

面内 모멘트를 받는 단순지지된 두 모서리와 자유경계인 나머지 두 모서리를 갖는 직사각형 판의 진동과 좌굴의 엄밀해

Exact Solutions for Vibration and Buckling of Rectangular Plates Loaded at Two Simply-Supported Opposite Edges by In-Plane Moments, Free along the Other Two Edges

심현주* 우하영** 강재훈***
Shim, Hyun-Ju Woo, Ha-Young Kang, Jae-Hoon

요약

본 연구는 순수 면내모멘트를 발생시키는 선형적으로 변하는 수직응력을 받고 있는 단순지지된 마주보는 두 모서리와 자유경계를 가지는 직사각형 판의 자유진동과 좌굴의 엄밀해를 구하였다. 정현적으로 가정된 하중방향(x)으로의 변위함수는 단순지지 경계조건을 만족시키며, 평판을 지배하는 편미분 운동방정식을 y 방향으로의 변계수를 갖는 상미분방정식으로 만든다. Frobenius법을 통하여, y방향으로의 멱급수를 가정하면 이 식을 엄밀하게 풀 수 있으며, 그 식의 합당한 계수를 구할 수 있다. 자유경계조건을 y=0과 b에 적용하면, 고유진동수와 임계좌굴모멘트를 구할 수 있는 4차의 특성행렬식이 만들어진다. 본 논문에서는 이 급수해의 수렴성이 면밀히 조사되었으며, 임계 좌굴모멘트의 수치결과와 모드형상이 주어진다. 상대적으로 정확도가 떨어지는 1차원적인 보 이론으로 구한 결과치와의 비교연구가 이루어진다. 또한 자유진동수와 모드형상 주어진다. 포와송비(ν)의 변화에 따른 좌굴모멘트와 고유진동수의 변화가 도표로 주어진다.

Abstract

This paper presents exact solutions for the free vibrations and buckling of rectangular plates having two opposite, simply supported edges subjected to linearly varying normal stresses causing pure in-plane moments, the other two edges being free. Assuming displacement functions which are sinusoidal in the direction of loading (x), the simply supported edge conditions are satisfied exactly. With this the differential equation of motion for the plate is reduced to an ordinary one having variable coefficients (in y). This equation is solved exactly by assuming power series in y and obtaining its proper coefficients (the method of Frobenius). Applying the free edge boundary conditions at y=0, b yields a fourth order characteristic determinant for the critical buckling moments and vibration frequencies. Convergence of the series is studied carefully. Numerical results are obtained for the critical buckling moments and some of their associated mode shapes. Comparisons are made with known results from less accurate one-dimensional beam theory. Free vibration frequency and mode shape results are also presented. Because the buckling and frequency parameters depend upon Poisson's ratio (ν), results are shown for $0 \leq \nu \leq 0.5$, valid for isotropic materials.

키워드 : 자유진동, 좌굴, SSFSSF 직사각형판, 엄밀해, Frobenius 법, 면내좌굴모멘트

Free vibration, buckling, SSFSSF rectangular plate, exact solution, Frobenius method, in-plane buckling moments

1. 서론

면내하중을 받는 박판의 횡진동^{1~12)}과 좌굴^{8~26)}은 지난 세기 많은 연구자들에게 관심을 끌었던 연

구분야이다. 하지만 대부분의 연구는 등분포 면내 하중을 받는 직사각형판의 문제가 대부분이거나 등 변분포 면내하중을 받는 경우에도 에너지법과 같은 근사법이 사용되었다. 그 이유는 등분포 면내하중을 받는 마주보는 두 모서리가 단순지지(SS)된 경우 지배 미분방정식은 상계수를 가지게 되어 고유진동수와 좌굴하중의 엄밀해 (exact solution) 를 용이하게 구할 수 있었기 때문이다.

* 정회원, 중앙대학교(서울) 건축학과 박사과정
** 정회원, 중앙대학교(서울) 건축학과 석사과정
*** 정회원, 중앙대학교(서울) 건축공학과 부교수
Tel : 02-827-0182 Fax : 02-812-4150
E-mail : jhkang@cau.ac.kr

본 연구에서는 등변분포 응력에 의해서 발생 하는 면내 순수 휨모멘트를 받는 단순지지(SS)된 마주 보는 두 모서리와 자유경계(F)인 나머지 두 모서리를 가진 직사각형판(SS-F-SS-F)의 진동과 좌굴을 Frobenius 멱급수법을 이용하여 엄밀해를 구하였다. 인접한 구조물에 의해서 단부 모멘트를 받는 깊은 직사각형 단면 보에 본 연구의 해석이 실용적으로 적용될 수 있다.

또한 그 급수해의 수렴성이 조사된다. 좌굴 모멘트의 수치결과와 모드형상이 주어지며, 1차원 적인 보 이론¹⁵⁾으로 구한 좌굴하중과의 비교가 이루어진다. 또한 고유진동수와 이에 상응하는 진동 모드형상이 주어진다. 프와송비(v)의 변화에 따른 좌굴모멘트와 고유진동수의 변화가 고찰 된다.

2. 해 석

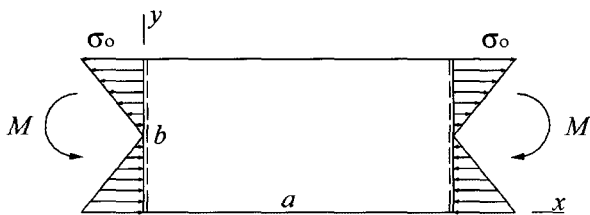
<그림 1>은 두께가 h 이고 가로×세로가 $a \times b$ 인 직사각형판(SS-F-SS-F)을 보여주고 있다. 두 개의 마주 보는 모서리($x=0$ 과 a)는 단순지지(SS)되어 있으며, 수직 응력(σ_x)을 야기시키는 면내 휨 모멘트를 받고 있다. 이 수직응력은 다음 식

$$\sigma_x = -\sigma_0(1 - 2y/b) \quad (1)$$

으로 표현된다. 여기서 σ_0 는 $y=b$ 에서의 인장응력이다. 이 응력(σ_0)과 면내 모멘트(M)와의 관계식은

$$\sigma_0 = 6M/hb^2 \quad (2)$$

이다. 나머지 두 모서리($y=0$ 과 b)는 자유경계조건



<그림 1> 면내 모멘트를 받는 SS-F-SS-F 직사각형판 ($a/b = 2$).

(F)을 가지며, 어떤 하중도 받고 있지 않다. 판 전체에 작용하는 식 (1)의 면내응력과 0인 다른 응력성분 ($\sigma_y = \tau_{xy} = 0$)은 평면탄성문제의 엄밀해이다.

판의 횡변위 $w(x,y)$ 를 지배하는 운동방정식은 다음 식으로 잘 알려져 있다¹⁾.

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sigma_x h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3)$$

여기서 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ 는 판의 휨강성, E 는 영계수, ν 는 프와송비, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 는 라플라스 연산자, $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ 는 겹조화 미분연산자, ρ 는 밀도, t 는 시간을 나타낸다.

무차원 좌표인 $\zeta = x/a$ 과 $\eta = y/b$ 를 도입하고, 다음 식과 같이 해를 가정하면

$$w(\xi, \eta, t) = Y_m(\eta) \sin m\pi\xi \sin \omega t \quad (4)$$

식 (3)은 다음과 같은 상미분방정식이 된다.

$$Y_m^{IV} - 2\beta_m^2 Y_m'' + [\beta_m^4 - 6M^*(1 - 2\eta)\beta_m^2 - \lambda^2(b/a)^4] Y_m = 0 \quad (5)$$

여기서 Y_m 는 η 만의 함수이고, $\beta_m = m\pi(b/a)$ 이며, $M^* = M/D$ 는 무차원 모멘트이고, $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 는 무차원 진동수이다. 또한 식 (4)는 $\zeta=0$ 과 1에서의 단순지지 경계조건을 만족하고 있다.

