

# 국부좌굴과 횡좌굴을 고려한 냉간성형 C 형강보의 해석

## Analysis of Cold-Formed Steel Beams Considering Local Buckling and Lateral Buckling

전 재 만\*  
Jeon, Jae-man

이 재 홍\*\*  
Lee, Jae-hong

### 요 약

본 논문은 횡하중을 받는 냉간성형 C 형강보의 응력해석에 관해 다루고 있다. 냉간형강 보에 가해지는 각 하중 레벨에서의 응력을 계산하여 국부좌굴과 횡좌굴을 고려하여 구조해석을 실시하였다. 해석모델은 박벽보의 기본이론에 의해 유도되었으며 1차원 보요소 유한요소해석을 통하여 수치해석을 하였다. 수치해석결과는 AISI 규준과 비교되었으며, 본 연구에서 제안된 해석모델이 냉간형강보의 처짐뿐 아니라 응력도 매우 정확히 예측함을 알 수 있었다.

### Abstract

The stress analysis of cold-formed channel section steel beams under transverse load is presented. The local buckling as well as the lateral buckling effects are included in the analysis. The analytical model is developed based on the thin-walled beam theory, and a one-dimensional finite element model is formulated to solve the analytical model. Numerical results are compared with AISI code. It shows that the proposed model is appropriate for predicting of stress as well as deflection of the cold-formed channel section beam.

**키워드:** 냉간성형강보, 국부좌굴, 횡좌굴, 유한요소해석

**Keywords:** Cold-formed steel beam, Local buckling, Lateral buckling, finite element method

## 1. 서 론

냉간성형강이란 0.8mm에서 6mm정도의 얇은 강판을 상온에서 압출성형하여 사용 목적에 맞게 일정 단면 형상을 가지도록 만든 구조부재로서 냉간성형강이 가진 가장 큰 장점은 중량비 강도가 일반 열간성형강에 비해 상당히 우수하여 구조물의 전체 무게를 감소시킬 수 있다는 것이다. 이러한 냉간성형강은 단면이 세장하기 때문에 좌굴로 인하여 붕괴되는 경우가 많으므로 좌굴 현상은 구조 설계에 있어서 중요한 의미를 갖는다. 미국의 경우에 1946년 처음으로 AISI[1]에 의해 냉간성형강 설계기준이 마련되었으며, 국내에서는 1999년에 냉간성형강 구조설계

기준 및 해설[2]이 제정되었으며, 현재 건축물의 주요부재로 이용이 증가하는 추세이다.

1987년에 Hjelmstad[3]는 수직하중을 받는 박벽보의 뒤틀림 해석에 있어 비탄성, 탄소성 거동에 대한 연구를 수행하였다. 1994년 Kavanagh<sup>4)</sup>와 Ellifritt<sup>4)</sup>는 단순지지된 냉간성형강 C형강보에 있어 비틀림에 대해서만 지지된 여러 경우에 대한 실험연구를 수행하였다. 최근에 국부좌굴을 고려한 냉간형강보의 응력해석 연구가 수행된 바 있다<sup>5)</sup>. 보의 횡좌굴 문제에 대하여 1899년에 Michell<sup>6)</sup>은 처음으로 보의 횡좌굴에 관한 논문을 제시 하였고, 1910년에 Timshenko와 Gere<sup>7)</sup>은 보의 횡좌굴에 대한 기본적인 미분방정식을 유도하였다. 횡지지를 갖거나 지점사이의 거리가 작을 경우 C형강의 극한강도는 소성모멘트에 의해 결정된다. 그러나 만일 횡지지가 충분하지 못 할

\* 3D구조설계사무소

\*\* 정회원, 세종대 건축공학과 부교수

Tel: 02-3408-3287 E-mail: jhlee@sejong.ac.kr

경우 보는 탄성 또는 비탄성 영역에서 횡좌굴(lateral buckling)에 의해 항복하게 된다.

현재 국내 설계기준에서는 냉간성형강의 휨 해석에 있어 단면 형태에 따른 최대 허용응력만을 계산하도록 규정되어 있으며, 그 전까지의 응력상태 등에 대해 알 수 없게 되어있다. 따라서 단면이 횡좌굴이 일어날 때의 유효단면 계수와 단면이 항복 응력에 도달한 경우의 유효단면계수의 차이가 나타날 수 있다.

본 논문에서는 냉간성형강 중 가장 널리 사용되는 C형강에 있어서 각 하중레벨에서 응력을 계산하여 국부좌굴 및 횡좌굴을 고려하여 해석하였으며, 이를 AISI의 규준과 비교를 해보았다. 또한, 각 하중레벨에서의 응력을 구하여 냉간성형 C형강보가 항복응력에 도달하기까지의 각 하중레벨에서의 단면과 응력의 변화를 추적하였다.

