

측정오차를 고려한 최적 공정평균의 경제적 설정 - 측차검사의 활용

박환수* · 장영순**†

* 한국과학기술원 산업공학과

** 명지대학교 경영학과

Economic Selection of the Optimal Process Mean Using Sequential Inspection to Reduce the Effect of Measurement Errors

Hwan Su Park* · Young Soon Chang**†

* Department of Industrial Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology

** Department of Business Administration, Myongji University

Key Words : Optimal Process Mean, Measurement Error, Sequential Inspection

Abstract

This paper considers the problem of selecting the most profitable process mean for production processes where measurement errors exist in inspection systems. For such situations, a sequential inspection procedure is proposed to reduce measurement errors. The decision to accept, reject, or take an additional inspection of an item is made at every measurement point until the number of repeated measurements reaches its upper bound. An expected profit model is constructed and the optimal process mean, the cut-off values, and the upper bound of the number of repeated measurements are obtained when accepted(rejected) items are sold at regular(reduced) price. A numerical study is performed to investigate the performance of the proposed procedure.

1. 서 론

품질관리 활동의 목적은 불량품의 발생을 최소화하여 소비자에게는 제품에 대한 신뢰와 만족을 주고, 생산자에게는 더 많은 이익을 주도록 하는 것이다. 이를 위해서는 규격을 만족하는 제품을 생산하도록 공정을 관리해야 한다. 즉, 품질특성치에 대한 적절한 목표값(target value)을 설정하여 생산공정이 이를 달성하도록 유도하여야 한다.

만일 고가의 원료를 필요로 하고 그 원료의 함량에 대한 규격하한만이 존재하는 제품의 경우, 원료의 함량을 결정하는 공정평균을 높게 설정하면 불량

률이 낮아져 불량품으로 인한 손실비용은 줄어드나 규격을 초과해서 사용된 원료로 인해 생산비용이 높아지게 된다. 반대로 공정평균을 낮게 설정하면 생산비용은 줄어드나 규격에 미달하는 불량품의 발생으로 인한 손실비용이 증가하게 된다. 그러므로 생산비용과 규격에 미달하는 제품에 대한 손실비용 등을 고려하여 단위제품당 기대이익을 최대로 하는 공정평균을 설정하는 것이 중요한 문제가 된다.

Hunter and Kartha(1977)와 Bisgaard et al. (1984)은 규격하한만이 존재하는 경우 규격을 만족하는 제품은 높은 가격으로 판매하고 미달하는 제품은 할인된 가격으로 판매할 때 최적공정평균을 결정하는 문제를 다루었고, Golhar and Pollock(1988) 등은 품질특성치가 규격하한에 미달하거나 일정 이

† 교신저자 yschang@mju.ac.kr

상 초과하는 제품을 재가공할 때 기대이익을 최대로 하는 공정평균을 결정하는 문제를 다루었다. 그 외에도 Boucher and Jafari(1991)와 Carlsson(1992)은 샘플링 검사에서 최적공정평균을 결정하는 문제를 다루었고, Elsayed and Chen(1993)과 Arcelus and Rahim(1994)은 다수의 품질특성치를 갖는 제품에 대한 최적공정평균을 설정하는 문제를 다루었으며, Bai and Lee(1993), Lee(2000), Lee and Elsayed(2002), Lee et al.(2005) 등은 대용품질특성을 이용한 검사에서의 최적공정평균을 설정하는 문제를 다루는 등 공정평균의 설정에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다.