Frobenius법을 이용하면, 식 (5)의 해는 다음 식과 같이 가정된다.

$$Y_m(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n} \eta^n \quad (6)$$

식 (6)의 η 에 대한 2차 및 4차 도함수는

$$Y_m''(\eta) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_{m,n} \eta^{n-2} \quad (7a)$$

$$Y_m^{IV}(\eta) = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)C_{m,n} \eta^{n-4} \quad (7b)$$

이 된다. 식 (6)과 (7)을 식 (5)에 대입하고, 첨수를 이동하면 식 (5)는

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{[(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)C_{m,n+4} - 2\beta_m^2(n+2)(n+1)C_{m,n+2} + \Gamma C_{m,n}] \eta^n + 12\beta_m^2 M^* C_{m,n} \eta^{n+1}\} = 0 \quad (8)$$

이 된다. 여기서

$$\Gamma \equiv \beta_m^4 - 6M^* \beta_m^2 - \lambda^2 (b/a)^4 \quad (9)$$

이다. 항등식의 성질을 이용하면 η^0 의 계수에 대해서 다음 식

$$C_{m,4} = \beta_m^2 C_{m,2} / 6 - \Gamma C_{m,0} / 24 \quad (10)$$

이 계산되며, $\eta^n (n=1,2,3,\dots)$ 의 계수에 대해서 다음 식

$$C_{m,n+4} = \frac{2\beta_m^2(n+2)(n+1)C_{m,n+2} - \Gamma C_{m,n} - 12\beta_m^2 M^* C_{m,n-1}}{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)} \quad (11)$$

이 계산된다.

식 (10)과 (11)은 $C_{m,n} (n \geq 4)$ 과 $C_{m,n} (n=0,1,2,3)$ 를 연결하는 점화관계를 보여 준다. 따라서 임의의 계수 $C_{m,n} (n=0,1,2,3)$ 는 4계 미분방정식 (5)에서 나오는 4개의 독립된 적분상수이다.

$\eta = 0, 1$ 에서 자유경계조건 (휨모멘트와 KelvinKirchhoff의 횡전단력이 0)을 이용하면

$$M_y|_{\eta=0} = 0 \Rightarrow Y_m''(0) - \nu \beta_m^2 Y_m(0) = 0$$

$$V_y|_{\eta=0} = 0 \Rightarrow Y_m'''(0) - (2-\nu)\beta_m^2 Y_m'(0) = 0$$

$$M_y|_{\eta=1} = 0 \Rightarrow Y_m''(1) - \nu \beta_m^2 Y_m(1) = 0$$

$$V_y|_{\eta=1} = 0 \Rightarrow Y_m'''(1) - (2-\nu)\beta_m^2 Y_m'(1) = 0 \quad (12)$$

이 된다. 식 (10)과 (11)과 함께 식 (6)을 식 (12)에 대입하면 $C_{m,n} (n=0,1,2,3)$ 로 표현된 4개의 동차방정식을 얻는다. 비자명해를 구하기 위해 4차의 계수행렬의 행렬식을 0으로 취하면 자유진동 문제의 근인 λ 와 좌굴문제($\lambda=0$)의 근인 M^* 을 구할 수 있다.

3. 수렴성 연구

전술한 바와 같이 좌굴과 자유진동문제의 엄밀해를 구하기 위해서는 4차 행렬식의 고유치를 구해야 한다. 행렬식의 각 원소는 식 (6)에서 주어진 멱급수의 2차 및 3차 도함수에서 나온 멱급수를 포함

〈표 1〉 멱급수법에 의한 SS-F-SS-F 직사각형판의 무차원 진동수 ($\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$)의 수렴 ($M=0, a/b=0.4, m=1, \dots$).

| N | 1 | 2 | 모드 3 | 4 | 5 |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 20 | 7.553 | - | - | - | - |
| 23 | 7.961 | - | - | - | - |
| 25 | 8.465 | - | - | - | - |
| 27 | 8.980 | - | - | - | - |
| 29 | 9.408 | - | - | - | - |
| 31 | 9.660 | - | - | - | - |
| 32 | 9.815 | 10.78 | - | - | - |
| 33 | 9.742 | 11.16 | 13.89 | - | - |
| 34 | 9.767 | 10.99 | - | - | - |
| 35 | 9.758 | 11.05 | 14.76 | - | - |
| 36 | 9.761 | 11.03 | 15.22 | 19.13 | - |
| 37 | 9.760 | 11.04 | 15.01 | - | - |
| 38 | 9.760 | 11.04 | 15.08 | 20.80 | - |
| 39 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 22.83 | 23.97 |
| 40 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.50 | - |
| 41 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.80 | 27.85 |
| 42 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.68 | - |
| 43 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.72 | 29.90 |
| 44 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.70 | - |
| 45 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.71 | 30.87 |
| 46 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.71 | 31.33 |
| 47 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.71 | 31.13 |
| 48 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.71 | 31.20 |
| 49 | 9.760 | 11.04 | 15.06 | 21.71 | 31.17 |
| 50 | 9.76004 | 11.0368 | 15.0626 | 21.7064 | 31.1794 |
| 엄밀해 | 9.76004 | 11.0368 | 15.0626 | 21.7064 | 31.1771 |

하고 있다. 물론 이 무한급수에서는 유한수의 항(N)을 택한다. 수치결과에서 요구되는 정확도에 따라 N의 크기는 달라진다.

<표 1>은 변장비(a/b)가 0.4이고 M=0일 때 멱급수의 항 수(N)를 증가시키면서 구한 무차원 진동수 $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 를 보여 주고 있다. 이 문제에 대한 닫힌 형태 (closed form)의 엄밀해가 존재하며¹⁻²⁾이 엄밀해에서 $Y_m(\eta)$ 는 멱급수 대신 삼각 함수와 쌍곡함수로 표현된다. 밑줄이 그어진 굵은 글씨체로 된 진동수는 각 열에서 최소의 N으로 가장 수렴된 값을 나타낸다. <표 1>은 $\nu = 0.3$ 일 때의 결과치이다.

<표 1>은 정확한 고유진동수를 구하기 위해서는 최소한 N=30이 요구되며 유효숫자 4자리까지 수렴된 정확한 값을 얻기 위해서는 N=37이 필요함을 보여준다. 상위진동수는 그 모드형상에서 곡률변화가 크므로 더 큰 N이 요구된다. <표 1>의 마지막 행에 나열된 엄밀해는 닫힌 형태의 엄밀해²⁾로부터 구하였다.

<표 1>에서 N=21, 22, 24, 26, 28, 30에 대한 수치결과는 주어지지 않았는데, 그 이유는 전산프로그램이 고유치를 결정할 수 없었기 때문이다. 이러한 어려움은 N이 커지면서 제거된다. λ 는 N이 증가함에 따라 단조수렴하지 않고 진동수렴한다. 게다가 그 진동의 폭 또한 단조적으로 감소하지 않는다.