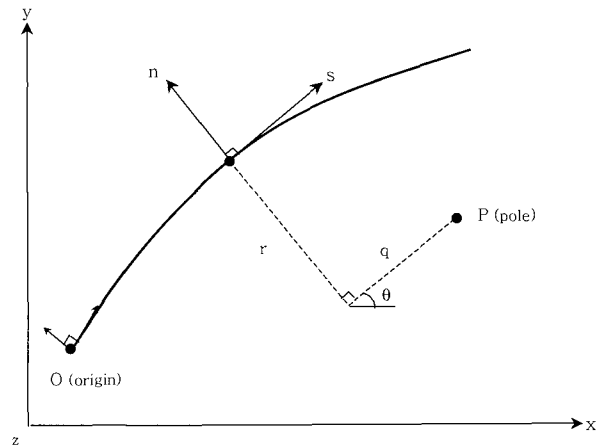
## 2. 변위장 및 변형률

본 논문에서 판요소의 구성방정식을 유도하기 위한 이론적 전개는 1961년 Vlasov<sup>8)</sup>와 1981년 Gjelsvik<sup>9)</sup>에 의해 정립된 고전적인 박벽보 이론(Thin-walled beam theory)으로부터 출발한다. 이로부터 에너지법에 근거하여 변분형태를 구한 후, 응력-변형도 관계식에 적용하여 판요소의 구성방정식을 유도하였다.

본 연구의 이론전개를 위해 다음과 같은 3종류의 좌표계를 사용하였다. 첫째, 보의 단면이 x축과 y축으로 이루어져 있으며 z축을 보의 길이 방향으로 둔 직교 카테시안 좌표계(orthogonal Cartesian coordinate system)이다. 둘째, 평판의 국부좌표(local plate coordinate)로서, (n, s, z)로 구성되어 있는 외형좌표계(contour coordinates)이다. 여기서 n축은 평판요소로부터 직각방향이며, s축은 단면의 등고선상을 따라 형성되는 좌표이다. 셋째, 좌표계는 원점 O로부터 일정거리 떨어진 임의의 점에서의 접선방향 좌표이다. 또한 P점은 비틀림 중심을 나타내며 일반적으로 전단중심이 된다. 이들 좌표계는 서로 연관되어 있으며 이는 <그림 1>과 같다.

본 연구에서는 다음과 같은 기본 가정이 사용되었다.

- 1) 평판요소의 두께방향으로는 변형이 일어나지



<그림 1> 보와 평판요소의 좌표계

않는다. ( $\epsilon_n = 0$ )

- 2) 평판내 전단변형은 일어나지 않는다. ( $\gamma_{sz} = 0$ )
- 3) 고전판 이론의 Kirchhoff-Love 가정은 평판요소와 보 전체에 있어 모두 적용된다.

기본가정 1에 의해 등고좌표계상의 임의의 점에서 중립면에 발생하는 변위장  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  는 P 점에서의 x, y 방향의 변위장 U, V 와 P 점에 대한 회전각  $\phi$ 에 관해 수식(1a), (1b) 와같이 나타낼 수 있다. 그리고 z방향의 변위  $\bar{w}$  는 기본가정 2에 의해 수식 (1c)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{u}(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \Phi(z) q(s) \quad (1a)$$

$$\bar{v}(s, z) = U(z) \cos \theta(s) + V(z) \sin \theta(s) + \Phi(z) r(s) \quad (1b)$$

$$\bar{w}(s, z) = W(z) - U'(z)x(s) - V'(z)y(s) - \Phi'(z)\omega(s) \quad (1c)$$

위 식에서  $\omega$ 는 뒤틀림 상수로써 다음과 같이 정의된다.

$$\omega(s) = \int r(s) ds \quad (2)$$

단면상의 임의의 점에서의 변위성분 u, v, w는 중립면의 변위장에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u(s, z, n) = \bar{u}(s, z) \quad (3a)$$

$$v(s, z, n) = \bar{v}(s, z) - n \frac{\partial \bar{u}(s, z)}{\partial s} \quad (3b)$$

$$w(s, z, n) = \bar{w}(s, z) - n \frac{\partial \bar{u}(s, z)}{\partial z} \quad (3c)$$

위의 변위장과 기본가정3에 근거해서 구한 최종 적 변형률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon_z = \epsilon_z' + (x + n \sin \theta) \kappa_y \quad (4a)$$

$$+ (y - n \cos \theta) \kappa_x + (\omega - nq) \kappa_\omega$$

$$\gamma_{sz} = n \kappa_{sz} \quad (4b)$$

여기서,

$$\epsilon_z' = W' \quad (5a)$$

$$\kappa_x = -V'' \quad (5b)$$

$$\kappa_y = -U'' \quad (5c)$$

$$\kappa_\omega = -\Phi'' \quad (5d)$$

$$\kappa_{sz} = 2\Phi' \quad (5e)$$

### 3. 판요소의 구성방정식

구조체의 전체 포텐셜 에너지(total potential energy)는 다음과 같다.

$$\Pi = U^* + V^* \quad (6)$$

여기서  $V^*$ 는 외부 하중  $q_y$ 에 의한 일로 다음과 같이 변분값을 나타낼 수 있다.

$$\delta V^* = \int_0^l (q_y \delta V + t \delta \phi) dz \quad (7)$$

변형률 에너지(strain energy)  $U^*$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있으며,

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_z \epsilon_z + \sigma_{sz} \gamma_{sz}) dV \quad (8)$$

여기에 수식 (4a), (4b)를 대입하여 변분값을 구하면 다음과 같다.

$$\delta U = \int_0^l \{ N_z \delta \epsilon_z' + M_y \delta \kappa_y + M_x \delta \kappa_x + M_\omega \delta \kappa_\omega + M_t \delta \kappa_{sz} \} dz \quad (9)$$

