

최소노름 응력장을 이용한 구조물의 소성해석법

Plastic Design Method for Steel Skeletal Structure based on the Least Norm Stress Field

이 승 재*
Lee, Seung-jae

요 약

본 연구는 소성이론의 하계정리를 이용하여 구조설계자의 부재의 응력장에 대한 만족족도를 고려한 구조해석 프로그램을 제안한다. 구조물에 작용하는 계수하중과 평형을 이루는 임의의 응력장 중에서 최소노름 응력장을 이용하여 찾아내고, 구조물의 모든 부위에서 부재의 설계내력이 부재력을 상회하도록 부재 단면을 결정하는 방법을 제안한다.

Abstract

This study presents a new stress analysis method to be substituted for the elastic analysis in such a plastic design procedure. This method is accompanied by an efficient mathematical tool which can be easily handled by personal computer. The method also easily accepts arbitrary strategies by the designer for selection member size.

키워드 : 최소노름 응력장, 탄성응력장, 평형방정식, 일반화 내력노름, 라그랑주승수, 접속매트릭스

Keywords : The Least Norm Stress Field, Elastic Stress Field, Equilibrium Equation, Generalized Internal Force Norm, Lagrange Multiplier, Connection Matrix

1. 서 론

본 연구는 소성설계시 부재단면 결정을 위한 응력장(필요내력)을 간편히 작성하는 방법을 소개한다. 일반적으로 소성설계는 골조에 작용하는 계수하중이 주어졌을 때 계수하중과 평형을 이루는 임의의 응력장(부재력)을 찾아내고, 골조의 모든 부위에서 부재의 설계내력이 부재력(필요내력)을 상회하도록 부재 단면을 결정한다. 본 연구에서는 선행연구 1)의 이론을 바탕으로 소성설계를 이용하여 구조물을 설계하는 경우 직면하는 무수히 많은 정적허용 응력장(Statically Admissible Stress Field)을 설계자가 자유로이 선택할 수 있는 구조해석프로그램을 제안하고, 6층 3스팬의 철골골조에 적용한 해석결과를 범용프로그램의 비교한 결과에 대해서 보고한다.

2. 최소노름응력장의 수식화

직접 강성법 등과 같이 매트릭스 방법을 이용한 구조물 해석시 사용되어지는 방정식 및 조건식은, 부재단 하중과 부재단 변위의 관계식인 구성식, 부재단 변위와 절점변위의 관계식인 적합조건식, 절점 하중과 부재단 하중의 관계식인 평형방정식이 있다. 이를 수식화하면 다음과 같다.

$$\text{평형방정식} \quad \{P\} = [C]\{M\} \quad (1)$$

$$\text{적합조건식} \quad \{\theta\} = [C]^T\{\delta\} \quad (2)$$

$$\text{구성식} \quad \{M\} = [K]\{\theta\} \quad (3)$$

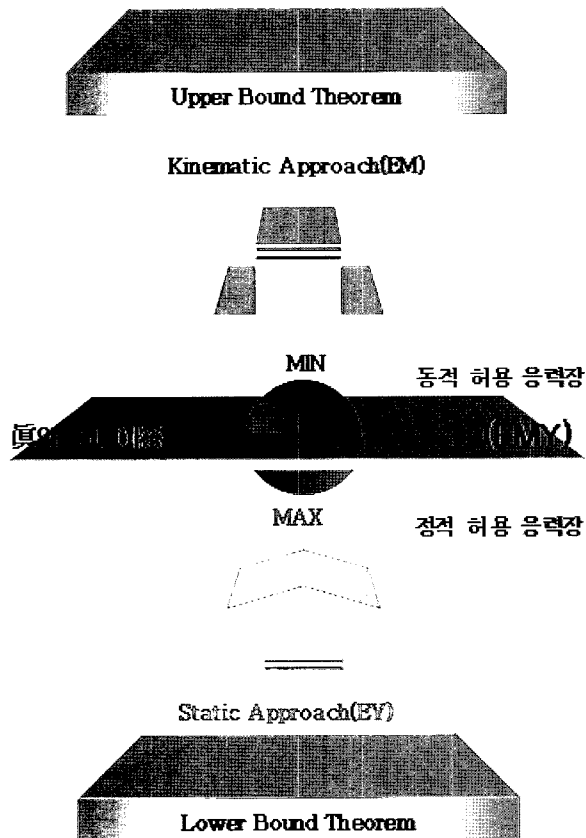
여기서, $\{P\}$: 절점하중(외력)
 $\{M\}$: 부재단 하중(내력)
 $[C]$: 접속매트릭스
 $\{\delta\}$: 절점변위
 $\{\theta\}$: 부재단 변위(변형)