<표 2>는 좌굴문제에서 급수의 수렴성을 보여 주고 있다. 이 경우 그 특성행렬식은 각 m (x방향으로의 반파수)에 대해서 무한개의 고유치 $M^*(\equiv M/D)$ 를 준다. 임계값은 모든 고유치 가운데 가장 작은 값을 의미한다. 밑줄이 그어지고 굵은 글씨체로 쓰여진 좌굴모멘트는 각 열에서 가장 작은 수의 N을 가지고 얻은 최상의 수렴치를 의미한다. $\eta = 0$ 과 1에서 자유경계조건을 가지는 판의 임계 좌굴 모드형상은 항상 $m=1$ 일 때 발생한다. 다른 경계조건을 가지는, 특히 a/b가 클 때, 임계 좌굴모드는 $m \geq 2$ 에서 발생한다.

<표 2>에서 세가지 종류의 변장비 (a/b=0.5, 1, 2)를 가지는 판에 대해 N을 증가시키면서 M_{cr}/D 의 수렴성을 조사하였다. 하중방향으로 짧은 판(a/b

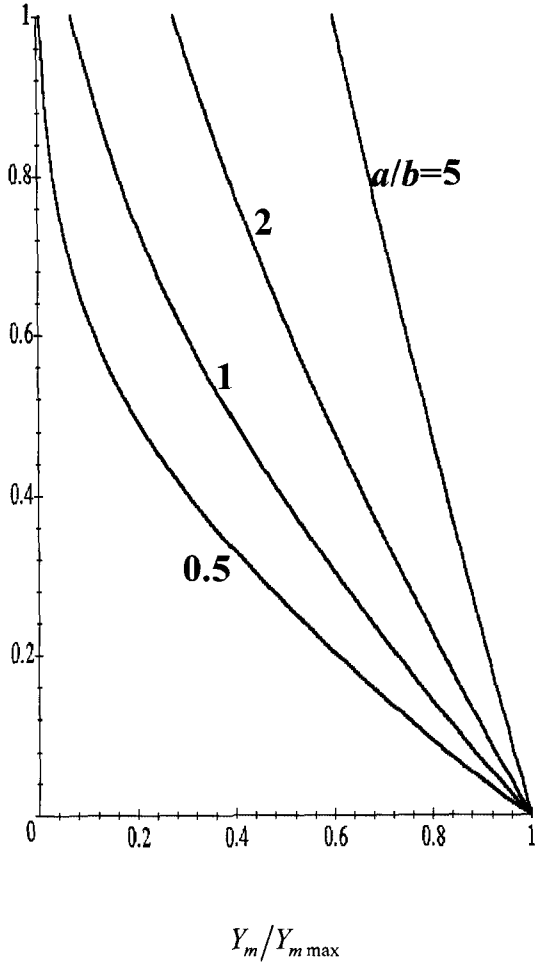
<표 2> 면내 모멘트를 받는 SS-F-SS-F 직사각형판의 멱급수법에 의한 무차원 임계 좌굴모멘트 (M_{cr}/D)의 수렴 ($m=1, \nu=0.3$).

| N | a/b=0.5 | a/b=1 | a/b=2 |
|----|--------------|--------------|--------------|
| 8 | 1.431 | - | - |
| 9 | 3.803 | 1.671 | 1.143 |
| 10 | .1335 | 8.178 | 2.385 |
| 11 | 3.647 | 2.137 | 1.566 |
| 12 | 12.74 | 4.622 | 1.921 |
| 13 | 3.072 | 2.787 | 1.814 |
| 14 | 7.796 | 3.749 | 1.864 |
| 15 | 4.649 | 3.450 | 1.866 |
| 16 | 5.814 | 4.051 | 1.875 |
| 17 | 5.159 | 3.980 | 1.875 |
| 18 | 6.199 | 4.306 | 1.876 |
| 19 | 5.923 | 4.125 | 1.876 |
| 20 | 40.62 | 4.301 | 1.876 |
| 21 | 7.005 | 4.276 | 1.876 |
| 22 | 18.29 | 4.290 | 1.876 |
| 23 | 8.356 | 4.287 | 1.876 |
| 24 | 11.72 | 4.289 | 1.876 |
| 25 | 9.762 | 4.288 | 1.876 |
| 26 | 11.25 | 4.289 | 1.876 |
| 27 | 10.85 | 4.289 | 1.876 |
| 28 | 11.52 | 4.289 | 1.876 |
| 29 | 11.40 | 4.289 | 1.876 |
| 30 | 11.63 | 4.289 | 1.876 |
| 31 | 11.58 | 4.289 | 1.876 |
| 32 | 11.63 | 4.289 | 1.876 |
| 33 | 11.62 | 4.289 | 1.876 |
| 34 | 11.63 | 4.289 | 1.876 |
| 35 | 11.63 | 4.289 | 1.876 |
| 36 | 11.63 | 4.289 | 1.876 |

=0.5)은 긴 판(a/b=2)에 비해 정확한 수렴치를 얻기 위해 더 많은 항 수(N)가 필요하다. 그 이유는 짧은 판의 모드형상은 y방향으로 더 큰 곡률을 가지기 때문이다. <그림 2>는 이러한 사실을 잘 보여 주고 있는데, 이 그림은 다양한 변장비(a/b)를 가지는 판의 임계좌굴 모드형상의 $0 \leq \eta \leq 1$ 에 걸쳐 판 중앙 ($x=a/2$)에서의 처짐을 보여 주고 있다.

<표 3>은 임계 좌굴모멘트의 반($M/M_{cr} = 0.5$)의 크기를 갖는 면내 단부 모멘트를 받는 판의 진동수 $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$ 에 대한 수렴성을 보여 주고 있다. 상위진동수의 정확한 수렴을 위해서는 급수에 더 많은 수의 항(N)이 필요하다는 것을 다시 한 번 보여 주고 있다.

$$\eta \equiv y/b$$



다음 절에서 제공되는 멱급수법으로 계산된 수치 결과는 각 표에서 주어진 숫자까지 수렴된 결과를 얻기 위해 충분한 수의 항(N)을 택하였다. 일반적으로 N=50이 사용되었다.

4. 임계좌굴하중과 모드형상

<표 4>는 다양한 변장비(a/b)와 등방성 재료에서 가능한 프와송 비 ($0 \leq \nu \leq 0.5$)를 갖는 판에 대한 수렴된 임계 좌굴하중 M_{cr}/Eh^3 을 보여 주고 있다. $D \equiv Eh^3/12(1-\nu^2)$ 는 ν 를 포함하고 있으므로 이 표에서는 임계 좌굴하중을 위한 매개변수로 $M_{cr}^* \equiv M_{cr}/D$ 대신 M_{cr}/Eh^3 이 사용되었다. 따라서

<표 3> 면내 모멘트를 받고 있는 SS-F-SS-F 직사각형판의 멱급수법에 의한무차원 진동수 $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 의 수렴 ($a/b=1.5, m=1, \nu=0.3, M/M_{cr}=0.5$).

| N | 1 | 2 | 모드3 | 4 | 5 |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|
| 15 | 7.974 | 22.73 | 55.51 | 194.6 | - |
| 16 | 8.102 | 21.98 | - | - | - |
| 17 | 8.057 | 22.25 | 61.64 | - | - |
| 18 | 8.072 | 22.15 | 68.53 | 101.1 | - |
| 19 | 8.067 | 22.18 | 65.06 | 265.7 | - |
| 20 | 8.069 | 22.17 | 66.14 | 120.4 | - |
| 21 | 8.068 | 22.18 | 65.18 | - | - |
| 22 | 8.068 | 22.18 | 65.84 | 139.0 | - |
| 23 | 8.068 | 22.18 | 65.79 | 340.5 | - |
| 24 | 8.068 | 22.18 | 65.81 | 147.5 | - |
| 25 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 157.6 | 188.3 |
| 26 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 151.9 | - |
| 27 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 153.1 | 246.4 |
| 28 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.6 | - |
| 29 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 251.2 |
| 30 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | - |
| 31 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 279.2 |
| 32 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | - |
| 33 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 281.4 |
| 34 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 285.9 |
| 35 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 284.8 |
| 36 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 285.2 |
| 37 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 284.9 |
| 38 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 285.0 |
| 39 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 285.0 |
| 40 | 8.068 | 22.18 | 65.80 | 152.8 | 285.0 |

M_{cr}/Eh^3 는 프와송 비의 변화효과를 잘 보여 줄 수 있다. 예측한 대로 일정한 판의 폭(b)에 대해서 길이(a)를 증가시키면 좌굴을 발생시키는 모멘트의 크기가 크게 감소한다. 또한 표 4를 통해 판이 긴 경우(큰 a/b) 프와송 비의 효과는 매우 크며, ν 의 증가는 M_{cr} 를 크게 감소시킨다는 것을 알 수 있다.