여기서,  $N_z$ 는 보의 축력을 나타내고  $M_x, M_y, M_\omega, M_t$ 는 각각  $x, y$  방향의 휨모멘트, 뒤틀림모멘트, 비틀림모멘트를 나타내며 다음과 같이 정의 된다.

$$N_z = \int_n \int_s \sigma_z dsdn \quad (10a)$$

$$M_y = \int_n \int_s \sigma_z (x + n \sin \theta) dsdn \quad (10b)$$

$$M_x = \int_n \int_s \sigma_z (y - n \cos \theta) dsdn \quad (10c)$$

$$M_\omega = \int_n \int_s \sigma_z (\omega - nq) dsdn \quad (10d)$$

$$M_t = \int_n \int_s \sigma_{sz} n dsdn \quad (10e)$$

따라서, 수식 (6)에 의해 전체 변분형태를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$0 = \delta \Pi \quad (11)$$

$$= \int_0^l \{ N_z \delta W' - M_y \delta U'' - M_x \delta V'' - M_\omega \delta \Phi'' + 2 M_t \delta \Phi' + q_y \delta V + t \delta \phi \} dz$$

아래의 응력-변형률 관계식으로부터

$$\sigma_z = E \epsilon_z \quad (12a)$$

$$\sigma_{sz} = G \gamma_{sz} \quad (12b)$$

수식 (10a), (4a)와 (12a)를 이용하여 축력  $N_z$ 를 일반화된 변형률 ( $\epsilon_z', \kappa_y, \kappa_x, \kappa_\omega, \kappa_{sz}$ )에 대해 나타내면 다음과 같다.

$$N_z = E \int_n \int_s \{ \epsilon_z' + (x + n \sin \theta) \kappa_y + (y - n \cos \theta) \kappa_x + (\omega - nq) \kappa_\omega \} dsdn \quad (13)$$

같은방법으로 나머지 모멘트들 ( $M_y, M_x, M_\omega, M_t$ )도 일반화된 변형률에 대해 나타낼 수 있어, 판요소의 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ M_\omega \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_y & S_x & S_\omega \\ & I_y & I_{xy} & I_{x\omega} \\ & & I_x & I_{y\omega} \\ sym & & & I_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z^* \\ \kappa_y \\ \kappa_x \\ \kappa_\omega \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$M_t = GJ^k_{sz} \quad (15)$$

여기서,

$$A = \int_s t \, ds \quad (16a)$$

$$S_y = \int_s tx \, ds \quad (16b)$$

$$S_x = \int_s ty \, ds \quad (16c)$$

$$S_\omega = \int_s t\omega \, ds \quad (16d)$$

$$I_y = \int_s t \left[ x^2 + \frac{t^2}{12} \sin^2 \Theta \right] ds \quad (16e)$$

$$I_x = \int_s t \left[ y^2 + \frac{t^2}{12} \cos^2 \Theta \right] ds \quad (16f)$$

$$I_{xy} = \int_s t \left[ xy - \frac{t^2}{12} \sin \Theta \cos \Theta \right] ds \quad (16g)$$

$$I_{x\omega} = \int_s t \left[ x\omega - \frac{qt^2}{12} \sin \Theta \right] ds \quad (16h)$$

$$I_{y\omega} = \int_s t \left[ y\omega + \frac{qt^2}{12} \cos \Theta \right] ds \quad (16i)$$

$$I_\omega = \int_s t \left[ \omega^2 + \frac{q^2 t^2}{12} \sin^2 \Theta \right] ds \quad (16j)$$

$$J = \int_s \frac{t^3}{3} ds \quad (16k)$$

앞서 구한 식 (14), (15)으로부터 지배방정식을 유도하면 윗식은 임의의 형태의 단면에 적용 가능하며, 만약  $x$ 와  $y$ 가 주축이고  $\omega$ 가 전단 중심에 대한 뒤틀림 값이라면  $\sqsubset$ 형장과 같은 단면형태일 경우 각각의 값들은 다음과 같이 나타난다.

$$S_y = S_x = S_\omega = I_{xy} = I_{x\omega} = I_{y\omega} = 0 \quad (17)$$

$$E[AW'' + S_y U'' + S_x V'' + S_\omega \Phi''] = 0 \quad (18a)$$

$$E[S_y W'' + I_y U'' + I_{xy} V'' + I_{x\omega} \Phi''] = 0 \quad (18b)$$

$$E[S_x W'' + I_{xy} U'' + I_x V'' + I_{y\omega} \Phi''] + q_y = 0 \quad (18c)$$

$$E[S_\omega W'' + I_{x\omega} U'' + I_{y\omega} V'' + I_\omega \Phi''] + 2GJ\Phi'' + t = 0 \quad (18d)$$

하중의 초기단계에서는 수식 (17)과 같이 구성방

정식의 연계강성들이 전부 사라지므로 전단중심에 수직력을 받는 보의 휨은 수식(18c)만으로 나타낼 수 있다. 그러나 하중이 증가됨에 따라 응력이 증가하여 보의 상부플랜지가 국부좌굴을 일으키고, 따라서 상부플랜지는 유효폭만 남게 된다. 이 상태에서는 단면이 더 이상 대칭이 아니며, 이에 따라 지배방정식 18(a)~(d)를 모두 연계해 해석해야 한다. 더욱 하중이 증가하게 되면 웨브의 일부도 유효폭만 남고 해석에서 제외해야 하므로 단면의 비대칭성이 더욱 두드러지게 된다.