* 정희원, 한국기술교육대학교, 교수, 공학박사
Tel:+41-560-1334, E-mail: leeseung@kut.ac.kr

[K]: 강성 매트릭스

이다.

기존의 탄성설계를 이용하여 구해진 응력장은 부재의 연성능력이 보장된다면 소성화후에 기대되어지는 응력의 재분배 효과를 이용할 수 없다. 소성이론에서의 하계정리는 평형조건, 소성조건, 붕괴조건의 세 가지 조건 중 평형조건과 소성조건을 동시에 만족하는 상태를 정적허용상태(Statically Admissible State)라 하고, 정적허용하중상태 중에서 계산되는 하중은 실제의 붕괴하중보다 항상 작거나 같다는 정리이다. 이를 도식화하면 <그림 1>과 같다. 하계정리를 이용하면 (1) 식의 평형방정식만을 이용하고 (2) 식 및 (3) 식 대신에 다른 조건을 부가하여 설계에서 필요한 응력장을 찾아내어도 무방하다. 본 연구에서는 선행연구1)에서 사용한 조건식을 이용하여 응력장을 구하기로 한다.



<그림 1> 상계정리 및 하계정리

$$\{M\}^T \{M\} \rightarrow \text{최소화} \quad (4)$$

$$\text{여기서, } \{M'\} = [D]\{M\} \quad (5)$$

(4) 식의 의미는 무한히 존재하는 응력장 가운데 한 개를 선택한 경우에, 선택한 응력장에 있어서 설계자의 불만족도를 응력장 가운데 유한개의 설계점에서 부재력의 자승화로 근사하고, 그 불만족도를 최소가 되도록 하는 응력장을 발견해 내는 것이다. 또한, (5) 식의 [D]는 설계자 만족도 매트릭스로서 정칙행렬이다.

(1) 식과 (4) 식의 조건을 만족하는 응력장을 $\{M^*\}$ 로 표시하고, $\{M^*\}$ 를 구한다는 것은 평형방정식 1을 부대조건으로 하고, 일반화 부재력 노름-(4) 식을 최소로 하는 문제가 된다.

위의 문제를 해결하기 위해 다변수 함수의 최적값을 구하는 방법의 하나인 라그랑주 승수법을 이용한다.

$$G = 0.5 M^T [\text{diag}(D_i)] M + \lambda^T (P - [C] M)$$

여기서, $\{\lambda\}$ 는 n차의 라그랑주 미정계수를 의미한다. 즉, G의 함수를 최소화하는 것과 동일한 문제가 된다.

$$\left(\frac{\partial G}{\partial M} \right) \Big|_{\{M\} = \{M^*\}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