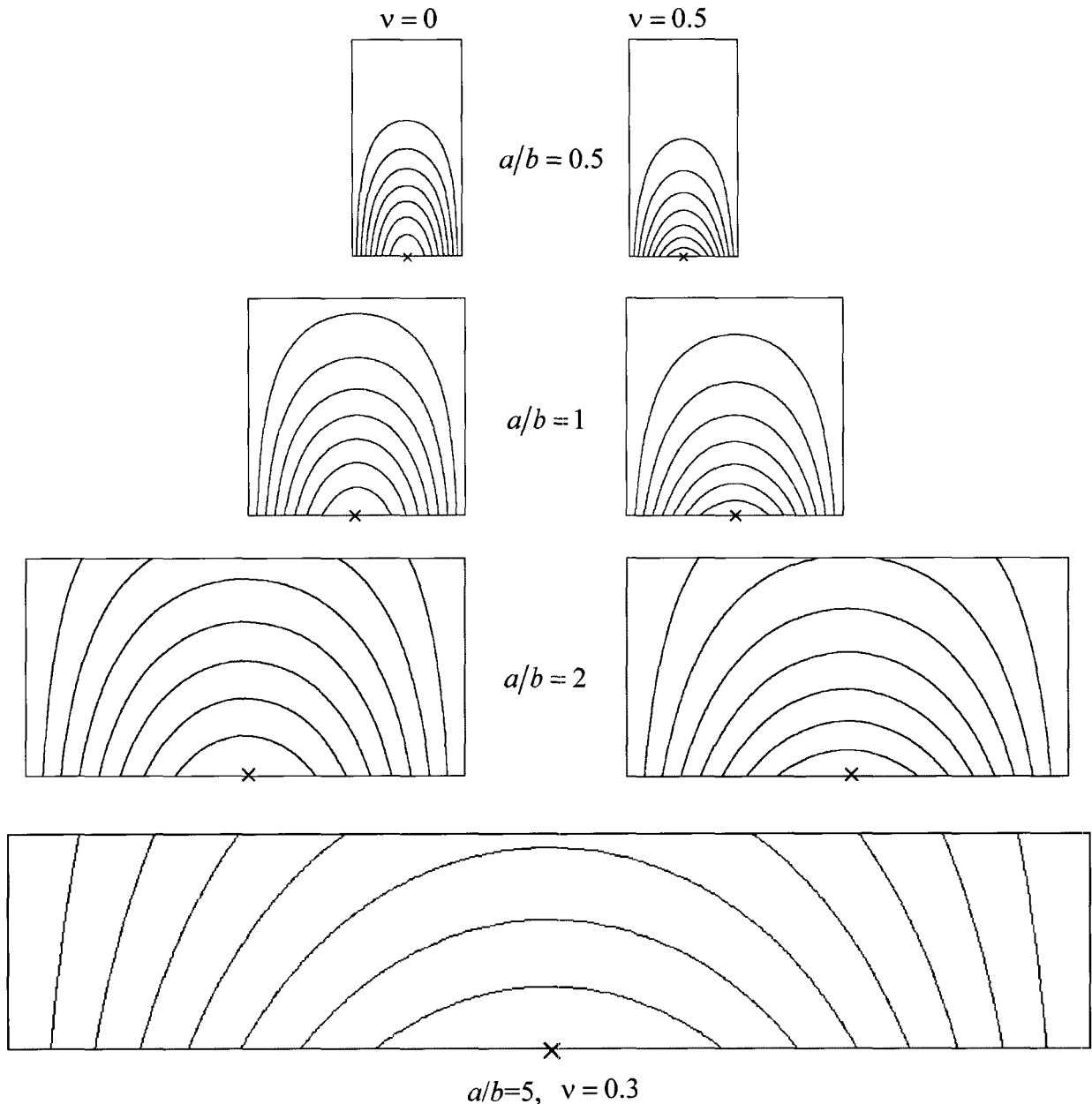
<그림 3>은 $a/b=0.5, 1, 2, 5$ 일 때 임계좌굴 모드형상을 동일한 처짐을 갖는 지점을 선으로 연결한 등고선으로 보여 주고 있다. 각 모드형상에서 발생하는 최대변위는 최대 압축응력($y=0$)을 받고 있는 모서리의 중앙($x=a/2$)에서 발생한다. a/b가 작을 때 즉, 짧은 판인 경우 그 모드형상에서 음(陰)의Gaussian곡률(즉, 안장곡면)을 가지게 되며, 이 현상은 <그림 2>에서도 관찰된다. a/b가 클 때 즉, 긴 판인 경우에는

<그림 2>에서 분명하게 볼 수 있었던 y방향으로의 곡률은 거의 사라지게 된다. 또한 <그림 3>은 ν 의 증가는 모드형상의 곡률을 증가시키면서 판의 압축부분에

<표 4> 다양한 포와송비($\nu = 0, 0.3, 0.5$)를 갖는 SS-F-SS-F 직사각형판의 임계좌굴모멘트.

| ν | 0.5 | 2/3 | 1 | a/b | 1.5 | 2.5 | 5 | 10 |
|-------|-------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|----|
| 0 | 1.080 | 0.7132 | 0.4210 | 0.2627 | 0.1517 | 0.07451 | 0.03708 | |
| 0.3 | 1.065 | 0.6882 | 0.3928 | 0.2382 | 0.1348 | 0.06557 | 0.03255 | |
| 0.5 | 1.099 | 0.6968 | 0.3868 | 0.2291 | 0.1272 | 0.06127 | 0.03033 | |

나타나는 등고선이 더 조밀하게 생성됨을 보여 준다. SSFSSF 판은 1차원적인 보 이론을 통한 Timoshenko와 Gere¹⁵⁾의 측좌굴 (lateral instability) 이론으로도 해석될 수도 있다. 단부모멘트를 받는 보의 불안정을 지배하는 방정식과 해를 본 논문의 부록에서 요약하였다. <표 5>는 1차원 보 이론 (1DB)에 의한 임계 좌굴모멘트 M_{cr}/Eh^3 과 본 연구의 멱급수해를 사용한 더 정확한 2차원 판이론 (2DP)에 의한 결과치와의 비교를 보여주고 있다. 퍼센트 차이는 $(2DP-1DB)/2DP \times 100$ 로 계산 하였다. 보 이론은 긴 판에 대해서는 매우 정



<그림 3>. 직사각형판의 임계 좌굴모드형상; x는 최대변위가 나타나는 지점을 의미.