### 4. 국부좌굴해석

냉간성형강의 각각의 판요소는 일반적으로 폭두께비가 상당히 크기 때문에 항복점에 도달하기 훨씬 전에 먼저 국부좌굴이 발생한다. 또한, 일단 국부좌굴이 발생한 후에도, 판 좌굴 후 이론에 의해 유효폭 개념<sup>1)2)</sup>이 도입되어 계속 하중을 받을 수 있다.

국내 규준에서는 아래와 같은 방법으로 냉간성형  $\sqsubset$ 형장의 유효폭을 제안하고 있다<sup>2)</sup>.

#### 4.1 압축축 플랜지

균일 압축응력을 받는 평판의 유효폭  $b$ 는 다음식에 의해 산정한다.

$$b = w \quad (\lambda \leq 0.673) \quad (19a)$$

$$b = \rho w \quad (\lambda > 0.673) \quad (19b)$$

윗식에서  $w$ 는 평판의 폭을 나타내는 것이고, 각각의 값들은 다음과 같다.

$$\rho = (1 - 0.22 / \lambda) / \lambda \leq 1 \quad (20a)$$

$$\lambda = \frac{1.052}{k} \left( \frac{w}{t} \right) \sqrt{\frac{f_{max}}{E}} \quad (20b)$$

$t$ 는 평판의 두께를 나타내며,  $E$ 와  $f_{max}$  각각 탄성계수와 최대응력을 나타낸다. 또한, 균일 압축응력을 받는 휨재의 비강절판 요소인 압축축 플랜지의 좌굴계수  $k$ 값은 0.43으로 정해놓고 있다.

### 4.2 웨브

휨에 의하여 등변응력을 받는 강절판요소에서 압축응력이 생기는 평판부분의 유효폭은 아래와 같이 산정된  $b_1$ 과  $b_2$ 를 합한 값으로 한다.

$$b_1 = b/(3 - \Psi) \tag{21a}$$

$$b_2 = b/2 \quad (\Psi \leq -0.236) \tag{21b}$$

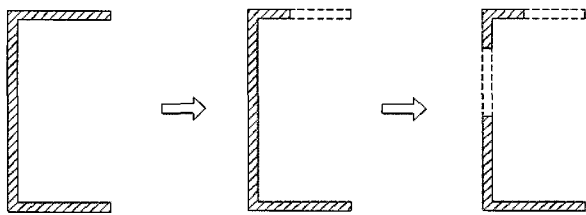
$$b_2 = b - b_1 \quad (\Psi > -0.236) \tag{22c}$$

윗식에서  $b$ 는 다음과 같이 산정한  $k$ 와  $f$ 를 식 (19)과 (20)에 적용하여 산정한다.

$$k = 4 + 2(1 - \Psi)^3 + 2(1 - \Psi) \tag{22a}$$

$$\Psi = f_2 / f_1 \tag{22b}$$

여기서,  $f_1$ 과  $f_2$ 는 각각 웨브에 발생하는 최대 압축응력도와 최대 인장응력도를 뜻한다. 국내 표준<sup>2)</sup>에 의하면 강도계산시에는  $f_{max}$  값을 항복응력( $F_y$ )으로 하여 유효폭을 구하며, 처짐 계산시에는  $f_{max}$ 를 하중 상태에 따른 응력값으로 계산하도록 규정되어 있다. 본 논문에서는 처짐을 계산할 때의  $f_{max}$ 를 채택하여 하중이 증가함에 따라 유효폭이 변하는 과정을 계산하였다<그림 2>.



<그림 2> 하중증가에 따른 유효폭 변화

## 5. 횡좌굴 해석

본 논문은 냉간성형강 C형강 단순지지보에 등분포 하중이 작용 할 때 AISI<sup>1)</sup>의 표준식으로 횡좌굴 공칭 모멘트  $M_n$ 를 구하여 이를 응력으로 해석을 하였다.

$$M_n = S_c F_c \tag{23}$$

윗식에서  $S_c$ 는 국부좌굴을 고려하여 단면이 항복 응력에 도달하였을 때 유효단면계수를 나타낸다. 표준에서의  $S_c$ 는  $x$ 축 휨 응력만을 고려하였으며,  $F_c$ 는 탄성 혹은 비탄성 횡좌굴 응력을 나타낸다. 또한,  $M_c$ 는 탄성과 비탄성 영역에서의 거동이 다르므로 탄성 횡좌굴 응력인  $F_e$ 값에 따라 다음과 같은 범위에서의 해석을 달리 해야 한다.

$$F_c = F_y \quad (F_e \geq 2.78F_y) \tag{24a}$$

$$= \frac{10}{9} F_y \left(1 - \frac{10F_y}{36F_e}\right) \quad (2.78F_y > F_e > 0.56F_y) \tag{24b}$$

$$= F_e \quad (F_e \leq 0.56F_y) \tag{24c}$$

여기서,  $F_y$ 는 전체단면에 대한 항복응력을 나타내며 탄성 횡좌굴 응력인  $F_e$ 는 아래와 같은 식으로 나타낸다.