따라서,

$$[\text{diag}(D_i)] \{M^*\} = [C]^T \{\lambda\} \quad (6)$$

부대조건,

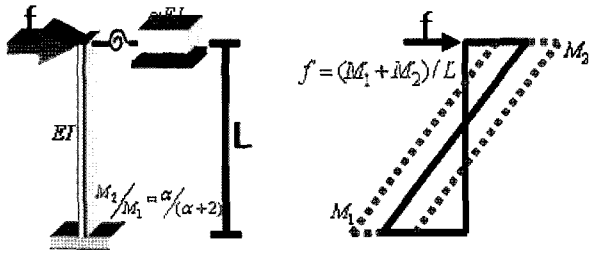
$$\{P\} = [C] \{M^*\} \quad (7)$$

(6) 식을 (7) 식에 대입하면,

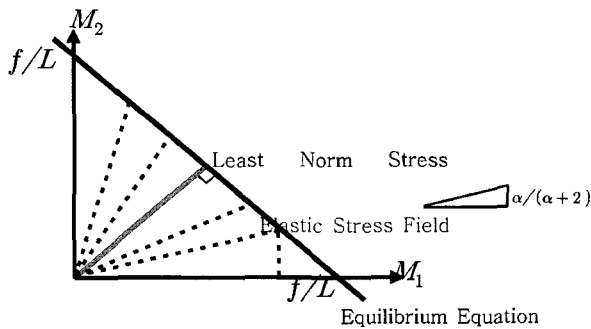
$$\{P\} = [C][\text{diag}(1/D_i)][C]^T \{\lambda\} \quad (8)$$

$$\{\lambda\} = ([C][\text{diag}(1/D_i)][C]^T)^{-1} \{P\} \quad (9)$$

(6) 식과 (9) 식을 이용하면,



<그림 2> 부재의 모델화



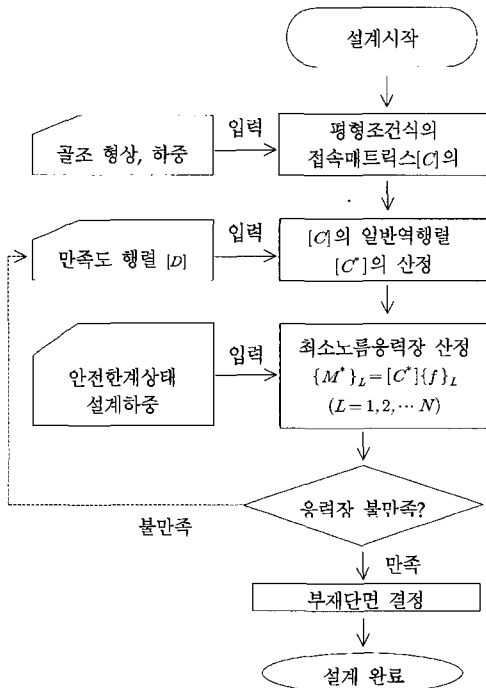
<그림 3> 최소노름응력장 도식

$$\{M^*\} = [C^*]\{P\} \quad (10)$$

여기서, $\{C^*\}$ 는 일반역행렬이라 하며,

$$\{C^*\} = [diag(1/D_i)][C]^T([C][diag(1/D_i)][C]^T)^{-1}$$

이렇게 하여, 비정칙 행렬($[C]$)의 역행렬을 구해낼



<그림 4> Flow Chart

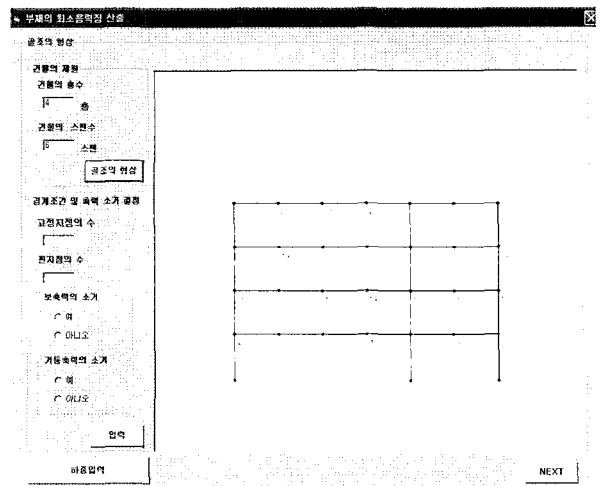
수 있다. $[C]$ 의 역행렬을 도출해 냄으로써 무수히 많이 존재하는 응력장 가운데 불만족을 최소로 하는 응력장을 구해낼 수 있다.

개발 프로그램의 Flow Chart를 <그림 4>에 나타낸다.

