum_{k=1}^{n}k^2$이고, $a=1$, $b=2$인 경우가 $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)$이 되지만 楊輝만 이들을 사용하였다.

朱世傑이 **算學啓蒙**과 **四元玉鑑**에서 유한급수론을 완성하였다. 그러나 불행하게도 그의 연구 결과는 잊혀지고, 1822년 羅士琳이 이들을 재발견하여 19세기 동양 수학의 堆垛術은 새로운 전기를 마련하게 되었다.

조선 산학에서는 **算學啓蒙**이 계속하여 연구되어 朱世傑의 초보적인 堆垛術은 보존되었다. 그러나 그들은 **算學啓蒙**보다는 **楊輝算法**과 **詳明算法**의 결과를 더 많이 인용하고, **算學啓蒙**의 결과는 주로 방정식의 문제와 연결시킬 때만 사용한 것을 확인할 수 있었다. 또 **同文算指**의 결과를 받아들인 崔錫鼎은 **九數略**에서 서양 수학 형식의 급수론을 소개하고 있지만 그 내용이 등차급수, 등비급수에 한정되어, 그 당시의 동양 수학의 급수론은 초보적이기는 하지만 이에 비하여도 크게 모자라 그 자신도 **算學啓蒙**, **楊輝算法** 수준의 급수론을 **九數略**에 포함시킬 수밖에 없어서, 서양 수학적 방법이 조선에 큰 영향을 주지 못하였다([16]).

羅士琳의 **四元玉鑑細草**가 조선에 들어오고 이를 연구한 李尙爀은 그의 저서 **翼算**에서 **四元玉鑑**의 결과를 완전히 정리하여 동양 수학에서 취급한 모든 급수에 대한 구조를 완전히 밝히고, 또 새로운 截積의 문제를 택하여 이를 해결하는데, 독창적인 分積法을 도입하여, 截積의 구조도 완전히 해결하였다. 그는 分積法과 함께 계차수열도 이용하여 그의 결과를 비교하였다.

翼算 下篇은 유한급수의 구조에 대한 완벽한 논문이고, 그의 계산 방법은 현재 우리가 사용하고 있는 계산 방법 보다 훨씬 우수하다.

거의 같은 시대에 출판된 李善蘭의 **則古昔齋算學**(1867)의 **垛積比類** 4권에서 다룬 연구 결과는 세계적으로 알려져 있다. 李善蘭이 취급하지 않은 截積에 대한 李尙爀의 결과는 조선 산학에서 가장 뛰어난 독창적인 것이고, 또 李善蘭의 업적과 비견되는 것이다.

참고 문헌

1. 郭書春 匯校, *九章算術*, 遼寧教育出版社, 1990.
2. 沈括, *夢溪筆談*, 國學基本叢書, 臺灣商務印書館印行, 1967.
3. 吳文俊 主編, *中國數學史大系*, 第一卷 - 第八卷, 副卷, 北京師範大學出版社, 1998.
4. 阮元, *疇人傳*, 國學基本叢書, 臺灣商務印書館印行, 1967.
5. 李尙爀, *翼算*, 홍성사 역, 한국수학사학회, preprint
6. 李儼, *中算史論叢* (一) 1933, (二) 1939, (三) 1939, (四 上 下) 1947 中華學藝社出版, 商務印書館發行
7. 李迪, *中國數學史簡編*, 遼寧人民出版社, 1984.
8. 錢寶琮 主編, *中國數學史*, 科學出版社, 1964.
9. *中國科學技術典籍通彙* 數學卷 全五卷, 河南敎育出版社, 1993.
10. *中國歷代算學集大成*, 上, 中, 下, 山東人民出版社, 1994.
11. *韓國科學技術史資料大系*, 數學編, 1卷 - 10卷, 驪江出版社, 1985.
12. 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算學者 李尙赫의 方程式論, 한국수학사학회지 17(2004), No. 1, 1-14.
13. 홍영희, 다항식의 대수적 표현, 한국수학사학회지 16(2003), No. 4, 15-32.
14. 홍영희, 조선시대의 방정식론, 한국수학사학회지 17(2004), No. 4, 1-16.
15. 홍영희, 不定方程式의 歷史, 한국수학사학회지 18(2005), No. 3, 1-24.
16. 홍영희, 朝鮮 算學과 數理精蘊, 한국수학사학회지 19(2006), No. 2.
17. C. Cullen tr., *The Suan shu shu*(筭數書), Needham Research Institute Working Papers : 1, Needham Research Institute, 2004.
18. Y. Li and S. Du, *Chinese Mathematics, A concise history*, tr. J. N. Crossely and A. W.-C. Lun, Clarendon Press, 1987.
19. J-C. Martzloff, *A History of Chinese Mathematics*, Springer-Verlag, 1997.

The Korean Journal for History of Mathematics Vol. 19 No. 2 (May. 2006), 1-24

Finite Series (堆垜術) in Chosun Dynasty Mathematics

Department of Mathematics, Sogang University **Sung Sa Hong**

We study the theory of finite series(堆垜術) in Chosun Dynasty Mathematics. We divide it into two parts by the publication of Lee Sang Hyuk(李尙爀, 1810-?)'s *Ik San* (翼算, 1868) and then investigate their history. The first part is examined by Gyung Sun Jing(慶善徵, 1616-?)'s *Muk Sa Jib San Bub*(默思集算法), Choi Suk Jung(崔錫鼎)'s *Gu Su Ryak*(九數略), Hong Jung Ha(洪正夏)'s *Gu Il Jib*(九一集), Cho Tae Gu(趙泰耉)'s *Ju Su Gwan Gyun*(籌書管見), Hwang Yun Suk(黃胤錫)'s *San Hak Ib Mun*(算學入門), Bae Sang Sul(裵相設)'s *Su Gye Soe Rok*(書計瑣錄) and Nam Byung Gil(南秉吉, 1820-1869)'s *San Hak Jung Ei*(算學正義, 1867), and then conclude that the theory of finite series in the period is rather stable. Lee Sang Hyuk obtained the most creative results on the theory in his *Ik San* if not in whole mathematics in Chosun Dynasty. He introduced a new problem of truncated series(截積). By a new method, called the partition method(分積法), he completely solved the problem and further obtained the complete structure of finite series.

Key Words: Theory of finite series(堆垜術) in Chosun Dynasty Mathematics, Gyung Sun Jing(慶善徵), Muk Sa Jib San Bub(默思集算法), Choi Suk Jung(崔錫鼎, 1646-1715), Gu Su Ryak(九數略), Hong Jung Ha(洪正夏, 1684-?), Gu Il Jib (九一集), Cho Tae Gu(趙泰耉, 1660-1723), Ju Su Gwan Gyun(籌書管見), Hwang Yun Suk(黃胤錫, 1719-1791), San Hak Ib Mun(算學入門), Bae Sang Sul(裵相設, 1759-?), Su Gye Soe Rok(書計瑣錄, 1786), Nam Byung Gil(南秉吉), San Hak Jung Ei(算學正義), Lee Sang Hyuk(李尙爀), Ik San(翼算), truncated series(截積), partition method(分積法)

2000 Mathematics Subject Classification: 01A13, 01A45, 01A50, 01A55, 05-03, 05A10

논문 접수: 2006년 4월 7일, 심사 완료: 2006년 5월