$$F_e = \frac{C_b r_0 A}{S_f} \sqrt{\sigma_{ey} \sigma_t} \tag{25}$$

윗식에서  $r_0$ 는 전단중심에 대한 단면극2차반경이며,  $A$ 는 총단면적을 나타낸다.  $S_f$ 는 전체단면계수를 나타내며  $C_b$ 는 모멘트 상관계수로서 등분포하중을 받는 단순지지보에 대하여 1.13으로 하였다.

$$\sigma_{ey} = \frac{\pi^2 E}{(K_y L_y / r_y)^2} \tag{26a}$$

$$\sigma_t = \frac{1}{A r_0^2} \left[ GJ + \frac{\pi^2 E I_w}{(K_t L)^2} \right] \tag{26b}$$

$$r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + x_0^2} \tag{26c}$$

여기에서,  $K_y$ 와  $K_t$ 는  $y$ 축에 대한 휨과 비틀림에 대한 유효길이 계수를 나타내며,  $L_y$ 와  $L_t$ 는  $y$ 축에 대한 휨과 비틀림에 대한 압축부재 비지지간 거리를 나타낸다. 그리고  $x_0$ 는 전단 중심으로부터 대칭축에 직각인 축을 따라서 도심까지 거리(-부호)를 나타내며,  $r_y$ 와  $r_x$ 는 주축의 중심에 대한 단면의 반경응 나타낸다.

## 6. 유한요소 해석

전장에서 개발된 박막 복합재 기둥의 좌굴에 대

한 기둥 이론은 Reddy<sup>10)</sup>의 유한 요소법에 의해 모델화 되었다. 변위들은 라그랑지안 보간함수  $[\psi_i]$ 와 허마이트 3차 보간함수  $[\psi_j]$ 를 이용하여 아래와 같이 절점변위들로 나타낼 수 있다. 위의 지배방정식 (18)을 라그랑지안 보간함수와 허마이트 3차 보간함수를 이용하여 해석하기 위해 본 연구에서는 유한요소법을 사용하였다.

모델화하면 각 변위  $W, U, V, \Phi$  를 다음과 같이 절점 변위들로 나타낼 수 있다.

$$W = \sum_{j=1}^n \omega_j \psi_j \quad (27a)$$

$$U = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (27b)$$

$$V = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j \quad (27c)$$

$$\Phi = \sum_{j=1}^n \phi_j \psi_j \quad (27d)$$

윗 식을 식 (11)의 변분 형태식에 대입하면 한 요소의 유한요소 모델은 다음과 같다.

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (28)$$

여기서,  $[K]$ 는 요소 강성 매트릭스(stiffness matrix)를 나타내는 것이고,  $\{f\}$ 는 외부 하중값을 나타내는 것으로 다음과 같이 나타낸다.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ \text{sym.} & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (29a)$$

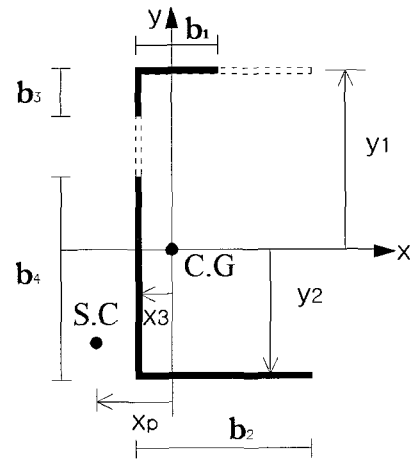
$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (29b)$$

## 7. 응력계산

유한요소 해석에 의해 각 절점에서의 변위값이

구해지면 수식(4)와 (12)를 적용하여 유효폭만 남아 있는 단면상의 각 절점에서의 응력값을 구할 수 있다 <그림 3>.

<그림 3>에서  $y_1, y_2$ 는 각각  $x$ 축으로부터 상부와 하부 플랜지까지의 거리이고,  $x_3$ 는  $y$ 축으로부터 웨브까지의 거리를 나타내는 것이다. 또한  $x_p$ 는 도심으로부터 전단중심까지의 거리를 나타낸다.



<그림 5> 단면 각 지점에서의 응력

### 7.1 상부 플랜지

앞에서 유도했던 변형률식 (4)에서 각각 응력 계산에 필요한 상수값들을 해당요소에서 계산하면 상부 플랜지의 응력계산에 필요한 각각의 값들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = x_3 - y_1 + s \quad (30a)$$

$$y = y_1 \quad (30b)$$

$$q = x_3 - x_p - y_1 + s \quad (30c)$$

$$\omega = y_1(x_3 - x_p + y_1 - s) \quad (30d)$$

여기서,

$$y_1 \leq s \leq y_1 + b_1 \quad (31)$$

위의 값들을 변형률식 (4)에 대입하여 변형률값을 구하고, 다시 수식 (12)의 응력-변형률식에 대입하여 정리하면 다음과 같이 외형좌표 S를 변수로 하는 상부플랜지의 응력식을 유도할 수 있다.