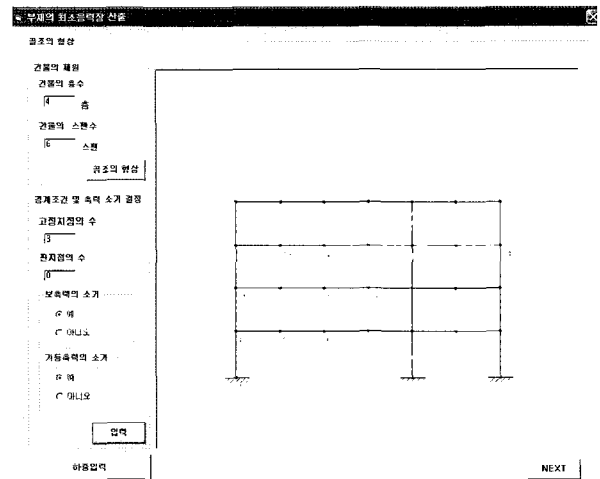
3. 개발 프로그램의 구성

개발 프로그램의 사용 언어는 Visual Basic 6.0을 사용하였으며 해석 프로그램은 다음과 같이 9단계로 구성되어 있다.

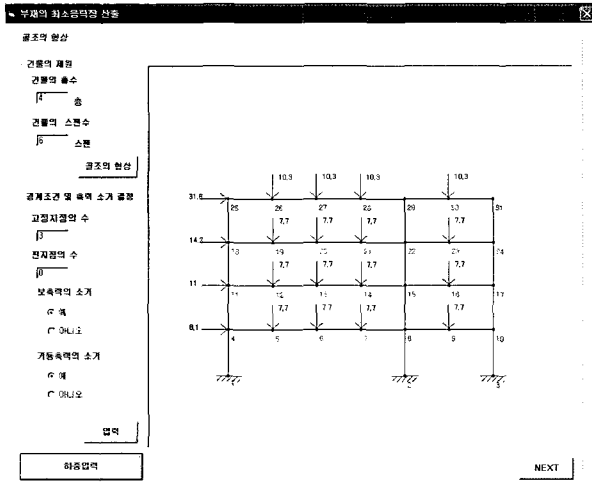
<그림 5>의 Step 1에서는 해석할 골조의 형상을 격자 형식으로 구성한 다음 실제 골조의 하중 위치