제품을 검사하는 경우 측정물, 측정기기, 측정자 등으로 구성된 측정시스템의 내재적인 변동으로 인해 측정오차가 존재한다. Chen and Chung(1996)은 철재빔(steel beam)의 폭을 측정하는 경우, 유리, 플라스틱, 종이, 직물 등의 길이, 두께, 강도 등을 측정하는 경우, 용기에 담기는 음식물의 무게를 측정하는 경우 등에서 측정오차가 존재하는 것을 제시하였다. 측정오차가 큰 경우에는 이로 인해 제품의 양·불량을 잘못 판단하여 손실비용이 증가하게 되므로 반드시 측정오차를 고려하여야 한다. 이러한 이유로 공정평균의 설정에 관한 연구분야 뿐 아니라 샘플링검사, 전수검사, 관리도 등 품질관리의 여러 분야에서 측정오차를 고려한 연구들이 진행되어 왔다. 특히, Hong and Elsayed(1999)와 Duffuaa and Siddiqui(2003)는 측정오차가 공정평균의 설정에 미치는 영향을 분석하고 최적공정평균을 설정하는 문제를 다루었다.

이러한 연구들은 단순히 측정오차의 통계적 혹은 경제적인 효과만을 연구하였으나, Chandra and Schall(1988)과 박환수(2000)는 측정오차를 감소시키기 위한 반복측정 방법을 제안하였으며 Chen and Chung(1996)은 규격하한만이 존재할 때 반복검사를 실시하면 공정평균을 더 낮게 설정하여 생산비용을 감소시킬 수 있음을 보였다.

Chen and Chung(1996)은 품질특성치의 추정량으로 반복측정치의 평균을 사용하였으나, 일반적으로는 반복측정치들의 평균이 품질특성치의 최량추정량(best estimator)이 되지 않는다. 또한 위의 연구들은 측정대상이 되는 제품을 동일한 횟수로 반복 측정하는 경우를 다루었다. 그러나 품질특성치가 규격과 떨어져 있는 정도에 따라 측정오차가 제품의

양·불량 판단에 미치는 영향이 달라지므로 동일한 횟수로 반복측정하는 것은 합리적이지 못하다. 이는 품질특성치가 규격과 차이가 많이 나는 제품은 측정 오차가 비교적 큰 경우에도 양·불량에 대한 판단이 용이하나 규격근처에 있는 제품은 작은 측정오차에도 선별에 큰 영향을 받기 때문이다.

이 논문에서는 이러한 점을 고려하여 매 측정시에 제품을 양·불량으로 판단하거나 추가 측정을 필요로 하는 경우로 구분하고 측정 회수의 상한에 이를 때까지 이를 반복하는 축차검사방법을 제안하며, 반복측정치가 얻어진 경우 품질특성치의 참값에 대한 최량추정량을 이용하여 제품의 합격여부를 판단하는 모형을 제안한다. 이러한 검사방법을 적용하는 경우에 제품당 기대이익을 최대화하는 최적공정평균과 반복측정의 상한, 그리고 제품의 양·불량을 판단하기 위한 선별기각치를 구하는 문제를 다룬다. 이 논문의 구성은 다음과 같다. 제 2장에서는 반복 측정을 통한 최적공정평균을 설정하는 문제에 대해 다룬 후, 제 3장에서는 축차검사방법을 제안하고 제 4장에서 이의 성능을 평가한다.

2. 반복측정을 이용한 최적 공정평균의 설정

2.1 최량추정량

제품을 검사할 때 측정시스템의 변동으로 인해 측정오차가 존재하는 경우, Chandra and Schall(1988)과 Chen and Chung(1996)은 품질특성치 X 의 i 번째 측정값 Y_i 는

$$Y_i = X + \epsilon_i \tag{1}$$

와 같이 표현된다고 가정하였다. 여기서 $X \sim iidN(\mu, \sigma_x^2)$, $\epsilon_i \sim iidN(0, \sigma_\epsilon^2)$ 이고 X 와 ϵ_i 는 서로 독립이다. 부록 A의 i)에 의해 (X, Y_1, \dots, Y_n) 이 $(n+1)$ 변량 정규분포를 따르므로, n 개의 측정치 Y_1, \dots, Y_n 이 얻어진 경우 X 의 사후 확률밀도함수는 부록 A의 ii)에 의해 평균이 \hat{X}_n 이고 분산이 τ_n^2 인 정규분포가 된다. 여기서

$$\hat{X}_n = (n\bar{Y}_n\sigma_x^2 + \mu\sigma_\epsilon^2) / (n\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2), \tag{2}$$

$$\tau_n^2 = (\sigma_x^2\sigma_\epsilon^2) / (n\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2) \tag{3}$$