<표 5> 역급수법에 의한 2차원 판이론(2DP)과 1차원 보이론(1DB)에 의한 SS-F-SS-F 판의 무차원 임계 좌굴모멘트 M_{cr}/Eh^3 의 비교 ($\nu = 0.3$).

| | 0.5 | 1 | 2 | a/b 5 | 10 | 20 | 50 |
|-----|-------|-------|-------|----------|---------|---------|----------|
| 1DB | .6495 | .3247 | .1624 | 0.06495 | 0.03247 | 0.01624 | 0.006495 |
| 2DP | 1.065 | .3928 | .1718 | 0.06557 | 0.03255 | 0.01625 | 0.006495 |
| %차이 | 39.0% | 17.3% | 5.47% | 0.946% | 0.246% | 0.062% | 0% |

확함을 보여준다. $a/b > 5$ 일 때 그 퍼센트 차이는 1% 미만이며, $a/b = 50$ 일 때는 유효숫자 4자리까지 두 이론의 결과치가 일치함을 보여 준다. 하지만 짧은 판의 경우 ($a/b < 2$), 보이론은 적합하지 않음을 보여준다. 보이론은 <그림 2>에서 $a/b < 2$ 일 때 보여준 것과 같은 측곡률(lateral curvature)을 허용하지 않으며, 보가 회전할 때 보의 축선(lateral line)은 직선을 유지한다고 가정한다. <그림 2>에서 $a/b = 5$ 일 때 축선은 거의 직선이다.

5. 고유진동수와 모드형상

앞 절에서는 SS-F-SS-F 판을 좌굴시키는 면내 단부모멘트의 임계치를 결정하였으며, 이 절에서는 모멘트(M)가 증가할 때 판의 고유진동수와 이에 상응하는 모드형상이 어떻게 변화하는지를 관찰한다. M이 M_{cr} 에 근접 하면 기본(최저) 진동수는 0에 접

근하며 모드형상은 좌굴 모드형상과 유사하게 된다.

<표 6~8>은 M/M_{cr} 이 0, 0.5, 0.95로 증가될 때, 변장비(a/b)가 0.5, 2/3, 1, 1.5, 2.5인 판의 무차원 진동수($\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$)의 수렴치를 보여준다. ν 는 0, 0.3, 0.5가 사용된다. 기본진동수는 모두 (m,n)=(1,1) 모드에서 발생하며, 이는 x방향으로는 1개의 반파(m=1)를, y방향으로는 1개의 부분파(n=1)를 가지는 것을 의미한다. $\nu = 0$ 이고 $M = 0$ 일 때 모든 a/b 에 대해서 $\lambda = \pi^2$ 이다. 그러나 M/M_{cr} 이 증가하면 진동수는 처음에는 천천히 감소하다가 점점 더 빠른 속도로 감소하게 된다. 이러한 경향은 모든 ν 에 대해서 관찰된다.

M/M_{cr} 이 증가함에 따라 기본모드 (1,1)의 진동수는 항상 감소하지만 다른 모드에 대해서는 항상 감소하는 것은 아니다. <표 6~8>에서 (m,n) = (1,2)과 (1,3)과 같은 일부 모드에서는 M/M_{cr} 이 증가하면 진

<표 6> $\nu = 0$ 일 때 무차원 진동수 $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 와 진동모드 (m,n).

| M/M_{cr} | 모드 순서 | 0.5 | 2/3 | a/b 1 | 1.5 | 2.5 |
|------------|----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 1 | 9.870 (1,1) | 9.870 (1,1) | 9.870 (1,1) | 9.870 (1,1) | 9.870 (1,1) |
| | 2 | 12.23 (1,2) | 13.88 (1,2) | 17.88 (1,2) | 24.75 (1,2) | 39.46 (1,2) |
| | 3 | 18.70 (1,3) | 24.52 (1,3) | 39.23 (1,3) | 39.48 (2,1) | 39.48 (2,1) |
| | 4 | 29.05 (1,4) | 39.48 (2,1) | 39.48 (2,1) | 59.23 (2,2) | 84.94 (2,2) |
| | 5 | 39.48 (2,1) | 42.10 (1,4) | 48.91 (2,2) | 69.20 (1,3) | 88.83 (3,1) |
| 0.5 | 1 | 7.792 (1,1) | 7.962 (1,1) | 8.214 (1,1) | 8.378 (1,1) | 8.482 (1,1) |
| | 2 | 13.27 (1,2) | 14.81 (1,2) | 18.58 (1,2) | 25.24 (1,2) | 38.12 (2,1) |
| | 3 | 18.87 (1,3) | 24.62 (1,3) | 37.85 (2,1) | 38.00 (2,1) | 39.77 (1,2) |
| | 4 | 29.03 (1,4) | 37.65 (2,1) | 39.27 (1,3) | 60.03 (2,2) | 85.49 (2,2) |
| | 5 | 37.53 (2,1) | 42.12 (1,4) | 49.94 (2,2) | 69.22 (1,3) | 87.44 (3,1) |
| 0.95 | 1 | 2.698 (1,1) | 2.614 (1,1) | 2.764 (1,1) | 2.895 (1,1) | 3.004 (1,1) |
| | 2 | 14.21 (1,2) | 16.03 (1,2) | 19.84 (1,2) | 26.30 (1,2) | 34.55 (2,1) |
| | 3 | 19.33 (1,3) | 24.88 (1,3) | 34.41 (2,1) | 34.44 (2,1) | 40.51 (1,2) |
| | 4 | 29.18 (1,4) | 34.22 (2,1) | 39.38 (1,3) | 61.75 (2,2) | 83.94 (3,1) |
| | 5 | 34.52 (2,1) | 42.16 (1,4) | 51.74 (2,2) | 69.26 (1,3) | 86.81 (2,2) |

<표 7> $\nu = 0.3$ 일 때 무차원 진동수 $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 와 진동모드 (m,n).

| $\frac{M}{M_{cr}}$ | 모드 순서 | 0.5 | 2/3 | a/b 1 | 1.5 | 2.5 |
|--------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 1 | 9.736 (1,1) | 9.698 (1,1) | 9.631 (1,1) | 9.558 (1,1) | 9.484 (1,1) |
| | 2 | 11.68 (1,2) | 12.98 (1,2) | 16.13 (1,2) | 21.62 (1,2) | 33.62 (1,2) |
| | 3 | 17.69 (1,3) | 22.95 (1,3) | 36.73 (1,3) | 38.72 (2,1) | 38.36 (2,1) |
| | 4 | 27.76 (1,4) | 39.11 (2,1) | 38.95 (2,1) | 54.84 (2,2) | 75.20 (2,2) |
| | 5 | 39.19 (2,1) | 40.36 (1,4) | 46.74 (2,2) | 65.79 (1,3) | 86.97 (3,1) |
| 0.5 | 1 | 7.573 (1,1) | 7.732 (1,1) | 7.940 (1,1) | 8.068 (1,1) | 8.131 (1,1) |
| | 2 | 12.83 (1,2) | 14.02 (1,2) | 16.93 (1,2) | 22.18 (1,2) | 33.69 (1,2) |
| | 3 | 17.86 (1,3) | 23.05 (1,3) | 36.76 (1,3) | 37.29 (2,1) | 37.06 (2,1) |
| | 4 | 27.79 (1,4) | 37.26 (2,1) | 37.34 (2,1) | 55.70 (2,2) | 75.80 (2,2) |
| | 5 | 37.17 (2,1) | 40.37 (1,4) | 47.82 (2,2) | 65.80 (1,3) | 85.66 (3,1) |
| 0.95 | 1 | 2.448 (1,1) | 2.521 (1,1) | 2.643 (1,1) | 2.764 (1,1) | 2.861 (1,1) |
| | 2 | 13.78 (1,2) | 15.28 (1,2) | 18.26 (1,2) | 23.33 (1,2) | 33.68 (2,1) |
| | 3 | 18.34 (1,3) | 23.30 (1,3) | 34.10 (2,1) | 33.95 (2,1) | 34.78 (1,2) |
| | 4 | 27.88 (1,4) | 34.20 (2,1) | 36.86 (1,3) | 57.48 (2,2) | 77.22 (2,2) |
| | 5 | 34.24 (2,1) | 40.41 (1,4) | 49.65 (2,2) | 65.84 (1,3) | 82.40 (3,1) |