$$\sigma_z = E \left[ \left\{ \dot{W} - (x_3 - y_1)U'' - (y_1 - n)V'' - [(y_1 - n)(x_3 - x_p) + (y_1 + n)y_1] \Phi'' \right\} - \left\{ U'' + (y_1 + n)\Phi'' \right\} s \right] \quad (32)$$

$$y_1 - b_3 \leq s \leq y_1 \quad (37)$$

$$y_2 \leq s \leq y_2 + b_4 \quad (38)$$

### 7.2 하부 플랜지

상부 플랜지와 동일한 방법으로 변형률식 (4)에서 각각 응력 계산에 필요한 상수값들을 해당요소에서 계산하면 하부 플랜지의 응력계산에 필요한 각각의 값들을 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$x = x_3 + y_2 - s \quad (33a)$$

$$y = y_2 \quad (33b)$$

$$q = x_3 - x_p + y_2 - s \quad (33c)$$

$$\omega = y_2(x_3 - x_p - y_2 + s) \quad (33d)$$

여기서,

$$y_2 - b_2 \leq s \leq y_2 \quad (34)$$

위의 값들을 변형률식 (4)에 대입하여 변형률값을 구하고, 다시 수식 (12)의 응력-변형률식에 대입하여 정리하면 다음과 같이 외형좌표 S를 변수로 하는 하부플랜지의 응력식을 유도할 수 있다.

$$\sigma_z = E \left[ \left\{ \dot{W} - (x_3 + y_2)U'' - (y_2 - n)V'' - [(y_2 - n)(x_3 - x_p) - (y_2 + n)y_2] \Phi'' \right\} + \left\{ U'' - (y_2 - n)\Phi'' \right\} s \right] \quad (35)$$

### 7.3 웨브

웨브의 응력계산에 필요한 변형률식 (4)에서의 각각의 값들을 계산하면 다음과 같이 나타난다.

$$x = x_3 \quad (36a)$$

$$y = s \quad (36b)$$

$$q = s \quad (36c)$$

$$\omega = (x_3 - x_p)s \quad (36d)$$

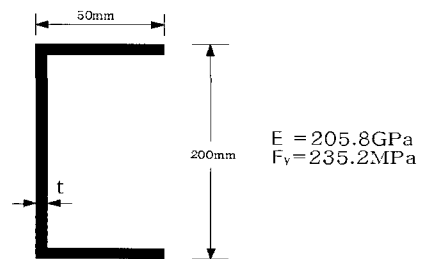
여기서, 상부 웨브는 수식(37), 하부 웨브는 수식(38)과 같다.

위의 값들을 변형률식 (4)에 대입하여 변형률값을 구하고, 다시 수식 (12)의 응력-변형률식에 대입하여 정리하면 다음과 같이 외형좌표 S를 변수로 하는 하부플랜지의 응력식을 유도할 수 있다.

$$\sigma_z = E \left[ \left\{ \dot{W} - (x_3 + n)U'' \right\} - \left\{ V'' + (x_3 - x_p - n)\Phi'' \right\} s \right] \quad (39)$$

## 8. 수치해석 예제

유한 요소법을 사용하였으며, 예제는 표1의 각각의 경우에 따라서 수식(18)의 지배방정식을 변분의 원리에 의해 모델을 대비하여 두께와 스패의 길이를 변화시켰으며 면과 물성치는 <그림 4>와 같다. 이와 같은 단면에서 등분포 하중을 점차 증가시키며 유효단면 형태의 변화와 각각의 상태에서 응력값을 계산하여, 단면이 항복응력에 도달 할 때까지 하중을 주었으며, 동시에 횡좌굴의 응력값을 계산하였다. 이를 AISI 규준식에 의한 값과 비교하였다. 또한 x축 휨 응력만을 고려한 경우와 x축 휨 응력과 y축 휨 응력과 뒤틀림 응력을 모두 고려한 두 가지 경우에 대하여 수치해석을 하였다.



<그림 4> 수치해석 예제

<표 1> x축 휨 응력만을 고려한 수치해석 예제

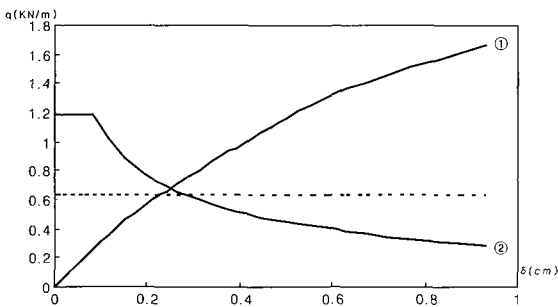
	L=500cm	L=300cm	L=100cm	L=50cm
t=1 mm	case1	case2	case3	case4
t=2 mm	case5	case6	case7	case8

<표 2> x축 휨 응력 외에 모든 응력을 고려한 수치해석 예제

	L=500cm	L=300cm	L=100cm	L=50cm
t=1 mm	case9	case10	case11	case12

수치해석의 결과는 하중-처짐 곡선으로 나타내었으며, 결과에서의 처짐은 단계별 하중의 최대 처짐이다. 하중-처짐 곡선은 단면이 항복에 도달하였을 때까지 나타내었으며, 각 하중 단계에서의 응력을 구하여 유효단면적을 찾은 후 횡좌굴 응력에 의한  $q_{cr}$ 을 구하였다. 점선으로 표시된  $q_n$ 은 AISI 규준식에 나와있는 공칭 횡좌굴 모멘트를 하중 값으로 치환한 것으로서 x축 휨 응력만을 고려했을 경우의 전체 유효단면적에 의한 횡좌굴 값이다. 직선으로 표시된 선은 본 논문에서 국부좌굴과 횡좌굴을 동시에 고려하여 구한 각 하중레벨에서의  $q_{cr}$ 을 나타내며, 이 결과를 AISI 규준식에 의한  $q_n$  값과 비교를 하였다. 마지막으로 그림에서의 x표시 점은 보의 항복점을 나타낸다.