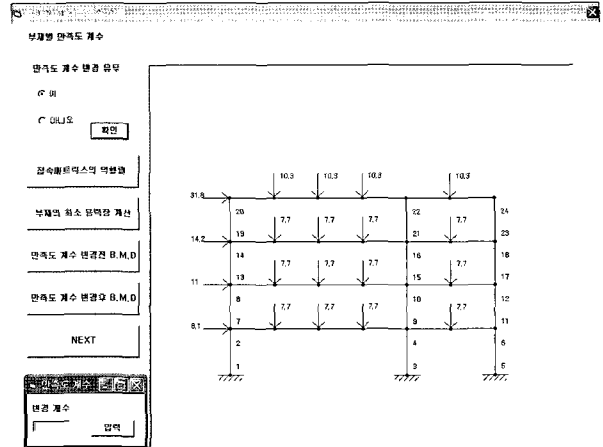
<그림 5> Step 1



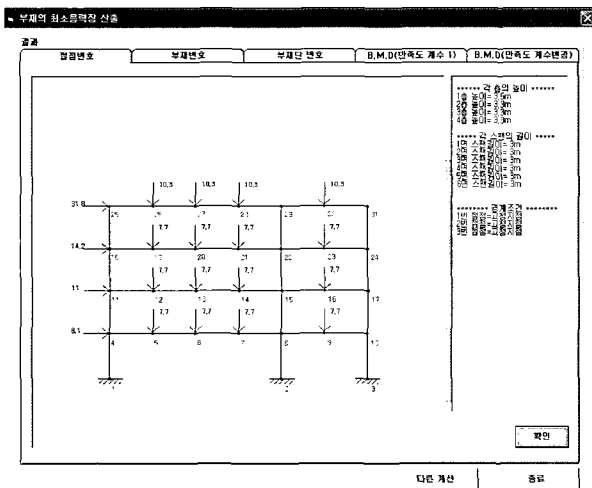
<그림 6> Step 2



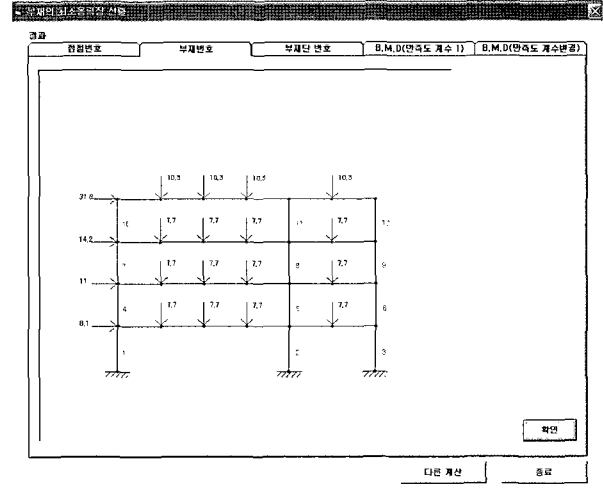
<그림 7> Step 3



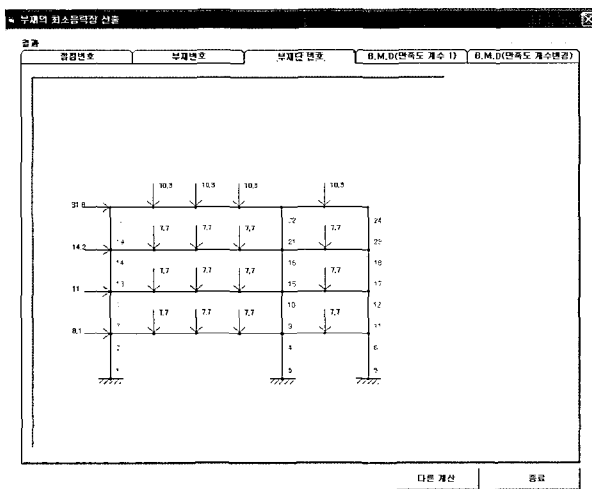
<그림 8> Step 4



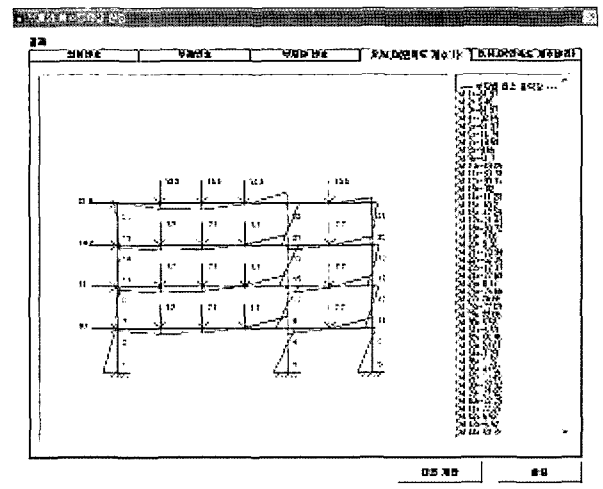
<그림 9> Step 5



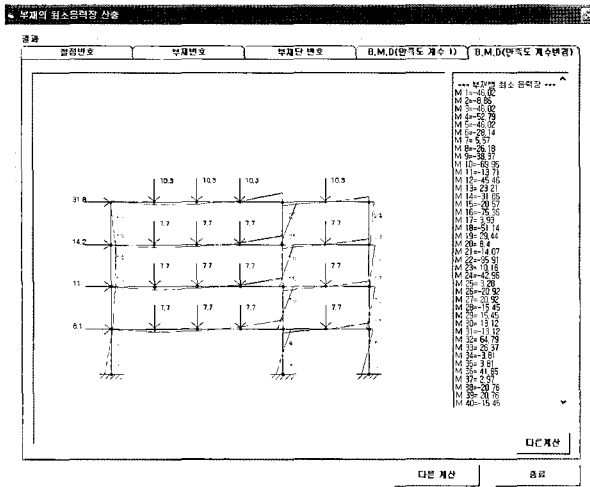
<그림 10> Step 6



<그림 11> Step 7



<그림 12> Step 8



<그림 13> Step 9

와 형상을 고려하여 부재를 지워가는 방식으로 골조의 형상을 만들게 된다. 부재의 단면성능을 가정할 필요가 없는 것이 특징이다.