<표 8> $\nu = 0.5$ 일 때 무차원 진동수 $\lambda \equiv \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 와 진동모드 (m,n).

| $\frac{M}{M_{cr}}$ | 모드 순서 | 0.5 | 2/3 | a/b 1 | 1.5 | 2.5 |
|--------------------|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 1 | 9.380 (1,1) | 9.268 (1,1) | 9.079 (1,1) | 8.886 (1,1) | 8.704 (1,1) |
| | 2 | 10.87 (1,2) | 11.86 (1,2) | 14.35 (1,2) | 18.81 (1,2) | 28.76 (1,2) |
| | 3 | 16.70 (1,3) | 21.60 (1,3) | 34.78 (1,3) | 36.87 (2,1) | 35.88 (2,1) |
| | 4 | 26.71 (1,4) | 38.00 (2,1) | 37.52 (2,1) | 49.72 (2,2) | 66.02 (2,2) |
| | 5 | 38.24 (2,1) | 39.04 (1,4) | 43.48 (2,2) | 63.31 (1,3) | 82.51 (3,1) |
| 0.5 | 1 | 7.183 (1,1) | 7.289 (1,1) | 7.417 (1,1) | 7.465 (1,1) | 7.450 (1,1) |
| | 2 | 12.15 (1,2) | 13.00 (1,2) | 15.20 (1,2) | 19.38 (1,2) | 29.10 (1,2) |
| | 3 | 16.83 (1,3) | 21.67 (1,3) | 34.80 (1,3) | 35.48 (2,1) | 34.67 (2,1) |
| | 4 | 26.73 (1,4) | 36.01 (2,1) | 35.88 (2,1) | 50.62 (2,2) | 66.62 (2,2) |
| | 5 | 36.02 (2,1) | 39.05 (1,4) | 44.69 (2,2) | 63.32 (1,3) | 81.29 (3,1) |
| 0.95 | 1 | 2.308 (1,1) | 2.359 (1,1) | 2.450 (1,1) | 2.537 (1,1) | 2.618 (1,1) |
| | 2 | 13.20 (1,2) | 14.31 (1,2) | 16.55 (1,2) | 20.54 (1,2) | 29.91 (1,2) |
| | 3 | 17.23 (1,3) | 21.86 (1,3) | 32.81 (2,1) | 32.37 (2,1) | 31.59 (2,1) |
| | 4 | 26.80 (1,4) | 33.07 (2,1) | 34.87 (1,3) | 52.45 (2,2) | 68.04 (2,2) |
| | 5 | 33.19 (2,1) | 39.08 (1,4) | 46.62 (2,2) | 63.34 (1,3) | 78.28 (3,1) |

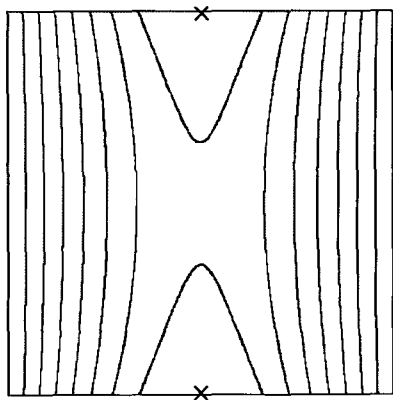
동수가 오히려 증가한다. 이러한 모드들은 M_{cr} 보다 훨씬 더 큰 좌굴모멘트를 가지게 되며, M_{cr} 는 모든 모드의 좌굴모멘트 중에서 가장 적은 것이다. M 이 증가하여 M_{cr} 을 초과하여 (비임계) 좌굴모멘트 값에 근접하게 되면 이러한 모드의 진동수는 결국은 감소하다가 0에 가까워질 것이다. 그러나 이것은 단지 수학적 설명일 뿐이며, 실제에 있어서는 판의 비선형 후좌굴(postbuckling) 거동을 고려하지 않고

M_{cr} 보다 큰 모멘트를 가할 수는 없다. 판의 비선형 후좌굴 거동에서는 판은 더 이상 평평하지 않으며 얇은 셸 (shallow shell)이 된다.

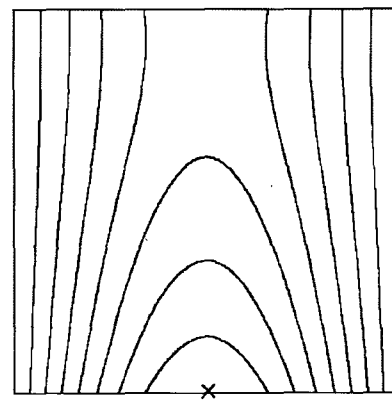
<표 9>에서는 ν 의 변화가 진동수에 어떤 영향을 미치는지를 보여 준다. $\omega_{0.5}/\omega_0$ 는 $\nu=0$ 일 때의 진동수(ω_0)에 대한 $\nu=0.5$ 일 때의 진동수($\omega_{0.5}$)의 비를 나타낸다. <표 6>과 <표 8>로부터 $\omega_{0.5}/\omega_0 =$

〈표 9〉 ν 가 0.5와 0인 판의 진동수비 $\omega_{0.5}/\omega_0$.

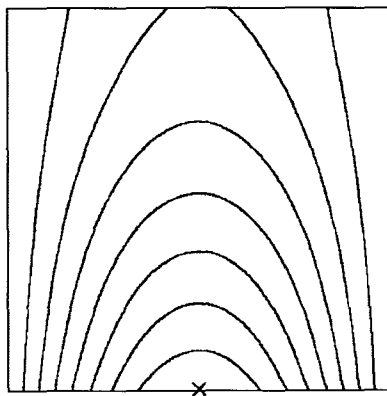
| $\frac{M}{M_{cr}}$ | 모드 순서 | 0.5 | 2/3 | a/b 1 | 1.5 | 2.5 |
|--------------------|----------|-------|-------|----------|-------|----------|
| 0 | 1 | 0.823 | 0.813 | 0.797 | 0.780 | 0.764 |
| | 2 | 0.770 | 0.734 | 0.695 | 0.658 | 0.631 |
| | 3 | 0.773 | 0.763 | 0.768 | 0.809 | 0.787 |
| | 4 | 0.796 | 0.834 | 0.823 | 0.727 | 0.763 |
| | 5 | 0.839 | 0.803 | 0.770 | 0.792 | 0.804 |
| 0.5 | 1 | 0.798 | 0.793 | 0.782 | 0.772 | 0.761 |
| | 2 | 0.793 | 0.760 | 0.708 | 0.665 | 0.634* |
| | 3 | 0.772 | 0.762 | 0.821+ | 0.809 | 0.788+ |
| | 4 | 0.797 | 0.823 | 0.767** | 0.730 | 0.765 |
| | 5 | 0.831 | 0.803 | 0.775 | 0.792 | 0.805 |
| 0.95 | 1 | 0.741 | 0.782 | 0.768 | 0.759 | 0.755 |
| | 2 | 0.804 | 0.773 | 0.722 | 0.676 | 0.639* |
| | 3 | 0.772 | 0.761 | 0.826 | 0.814 | 0.792+ |
| | 4 | 0.795 | 0.837 | 0.767 | 0.736 | 0.679++ |
| | 5 | 0.833 | 0.803 | 0.780 | 0.792 | 0.808*** |