이다. Schewpe(1973)에 의하면 식 (2)의 \hat{X}_n 이 X 의 최량추정량이 된다. 이때, 추정오차 $e_n = \hat{X}_n - X$ 의 평균과 분산은 각각

$$E(e_n) = E(\hat{X}_n) - E(X) = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned} Var(e_n) &= Var(\hat{X}_n) + Var(X) \\ &\quad - 2Cov(\hat{X}_n, X) \\ &= \sigma_x^2 \sigma_e^2 / (n\sigma_x^2 + \sigma_e^2) \\ &= \sigma_e^2 / (n + \sigma_e^2 / \sigma_x^2) \end{aligned} \tag{5}$$

이 되어 \hat{X}_n 은 불편추정량(unbiased estimator)이 되고, 반복측정 횟수 n 이 증가할수록 측정오차가 추정치에 미치는 영향이 감소함을 알 수 있다.

Chen and Chung(1996)은 관측치의 평균인 \bar{Y}_n 를 사용할 것을 제안하였으나, \bar{Y}_n 를 사용하는 경우 $Var(\bar{Y}_n - X) = \sigma_e^2/n$ 이 되어 식 (5)의 $Var(e_n)$ 보다 크게 됨을 알 수 있다. 따라서 \bar{Y}_n 대신 \hat{X}_n 을 사용하면 추정의 오차가 줄어들어 제품에 대한 더욱 정확한 선별이 가능할 뿐 아니라 경제적인 측면에서도 우수할 것이다.

2.2 최적 공정평균

이 절에서는 제품에 대한 규격하한만이 주어지고 정상 및 할인 판매가격이 존재하는 경우 측정오차를 고려하여 최적공정평균과 최적 반복측정횟수를 결정하는 문제를 다룬다.

이러한 경우에는 n 번 반복측정을 실시한 후 얻어진 측정치 Y_1, \dots, Y_n 을 이용하여 \hat{X}_n 을 구하고 이를 규격하한 L 과 비교하여 제품의 양·불량을 판단할 수 있을 것이다. 즉, 식 (2)에서 $\hat{X}_n = (n\bar{Y}_n\sigma_x^2 + \mu\sigma_e^2) / (n\sigma_x^2 + \sigma_e^2)$ 이므로

$$\hat{X}_n > L \quad (\text{즉, } \bar{Y}_n > L - (\mu - L)\sigma_e^2/n\sigma_x^2) \tag{6}$$

이면 제품을 합격시키고, 그렇지 않으면 불합격 시키게 된다.

Hunter and Kartha(1977)의 연구에서 처음으로 사용된 단위제품당 이익 함수를 반복측정의 경우로 확장하면

$$\pi_r = \begin{cases} A_N - Cx - C_I n, & x > L \ \& \ \hat{X}_n > L \\ A_R - Cx - C_I n, & x > L \ \& \ \hat{X}_n \leq L \\ A_N - Cx - C_I n - C_p, & x \leq L \ \& \ \hat{X}_n > L \\ A_R - Cx - C_I n, & x \leq L \ \& \ \hat{X}_n \leq L \end{cases} \tag{7}$$

이 된다. 여기서 A_N 은 양품으로 판정된 제품의 정상판매가격, A_R 은 불량품으로 판정된 제품의 할인 판매가격, C 는 내용물의 단위당 생산비용, C_I 는 1회 검사당 검사비용, C_p 는 불량품을 양품으로 잘못 판단하여 판매하는 경우 발생하는 벌과비용이다.