<그림 5>의 case2의 하중-처짐 곡선을 보면 비선형 거동을 하는 것을 알 수가 있는데 이것은 국부좌굴의 영향으로 단면의 일부분이 유효폭에서 제외되었기 때문에 비선형 거동을 하게 되는 것이다. case2의 경우에는 단면이 항복 응력에 도달하기 이전에 횡좌굴이 일어나는 것을 알 수가 있으며 이때의 횡좌굴은 탄성 영역에서 일어났다. 따라서 case2의 결과에서는 단면이 항복응력에 도달하기 이전에 횡좌굴과 국부좌굴이 생긴 것을 알 수 있다. case2에서 나타나고 있는 횡좌굴 값은 AISI 규준에서 제시하고 있는 공칭 횡좌굴 응력값과 약간의 차이를

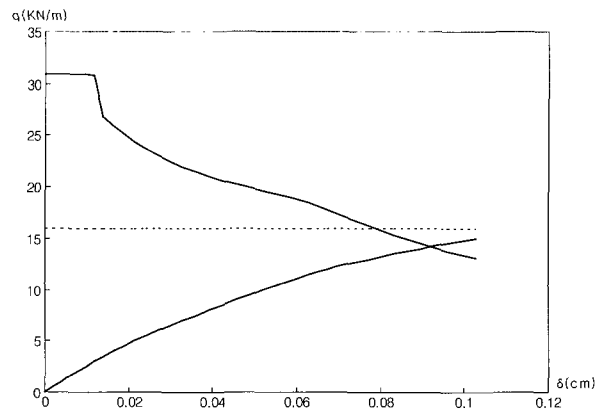


<그림 5> case2의 하중-처짐 곡선

나타내고 있다. 이것은 AISI의 규준에서는 단면이 항복에 도달할 경우의 유효단면적을 구하여 공칭 횡좌굴 값을 구하였지만 실제로 case2의 결과에서와 같이 단면이 항복 응력에 도달하기 이전 횡좌굴을 일으키는 것을 알 수 있다. 따라서 결과에서 나타나고 있는 본 논문에서의 횡좌굴 값과 규준에서의 횡좌굴 값의 차이는 유효단면적의 차이로 인하여 생기는 것이다.

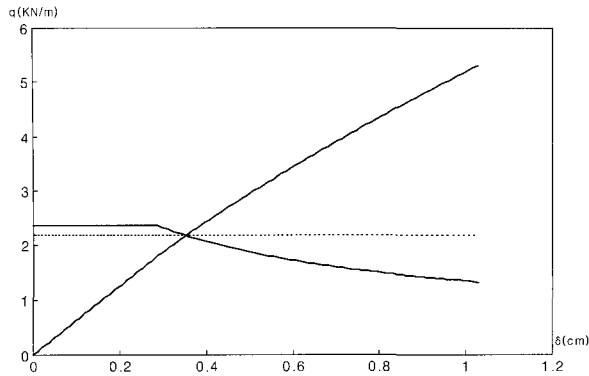
<그림 6>의 case3의 경우는 case1 보다 스패의 길이가 더 짧은 경우의 결과이다. 단면이 항복 응력에 도달하기 이전에 횡좌굴을 일으키는 것을 알 수 있으며 단면이 짧아지게 되면 비탄성 횡좌굴을 하게 된다. 또한 하중-처짐 곡선을 보면 국부좌굴이 발생하여 비선형 거동을 하게 되며 플랜지와 웨브의 일부분이 유효폭에서 제외되었다. 규준에서는 단면이 항복 응력에 도달하기 이전에 횡좌굴이 일어나지 않는 것으로 하였으나 실제로 단면이 항복 응력에 도달하기 이전에 횡좌굴을 일으키는 것을 알 수 있으며 이것은 유효단면의 차이로 인하여 나타나는 것이다.

case6의 하중-처짐 곡선은 <그림 7>와 같으며, 이는 앞의 경우에서와 다르게 더 두꺼운 단면의 결과이다. 단면이 항복 응력에 도달하기 이전에 횡좌굴이 발생하는 것을 알 수 있으며 길어진 부재의 길이로 인하여 탄성 횡좌굴을 하게 된다. 하중-처짐 곡선은 비선형 거동을 하게 되지만 플랜지의 일부분만이 유효폭에서 제외되었다. case6의 결과에서는 횡좌굴이 국부좌굴보다 더 지배적인 것을 알 수 있다.