<그림 6>의 Step 2에서는 골조의 경계조건 및 보의 축력과 기둥의 축력 소거 유무를 판단하게 된다.

<그림 7>의 Step 3에서는 골조에 작용하는 하중을 입력하게 된다.

<그림 8>의 Step 4에서는 작성된 골조의 일반역행렬을 구하여 부재의 응력장을 계산하는 과정이다. 또한, 이 과정에서 만족도 계수의 변경을 통해 설계자가 부재의 응력장을 쉽고 빠르게 제어할 수 있다.

<그림 9>의 Step 5에서는 부재의 절점번호 확인, <그림 10> Step 6에서는 부재번호 확인, <그림 11> Step 7에서는 부재단 번호 확인, <그림 12> Step 8에서는 만족도 계수 변경 전 휨모멘트도, <그림 13> Step 9에서는 만족도 계수 변경 후 휨모멘트도를 확인할 수 있다.

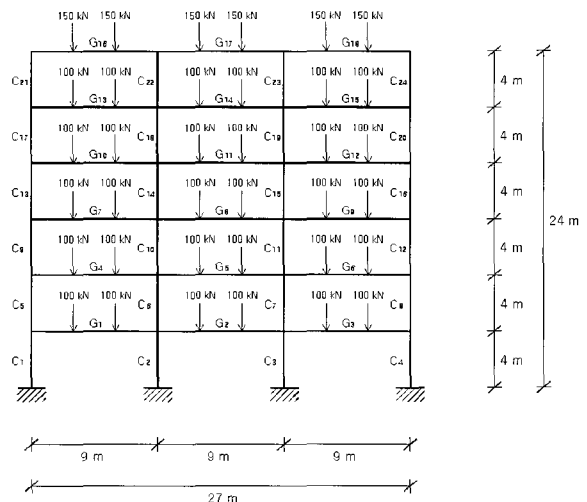
4. 예제 구조를 해석 및 비교 검토

본 연구에서 개발한 프로그램의 설계자 만족도를 변경하여 해석을 6 CASE 수행하고 결과를 범용프로그램인 마이다스젠의 결과(일반적으로 이용되는 부재로 가정)와 비교하였다.

해석 대상 구조물은 <그림 14>과 같이 지상 6층, 3스팬 철골 구조의 일반 사무실 건물이다. 각 층의 높이는 4m이며, 각 스팬의 길이는 9m이다. 또한 해석 시 고려한 하중은 범용프로그램과의 비교를 위해 연직하중만을 대상으로 하였다. 또한 기둥의 모멘트와 축력의 상관관계는 무시한다.

<그림 15>는 해석 구조물의 골조를 모델링 한 후 만족도 계수 변경 전의 일반 역행렬을 구한 후 만족도 계수를 변경하는 과정을 나타내고 있다.

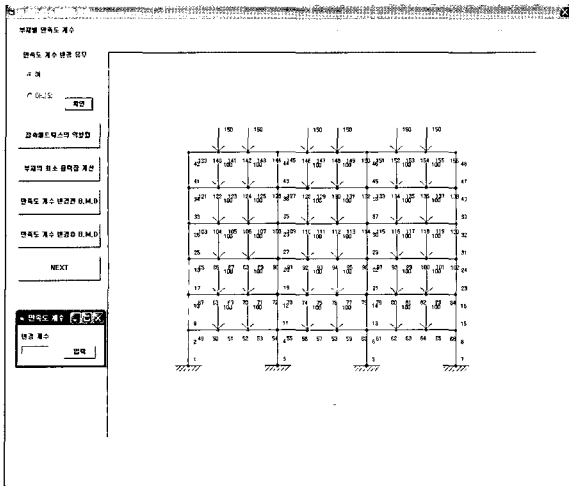
<그림 16>는 해석 구조물의 만족도 계수 변경 후 골조의 휨모멘트도를 나타내고 있다.