따라서, $f(x, x_n)$ 을 (X, \hat{X}_n) 의 결합확률밀도함수라 할 때, 단위제품당 기대이익 $E(\pi_r)$ 은

$$\begin{aligned} E(\pi_r) &= \int_L^\infty \int_L^\infty (A_N - Cx - C_I n) f(x, x_n) dx dx_n \\ &\quad + \int_{-\infty}^L \int_{-\infty}^\infty (A_R - Cx - C_I n) f(x, x_n) dx dx_n \\ &\quad + \int_L^\infty \int_{-\infty}^L (A_N - Cx - C_I n - C_p) f(x, x_n) dx dx_n \end{aligned} \tag{8}$$

이 되고, 부록 A의 iii)에 의해 (X, \hat{X}_n) 은 이변량 정규분포를 따르므로 식 (8)은

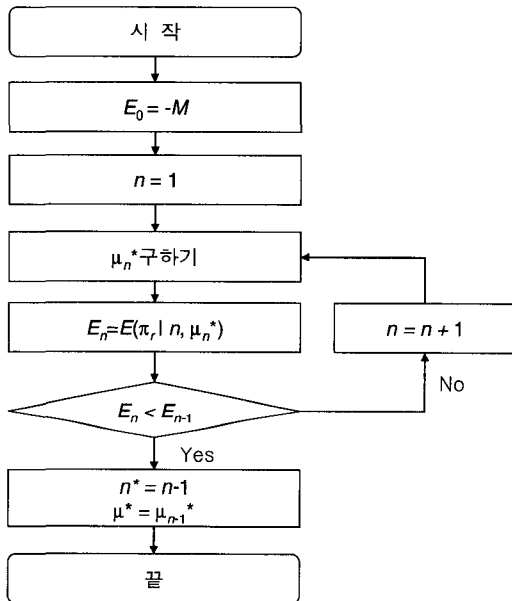
$$\begin{aligned} E(\pi_r) &= (A_R - A_N)\Phi(L_1) + A_N - C\mu \\ &\quad - C_I n - C_p \Phi(L_x, -L_1; \rho_0) \end{aligned} \tag{9}$$

로 간단히 할 수 있다. 여기서 $\Phi(\cdot)$ 은 표준정규분포의 누적분포함수, $\Phi(\cdot, \cdot; \rho)$ 는 상관계수가 ρ 인 2변량 표준정규분포의 누적분포함수,

$$\begin{aligned} L_1 &= (L - \mu) / \sqrt{n\sigma_x^4 / (n\sigma_x^2 + \sigma_e^2)}, \quad L_x = (L - \mu) / \sigma_x, \\ \rho_0 &= -\sigma_x / \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_e^2/n} \text{이다.} \end{aligned}$$

최적의 공정평균과 반복측정횟수를 구하기 위해서는 식 (9)의 기대이익함수를 최대로 하는 μ^* 와 n^* 를 구하면 된다. 그러나 n 이 정수이므로 미분을 통해 해석적으로 이러한 값을 얻기는 쉽지 않다. 따라서, 이 논문에서는 먼저 n 이 주어진 경우 μ_n^* 와 $E(\pi_r | n, \mu_n^*)$ 을 구하고, n 을 변화시켜 가면서 최적의 $E^*(\pi_r)$ 을 구하였다. 최적화를 위해서는 다양한 모수에 대해 n 과 그때의 μ_n^* 를 대입한 기대비용이 볼록함수(concave function)가 되어야 하는데, 이를 해석적으로 보이기에는 쉽지 않다. 그러나 많은 모수와 비용요소에 대해 기대이익 함수의 값을 수치적

으로 구해본 결과 $E(\pi_r)$ 이 n 에 대해 볼록함수가 됨을 알 수 있었다. 따라서 <그림 1>과 같이 먼저 n 이 주어진 경우의 μ_n^* 를 구하고, n 을 변화시켜 가면서 최대 기대이익이 보장되는 n^* 와 μ^* 를 구하면 된다. 이때, n 이 주어진 경우 μ_n^* 는 수치적 방법인 Hooke and Jeeves(1961)의 pattern search 방법을 이용하였다.