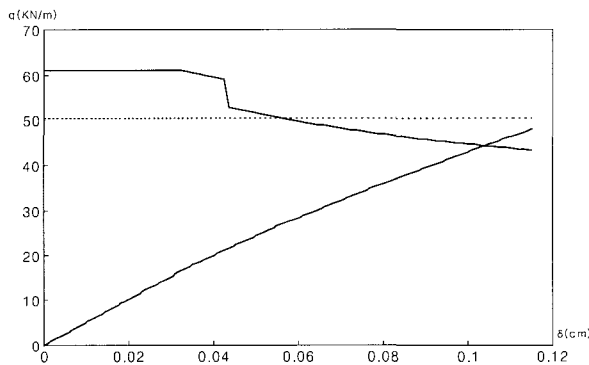
<그림 6> case3의 하중-처짐 곡선





<그림 7> case6의 하중-처짐 곡선

마지막으로 case4의 결과는 <그림 8>과 같으며, 이 경우에는 보의 길이가 짧고 두꺼운 단면의 결과이다. 비탄성 횡좌굴을 하게되며 플랜지의 일부분만이 유효폭에서 제외되었다.



<그림 8> case7의 하중-처짐 곡선

<표 4> 얇은 단면의 유효단면적 비

t=1	500	300	100	50
$\frac{(S_{eff})_T}{S_{ful}}$	0.5182	0.5182	0.5182	0.5182
$\frac{(S_{eff})_L}{S_{ful}}$	0.9556	0.8085	0.5441	0.5182

<표 5> 두꺼운 단면의 유효단면적 비

t=2	500	300	100	50
$\frac{(S_{eff})_T}{S_{ful}}$	0.8250	0.8250	0.8250	0.8250
$\frac{(S_{eff})_L}{S_{ful}}$	1	0.9695	0.8383	0.8250

앞의 예제들의 결과에서 횡좌굴이 일어날 때의

나타나는 유효단면적이 차이를 전체단면에 대한 비로 나타내면 위의 표와 같이 나타낼 수 있다.  $(S_{eff})_T$ 은 단면이 항복 응력에 도달했을 경우 x축 휨 응력만을 고려한 유효단면 계수이며  $(S_{eff})_L$ 은 본 논문에서 나타내고 있는 횡좌굴이 일어났을 경우의 유효단면계수를 말한다. 위의 표를 바탕으로 횡좌굴이 일어날 때의 유효단면적에 대한 식을 다음과 같이 제시 할 수 있다.

$$\beta_L = \frac{(S_{eff})_L - (S_{eff})_T}{1 - (S_{eff})_T} \quad 0 \leq \beta_L \leq 1 \quad (40)$$

위 식에서는 횡좌굴이 일어났을 때의 유효단면적의 값으로 횡좌굴의 영향을 알 수 있으며  $\beta_L$  값이 1에 가까워질수록 횡좌굴이 국부좌굴보다 더 지배적인 것을 나타나게 되면 이와 반대로  $\beta_L$  값이 0에 가까워질수록 횡좌굴은 일어나지 않는 것이 된다.

## 9. 결 론

본 연구에서는 하중을 점차 증가하여 각 하중레벨에서의 응력과 단면의 변화를 추적하였으며 국부좌굴과 횡좌굴을 고려한 냉간성형 ㄷ 형강보를 해석하여, AISI에서 제시한 기준값과 비교를 하였다. 수치해석의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 냉간성형강은 단면이 세장하므로 좌굴에 의해 단면이 항복하는 것을 알 수가 있었으며, 국부좌굴 보다 횡좌굴에 의한 항복이 더 심한 것으로 나타났다.
- AISI에서 제시한 횡좌굴 값은 국부좌굴에 의해 플랜지와 웨브에서 일부 제외되는 유효단면적을 사용하였지만, 실제로 단면은 국부좌굴로 인해 플랜지와 웨브의 일부분이 제외되기 이전에 횡좌굴에 의해 항복하는 것을 알 수 있다. 그러므로 실제로는 AISI에서 제시한 횡좌굴 모멘트 값에서 보다 적은 값에서 횡좌굴이 일어나는 것을 알 수 있다.
- 본 논문에서는 횡좌굴이 일어났을 경우의 유효단면적을 구하여  $\beta_L$  값을 제시하였으며 이 값으로 횡좌굴과 국부좌굴과의 관계를 보다 쉽게 알 수 있다.

### 감사의 글

본 연구는 한국학술진흥재단의 2004년도 선도연구자 사업 (KRF-2004-041-D00760)에 의해 지원되었음.

### 참고문헌

1. AISI, Cold-Formed Steel Design Manul, 1996 Ed
2. 대한건축학회, 냉간성형강 구조설계기준 및 해설, 기문당, 1999
3. K. D. Hjelmstad, "Warping effects in transverse bending of thin-walled beams", Journal of engineering mechanics, ASCE, 113(6), 1987, p907-924
4. K. T. Kavanagh and D. S. Ellifritt, "Design Strengths of Cold-Formed Channels in Bending and Torsion", Journal of Structural Engineering, ASCE, 120(5), 1994, p1599-1607
5. 전재만, 현자영, 이재홍, "국부좌굴을 고려한 냉간성형 e 형강보의 응력해석", 한국강구조학회 논문집, 제16권 1호, 2004, pp.51-60.
6. Michell A.G.M "Elastic Stability of Long Beams Under Transvers Force", Philosophic Magazine, 48, 1899
7. Timoshenko, S. P., Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, Inc., New York, 1961
8. Vlasov VZ., Thin-walled elastic beams 2nd edition, Israel Program for Sientific Translation, Jerusalem, Israe, 1961
9. Gjelsvik, A. The Theory of Thin Walled Bars, John Wiley& Sons, Inc., 1981
10. J. N. Reddy, An Introduction To The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1933