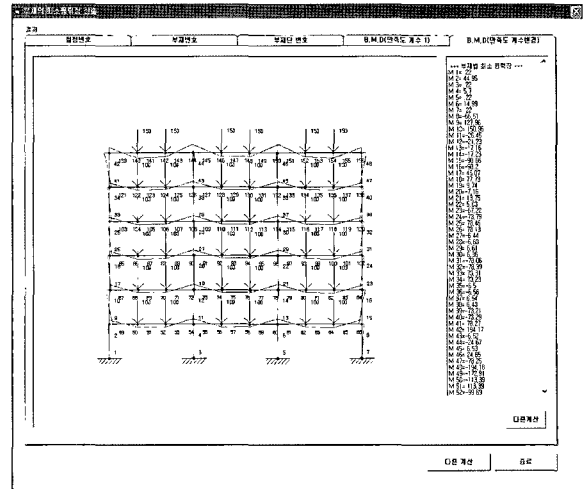
<그림 14> 단면도

<표 1> 만족도 계수에 따른 부재의 휨 모멘트

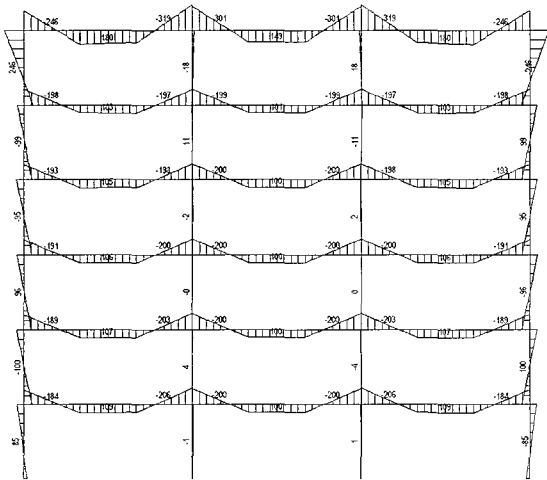
	만족도 계수		최대 휨모멘트(kN·m)							
			개발 프로그램						MIDAS/GEN	
	보	기둥	보		기둥			보	기둥	
	G4	C5	G4	C5	G7	C5	C6	C9	G4	C5
CASE 1	1.0	1.0	215	202	215	78	7	78	-	-
CASE 2	2.0	1.0	210	204	216	87	9	87	-	-
CASE 3	1.0	2.0	217	206	215	54	1	94	-	-
CASE 4	10	0.1	202	211	216	151	26	78	-	-
CASE 5	0.1	10	192	210	211	16	20	86	-	-
CASE 6	10	0.93	203	207	217	100	12	94	203	100