주) M 은 알고리즘의 일반화를 위해 사용한 큰 값
 <그림 1> 최적해 탐색 절차

<표 1> n 의 변화에 따른 최적해

n	μ_n^*	$E(\pi_r n, \mu_n^*)$
5	1.583	12.352
6	1.577	12.376
7	1.571	12.378
8	1.567	12.364

<표 1>은 <표 2>의 '경우 1'에 대해 <그림 1>의 알고리즘을 사용하여 n 을 변화시켜가면서 최적해를 얻는 과정을 나타낸 것으로 $n=7$ 인 경우에 최적해가 얻어지는 것을 보여준다. <표 2>는 Chen and Chung(1996)이 사용한 경우를 기반으로 다양한 비용모수들과 공정모수들에 대해 결정변수를 구한 것이다. 이 표로부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

- i) \hat{X}_n 을 이용하는 것이 \bar{Y}_n 를 이용하는 것보다 모든 경우에서 제품당 기대이익이 증가하고 반복 측정횟수가 감소한다.
- ii) 측정오차의 분산이 크거나(경우 16) 품질특성치의 분산이 작은 경우(경우 15)에는 \bar{Y}_n 에 비해 \hat{X}_n 의 이용효과가 증가한다. 이는 측정오차가 클수록 \hat{X}_n 이 \bar{Y}_n 에 비해 상대적으로 정확도가 더 높기 때문이다.
- iii) n^* 가 큰 경우일수록 \hat{X}_n 의 이용효과가 감소한다. 이는 n 이 증가할수록 $\hat{X}_n - \bar{Y}_n = \sigma_c^2(\mu - \bar{Y}_n) / (n\sigma_x^2 + \sigma_c^2)$ 의 값이 감소하여 \hat{X}_n 과 \bar{Y}_n 을 이용하는 검사방법에 큰 차이가 없기 때문이다.

3. 측차검사를 이용한 최적 공정평균의 설정

3.1 측차검사 방법

품질특성치의 값이 규격근처에 있는 경우에는 그렇지 않은 경우보다 작은 측정오차에도 제품의 양불량 판단에 큰 영향을 받는다. 즉, 측정오차가 큰 경우에도 규격에서 멀리 떨어진 제품의 경우에는 비교적 정확하게 양불량 판단을 할 수 있는 반면 규격 근처에 있는 제품의 경우에는 양품을 불량품으로 판단하거나 불량품을 양품으로 잘못 판단할 확률이 높게 된다. 따라서 모든 제품을 동일한 횟수로 반복측정하기 보다는 규격과 차이가 많이 나는 제품은 적은 횟수의 반복측정을 실시하고, 규격근처에 있는 제품은 많은 횟수의 반복측정을 실시하는 것이 더욱 효율적이라 할 수 있다. 이 절에서는 이러한 점에 근거하여 반복측정 횟수를 변화시키는 측차검사 방법을 제안한다.

측차검사방법은 측정치를 얻을 때마다 양불량, 혹은 추가검사를 결정하는 검사방법이다. 즉, 측정시점에서 누적하여 얻어진 품질특성치의 추정치가 i) 합격판정 선별기각치보다 크면 양품으로 판단하고 ii) 불합격 판정 선별기각치 보다 작으면 불량품으로 판단하며, iii) 두 선별기각치 사이에 존재하면 한번 더 측정하여 위의 과정을 반복하는 것이다.

부록 A의 ii)에 의해 Y_1, \dots, Y_i 가 주어진 경우 X 의 분포는 \hat{X}_i 를 평균으로 하고 τ_i^2 을 분산으로 하는