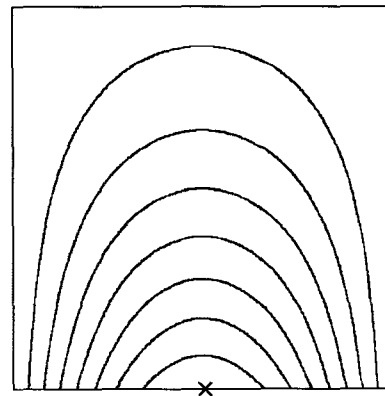
$M/M_{cr} = 0$



$M/M_{cr} = 0.2$

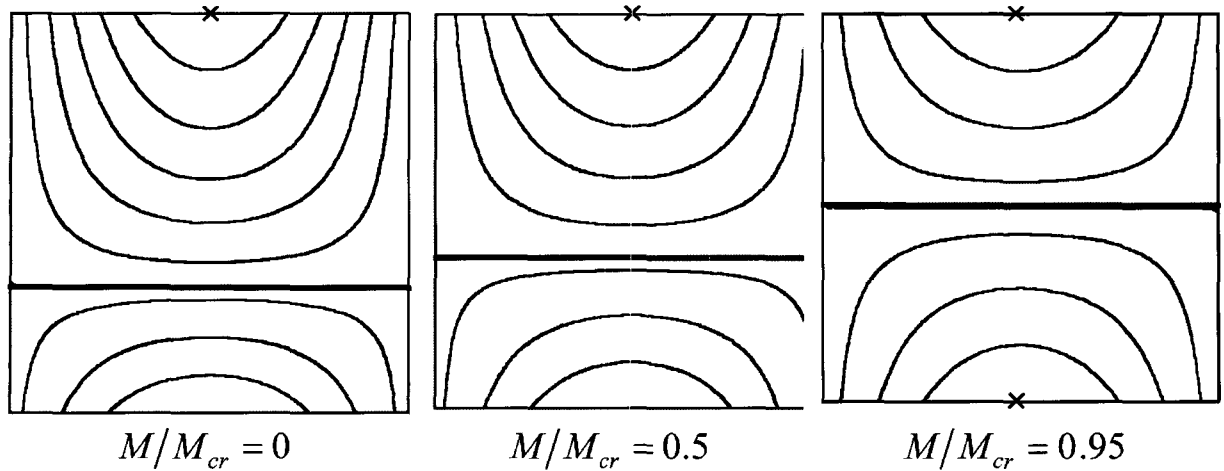


$M/M_{cr} = 0.5$



$M/M_{cr} = 0.95$

〈그림 4〉 정사각형판 ($a/b=1$)의 $(m,n)=(1,1)$ 일 때의 진동모드형상 ($\nu=0.3$); \times 는 최대변위가 나타나는 지점을 의미.



<그림 5> 정사각형판 ($a/b=1$)의 $(m,n)=(1,2)$ 일 때의 진동모드형상 ($\nu=0.3$); \times 는 최대변위가 나타나는 지점을 의미.

$(\lambda_{0.5}/\lambda_0)\sqrt{1-\nu_{0.5}^2}$ 을 이용하면서 이러한 진동수의 비를 구한다. λ_0 과 $\lambda_{0.5}$ 은 각각 표 6과 8의 수치결과이고 $\nu_{0.5}=0.5$ 이다. <표 9>에서는 상첨기호를 가진 것을 제외하고는 진동수 비의 배열이 <표 6>과 <표 8>의 진동수와 동일하다. 상첨기호 (*, +, **, ++, ***)는 각각 $(m,n)=(1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1)$ 모드를 의미한다. <표 9>는 ν 가 증가하면 진동수가 감소함을 보여준다.

<그림 4>는 M/M_{cr} 가 0에서 0.95로 변할 때, 정사각형 판($a/b=1$)의 기본 모드형상 (1,1)을 등고선으로 보여 준다. $M/M_{cr}=0$ 일 때, 모드형상은 두 개의 대칭축($x=a/2, y=b/2$)을 가지는 안장곡면을 이룬다. 모멘트($M/M_{cr}=0.2$)를 받을 때 $y=b/2$ 에 관한 모드형상의 대칭축은 사라지게 되며, $(x,y)=(a/2,0)$ 에서의 처짐은 맞은 편 지점($x=a/2, y=b$)의 처짐보다 더 크다. M 이 좌굴모멘트에 근접하면 ($M/M_{cr}=0.95$) 그 모드형상은 좌굴 모드형상 (<그림 3> 참조)과 유사하게 되며 판의 중앙 ($x=a/2$)은 작은 곡률을 가진다(<그림 2> 참조).

<그림 5>는 <그림 4>와 동일한 판의 (1,2) 모드형상을 보여 주고 있다. $M/M_{cr}=0$ 일 때 절선($y=b/2$)은 판의 처짐의 반대칭(antisymmetry)축이다. 면내 단부 모멘트를 받을 때, 처짐이 0인 지점을 선으로 연결한 절선(node line)은 이동을 하게 되며, 그 모드형상에서 반대칭축은 사라지게 된다. 또한 그림 5는 $M/M_{cr}>0$ 일 때에도 절선이 직선임을 보여 주고 있다.

이 사실은 식 (4)를 통해 검증이 가능하다. $\sin m\pi\xi = 0$ 이 아닌 곳에서 어떤 η 에 대해서 $w=0$ 이라면, 그 η 를 갖는 모든 점에서 $w=0$ 이어야만 한다.

6. 결 론

본 연구에서는 면내 모멘트를 받는 단순지지(SS)된 마주보는 두 모서리와 자유(F)인 나머지 두 모서리를 갖는 직사각형 판(SS-F-SS-F)의 좌굴과 진동에 대한 엄밀해(exact solution)를 Frobenius 멱급법으로 구하였다. 좌굴하중과 고유진동수의 수치결과 및 이에 상응하는 모드형상을 계산하였다. 본 연구의 SS-F-SS-F 판은 자유 경계 조건을 갖는 모서리 ($y=0, b$)가 다른 조건 (고정 또는 단순지지)을 가지는 판과는 달리 임계 좌굴모멘트는 항상 하중방향(x)으로 반파 ($m=1$)를 가지는 모드에서 발생하였다.

x 방향으로 정현적(sinusoidal) 변위를 가정하던 변수 x 와 y 의 분리가 가능하게 되어 변계수를 가지는 상미분 방정식이 유도되며, 이 방정식의 엄밀해를 무한 멱급수의 형태로 나타내었다. 이 무한급수는 멱급수로 그 값을 구하는 일반적으로 사용하는 다른 함수들 (예, 삼각함수, 쌍곡함수, Bessel함수)과 동일하게 함수를 표현한다. 정확한 수치결과 즉 수렴된 값을 구하기 위해서는 그 급수의 충분한 수의 항을 택하여야만 한다. 이는 멱급수로 표현된 다른 모든 함수의 값을 구할 때에도 반드시 고려되어야 한다.

본 연구의 결과치와의 비교를 위한 근사법 (예, Ritz법, 유한요소법, 유한차분법 등)으로 구한 SS-F SS-F 판의 결과치가 알려지지 않아서 1차원 보 이론에 의한 측좌굴(lateral instability) 결과치(15)와의 비교연구가 이루어졌다. 긴 판($a/b > 5$)에 대한 결과치와 보 이론의 결과치는 매우 일치하였다.