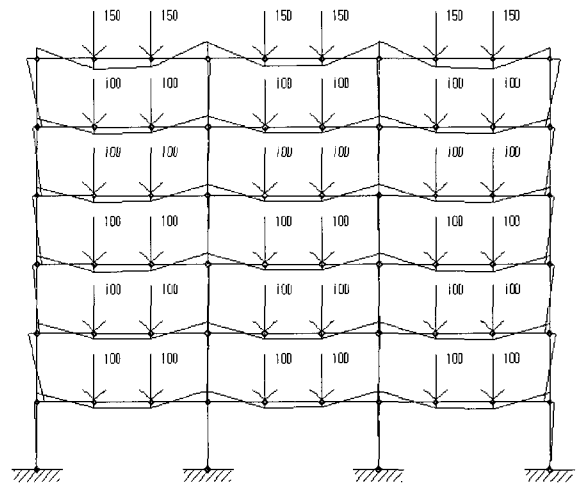
〈그림 15〉 골조의 형상 및 만족도 계수 변경



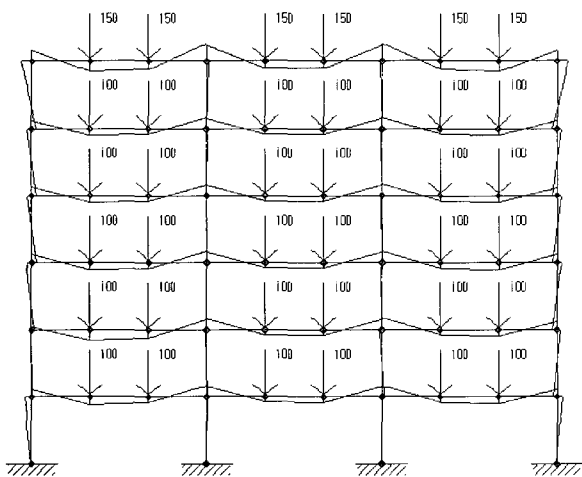
〈그림 16〉 만족도 계수 변경 후 ힹ모멘트도



〈그림 17〉 MIDAS/GEN 해석 결과



〈그림 18〉 CASE 4 해석 결과



〈그림 19〉 CASE 5 해석 결과

<표 1>에 각 해석 케이스별의 보와 기둥의 만족도 계수를 나타내고 있으며, 해석결과의 대표부재 최대 ힹ모멘트를 동시에 나타낸다. 또한 <그림 17>은 마이다스젠의 해석결과를, <그림 18>과 <그림 19>에 개발 프로그램의 CASE 4, CASE 5의 해석결과 값을 나타낸다.

<표 1>의 해석 케이스 6(만족도계수 보 10, 기둥 0.93)의 결과를 마이다스젠의 해석결과와 비교하면 대표부재의 최대 ힹ모멘트의 결과가 거의 일치하는 것을 알 수 있다. 개발 프로그램을 이용한 해석수순에 따르면, 종래의 허용응력설계시의 응력계산 작업과 거의 변동이 없으나, 사전에 부재의 단면성능을 가정할 필요가 없으며 또한 부재단면 변경시에 발

생하는 재해석 절차를 거치지 않아도 되는 것이 장점이다.

본 프로그램을 이용하면, 골조의 안전한계상태설계를 실시하여 부재단면을 결정하고 다음에 탄성해석을 행하여 사용한계상태의 검토를 실시하는 설계 프로세스에 적합하리라 사료된다.

5. 결 론

소성이론의 하계정리를 이용하여 구조설계자의 부재에 대한 만족도를 고려한 구조해석 프로그램을 개발하였다. 본 연구에서 제안한 프로그램을 이용하면 간단히 한계상태설계를 행할 수 있는 장점이 있으나 기동부재의 모멘트와 축력의 상관관계 등을 고려한 더욱 정밀한 프로그램 개발이 필요하다. 또한 수평력과 수직력을 동시에 작용시킨 예제는 추후에 보고하기로 한다.

감사의 글

본 연구는 2004년 건설핵심기술연구개발비(04핵심기술A03-03)의 연구결과의 일부로서, 건설교통부의 연구비 지원에 감사드립니다. 또한 본 연구와 관련한 이론은 공동필자인 이승재의 박사과정 지도교수인 당시 동경대학 大井謙一 교수가 최초로 제안한 이론이며 지도에 감사드립니다.

참고문헌

1. 大井謙一, “東京大学大学院建築構造学第13 極限解析講義ノート1.”, 1994
2. 日本建築学会, “鋼構造限界状態設計設計例”, 1990
3. 中桐滋, “離散化モデルと構造とシンセシス”, 培風館, 1992
4. 문태섭, 이명재, 오영석, 전대한 공역, “매트릭스 구조해석”, 기문당, 2002
5. 대한건축학회, “한계상태설계기준에 의한 강구조설계 예제집”, 2002
6. 김덕재, 이은택, “강구조 이론과 한계상태설계”, 기문당, 2000
7. 김상식, 윤성기, “철골구조설계”, 문운당, 2002
8. 田中 尚, “構造物の極限解析”, 彰国社, 1969
9. Hodge, P.G. “Plastic Analysis of Structure”, McGraw-hill, 1957
10. Neal, B.G., “The Plastic Method of Structural Analysis”, Chapman and Hall, 1977
11. (주) 마이다스아이티, “마이다스로 배우는 구조역학”, 기문당, 2003
12. 주경민, 박성완, 김민호, “Visual Basic Programming Bible Ver. 6.x”, (주)영진출판사, 2004