<표 2> 반복측정시 \hat{X}_n 을 이용한 경우의 수행도

경우	모수								최적해				기대이익		PD
	A_N	A_R	C	C_p	C_l	L	σ_x^2	σ_ϵ^2	$\mu_{\hat{X}_n}^*$	$\mu_{\bar{Y}_n}^*$	$n_{\hat{X}_n}^*$	$n_{\bar{Y}_n}^*$	$E(\pi_{\hat{X}_n})$	$E(\pi_{\bar{Y}_n})$	
1	57.5	27.0	25	60	0.10	1.20	0.10	0.075	1.571	1.565	7	8	12.378	12.267	0.91
2	69.0	27.0	25	60	0.10	1.20	0.10	0.075	1.654	1.644	6	7	22.795	22.500	1.31
3	46.0	27.0	25	60	0.10	1.20	0.10	0.075	1.361	1.353	8	10	3.001	2.988	0.41
4	57.5	32.4	25	60	0.10	1.20	0.10	0.075	1.512	1.508	7	8	13.175	13.096	0.60
5	57.5	21.6	25	60	0.10	1.20	0.10	0.075	1.617	1.605	5	8	11.882	11.609	2.35
6	57.5	27.0	30	60	0.10	1.20	0.10	0.075	1.501	1.493	8	9	4.653	4.618	0.77
7	57.5	27.0	20	60	0.10	1.20	0.10	0.075	1.647	1.635	5	7	20.626	20.270	1.76
8	57.5	27.0	25	72	0.10	1.20	0.10	0.075	1.581	1.577	7	8	12.095	12.034	0.51
9	57.5	27.0	25	40	0.10	1.20	0.10	0.075	1.565	1.555	5	7	12.788	12.515	2.18
10	57.5	27.0	25	60	0.12	1.20	0.10	0.075	1.577	1.569	6	7	12.256	12.120	1.12
11	57.5	27.0	25	60	0.08	1.20	0.10	0.075	1.567	1.561	8	9	12.524	12.435	0.71
12	57.5	27.0	25	60	0.10	1.44	0.10	0.075	1.811	1.805	7	8	6.378	6.267	1.77
13	57.5	27.0	25	60	0.10	0.96	0.10	0.075	1.331	1.325	7	8	18.378	18.267	0.61
14	57.5	27.0	25	60	0.10	1.20	0.12	0.075	1.574	1.569	7	8	11.660	11.583	0.67
15	57.5	27.0	25	60	0.10	1.20	0.80	0.075	1.566	1.564	7	8	13.284	13.113	1.30
16	57.5	27.0	25	60	0.10	1.20	0.10	0.090	1.578	1.571	7	8	12.257	12.120	1.13
17	57.5	27.0	25	60	0.10	1.20	0.10	0.060	1.569	1.562	6	7	12.522	12.435	0.71

주) PD = $100 \times [E(\pi_{\hat{X}_n}) - E(\pi_{\bar{Y}_n})] / E(\pi_{\bar{Y}_n})$

정규분포가 되므로 매 측정시마다 X 는 일정한 확률로 $\hat{X}_i - \kappa_L \tau_i$ 와 $\hat{X}_i + \kappa_U \tau_i$ 사이에 존재하게 된다. 그러므로 $\hat{X}_i > h_i = L + \kappa_L \tau_i$ 이면 제품이 양품이라고 판정하고, $\hat{X}_i \leq l_i = L - \kappa_U \tau_i$ 이면 제품이 불량품이라고 판정하며, \hat{X}_i 가 l_i 와 h_i 사이에 존재하면 제품의 양불량에 대한 판단을 유보하고 한번더 측정을 하는 방법을 사용할 수 있을 것이다. 이러한 절차를 계속 반복하면 τ_i 가 0에 접근하게 되어 결국 선별기 각치가 규격에 근접하게 된다. 그러나 측정이 언제 끝나게 될지 모르게 되므로 이 논문에서는 반복측정 횟수를 최대 n_U 로 제한한다. 이 때, 식 (2)로부터 \hat{X}_i 는

$$\begin{aligned} \hat{X}_i &= \frac{i \bar{Y}_i \sigma_x^2 + \mu \sigma_\epsilon^2}{i \sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2} \\ &= \frac{(i-1) \bar{Y}_{i-1} \sigma_x^2 + \mu \sigma_\epsilon^2}{(i-1) \sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2} \cdot \frac{(i-1) \sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2}{(i-1) \sigma_x^2 + \sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2} \\ &\quad + \frac{Y_i \sigma_x^2}{(i-1) \sigma_x^2 + \sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2} \\ &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{\tau_{i-1}^2 + \sigma_\epsilon^2} \hat{X}_{i-1} + \frac{\tau_{i-1}^2}{\tau_{i-1}^2 + \sigma_\epsilon^2} Y_i \end{aligned}$$

이 되어 Y_i 를 얻을 때마다 \hat{X}_i 를 간단히 구할 수 있다.