본 연구는 단순지지된 모서리에 순수 휨모멘트를 받는 문제에 국한하였지만, 다양한 형태의 등변분포 (즉, 선형적으로 변하는) 면내응력을 받는 판의 문제를 위해 본 연구의 해석법이 사용될 수 있다. 하지만 σ_x 가 y 에 대해 비선형적으로 변하는 경우, 평면 탄성론(plane elasticity)을 이용하여 결정된 응력성분이 모두 x 와 y 의 함수가 되어 엄밀한 변수분리를 구할 수 없다.

감사의 글

이 논문은 2006학년도 중앙대학교 학술연구비 지원에 의한 것임.

참고문헌

1. Leissa, A. W., Vibration of Plates, Washington D.C. U.S. Govt. Printing Office, 1969, Reprinted 1993, by The Acoustical Society of America
2. Leissa, A. W., "The Free Vibration of Rectangular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol.31, No.3, 1973, pp. 257~293
3. Dickinson, S. M., "Lateral Vibration of Rectangular Plates Subject to In-Plane Forces," Journal of Sound and Vibration, Vol.16, No.3, 1971, pp. 465~472
4. Bassily, S.F and Dickinson, S. M., "Buckling and Lateral Vibration of Rectangular Plates Subject to In-Plane Loads -a Ritz Approach," Journal of Sound and Vibration, Vol.22, No.2, 1972, pp. 219~239
5. Bassily, S. F. and Dickinson, S. M., "Buckling and Vibration of In-Plane Loaded Plates Treated by a Unified Ritz Approach," Journal of Sound and Vibration, Vol.59, No.1, 1978, pp. 1~14
6. Dickinson, S.M., "The Buckling and Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Isotropic and Orthotropic Plates Using Rayleigh's Method," Journal of Sound and Vibration, Vol.61, No.1, 1978, pp. 1~8
7. Kaldas, M. M. and Dickinson, S. M., "Vibration and Buckling Calculations for Rectangular Plates Subject to Complicated In-Plane Stress Distributions by Using Numerical Integration in a Rayleigh-Ritz Analysis," Journal of Sound and Vibration, Vol.75, 1981, No.2, pp. 151~162
8. Ilanko, S. and Tillman, S. C., "The Natural Frequencies on In-Plane Stressed Rectangular Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol.98, No.1, 1985, pp. 25~34
9. Singh, J. P. and Dey, S. S., "Transverse Vibration of Rectangular Plates Subjected to In-Plane Forces by a Difference Based Variational Approach," International Journal of Mechanical Sciences, Vol.32, No.7, 1990, pp. 591~599
10. Laura, P. A. A., Larrondo, H. A., Cortinez, V. H. and Avalos, D. R., "Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Non-Uniform Thickness Subjected to a Uniform State of in-Plane Stress," Journal of Sound and Vibration, Vol.151, No.1, 1991, pp. 175~180
11. Leissa, A.W. and Kang, J.-H., "Exact Solutions for Vibration and Buckling of an SS-CSSC Rectangular Plate Loaded by Linearly Varying In-Plane Stresses," International Journal of Mechanical Sciences, Vol.44, No.9, 2002, pp. 1925~1945
12. Kang, J.-H. and Shim, H.-J., "Exact Solutions for the Free Vibrations of Rectangular Plates Having In-Plane Moments Acting on Two Opposite Simply Supported Edges," Journal of Sound and Vibration, Vol.273, No.4, 2004, pp. 933~948
13. Stein, O., "Die Stabilität der Blechträgerstehbleche im Zweiachsigen Spannungszustand," Stahlbau,

Vol.7, 1934, pp. 57~60

14. Chwalla, E., "Erläuterungen zur Begründung des Normblattenwurfes, Knick- und Beulvorschriften für Stahlbau," DIN E4114, 1940

15. Timoshenko, S., and Gere, J., Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., New York, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963

16. Klöppel, K. and Reuschling, D., "Beulwerte von Rechteckplatten mit linear veränderlichen Normalspannungen an der Querrändern und Konstanten Druckspannungen an der Längsrändern," Stahlbau, Vol.34, 1965, pp. 347~349

17. Bulson, P., The Stability of Flat Plates, London, Chatto & Windus, 1970

18. Japan Column Research Council, Handbook of Structural Stability, Tokyo, Corona Publishing Company, 1971

19. Nölke, K., "Biegungs-Beulung der Rechteckplatte mit eingespannter Längsrändern," Bauingenieur, Vol.17, 1936, p. 111

20. Nölke, K., "Biegungsbeulung der Rechteckplatte," Ingenieur Archiv, Vol.8, 1937, p. 403

21. Timoshenko, S., Bull. Polytech. Inst. Kiev., 1907

22. Timoshenko, S., Z. Math. Physik, Vol.58, 1910, p. 343

23. Cheung, Y.K., Chan, A.H.C., and L.G. Tham, "A Study on the Linear Elastic Stability of Mindlin Plates," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.22, 1986, pp. 117~132

24. Smith, S.T., Bradford, M.A., and Oehlers, D.J., "Local Buckling of Side-Plated Reinforced-Concrete Beams. I: Theoretical Study," J. Struct. Eng., ASCE, Vol.125, No.6, 1999, pp. 622~634

25. Bradford, M.A., Smith, S.T., and Oehlers, D.J., "Semi-Compact Steel Plates with Unilateral Restraint Subjected to Bending, Compression and Shear," Journal of Constructional Steel Research, Vol.56, 2000, pp. 47~67

26. Kang, J.-H. and Leissa, A.W., "Exact Solutions for the Buckling of Rectangular Plates Having Linearly Varying In-Plane Loading on Two Opposite Simply Supported Edges," International Journal of Solids and Structures, Vol.42, No.14, 2005, pp. 4220~4238

〈부 록〉

SS-F-SS-F 판은 Timoshenko와 Gere¹⁵⁾의 1차원 보 이론으로 해석될 수 있다. 단부모멘트(M)를 받고 있는 직사각형 단면($h \times b$)을 가진 폭이 좁은 보의 불안정을 지배하는 방정식은

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{M^2}{EI_y C} \phi = 0 \quad (13)$$

이다. 이 식에서 ϕ 는 단면의 비틀림 각, E는 영계수, I_y 는 y축(횡축)에 대한 주단면 2차 모멘트 ($I_y = bh^3/12$), C는 좁은 직사각형에 대한 비틀림강성 ($C = bh^3G/3$), G는 전단계수이다. 식 (13)은 ϕ 에 대해서 쉽게 풀 수 있으며, 보의 단부 ($x=0, a$)에서 ϕ 는 0이므로 임계하중을 구해주는 초월방정식이 다음과 같이 계산된다.

$$\sin \left[a\sqrt{M^2/EI_y C} \right] = 0 \quad (14)$$

이 식의 근 중 최소값이 임계하중 (M_{cr})

$$M_{cr} = (\pi/a)\sqrt{EI_y C} \quad (15)$$

이며, $D \equiv Eh^3/12(1-\nu^2)$ 과 $G = E/2(1+\nu)$ 를 이용하면 다음 식과 같은 무차원 임계모멘트 M_{cr}^* ($\equiv M_{cr}/D$)을 얻을 수 있다.

$$M_{cr}^* = \pi(b/a)\sqrt{2(1+\nu)(1-\nu)^2} \quad (16)$$

이 식은 본 연구의 해석결과와 비교된다.