이상과 같은 측차검사방법의 운영절차를 요약하면 다음과 같다. i 번째 관측치를 얻었을 때,

- i) $i \leq n_U - 1$ 인 경우
 - (a) $\hat{X}_i > h_i$ 이면 제품을 양품이라고 판정한다.
 - (b) $\hat{X}_i \leq l_i$ 이면 제품을 불량품이라고 판정한다.
 - (c) $l_i < \hat{X}_i \leq h_i$ 이면 측정치를 하나 더 얻을 후, $i < n_U - 1$ 인 경우에는 위의 절차를 반복하고, $i = n_U - 1$ 인 경우에는 다음의 ii)를 적용한다.
- ii) $i = n_U$ 인 경우 $\hat{X}_i > L$ 이면 제품을 양품이라고 판정하고 $\hat{X}_i \leq L$ 이면 제품을 불량품이라고 판정한다.

3.2 단위제품당 기대이익

i 번째 반복측정에서 양품을 양품으로 판정하여 판매할 경우의 단위 제품당 이익을 $\pi_{i,1}$, 불량품을 양품으로 잘못 판정하여 판매할 경우의 이익을 $\pi_{i,2}$, 제품을 불량품이라고 판정하여 할인판매할 경우의 이

익을 $\pi_{i,3}$ 이라고 하면 식 (7)의 비용요소를 활용하여

- i) $\pi_{i,1} = A_N - Cx - C_I i$,
- ii) $\pi_{i,2} = A_N - Cx - C_I i - C_p$,
- iii) $\pi_{i,3} = A_R - Cx - C_I i$

이 된다. 위의 i), ii), iii) 각각의 경우가 발생할 확률을 이용하여 단위제품당 기대이익 함수 $E(\pi_s)$ 를 구하면

$$E(\pi_s) = A_N \{ \sum_{i=1}^{n_U-1} \Psi_i(h_i, \infty) + \Psi_{n_U}(L, \infty) \} \quad (10)$$

$$+ A_R \{ \sum_{i=1}^{n_U-1} \Psi_i(-\infty, l_i) + \Psi_{n_U}(-\infty, L) \}$$

$$- C_I [\sum_{i=1}^{n_U-1} i \{ \Psi_i(-\infty, l_i) + \Psi_i(h_i, \infty) \} + n_U \Psi_{n_U}(-\infty, \infty)]$$

$$- C_p \{ \sum_{i=1}^{n_U-1} \Omega_i(h_i, \infty) + \Omega_{n_U}(L, \infty) \}$$

$$- C_p \{ \sum_{i=1}^{n_U-1} \Omega_i(h_i, \infty) + \Omega_{n_U}(L, \infty) \}$$

$$- C\mu$$

이 된다. 여기서

$$\Omega_j(a, b) = \int_a^b \int_{l_{j-1}}^{h_{j-1}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \int_{-\infty}^L \omega_j \cdot dx dx_1 \dots dx_{j-1} dx_j$$

$$\Psi_j(a, b) = \int_a^b \int_{l_{j-1}}^{h_{j-1}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \psi_j \cdot dx_1 \dots dx_{j-1} dx_j$$

이고, ω_j 는 X, X_1, \dots, X_j 의 결합밀도 함수로 부록 A의 iii)에 의해 $(j+1)$ 변량 정규분포의 확률밀도함수이며 ψ_j 는 X_1, \dots, X_j 의 결합밀도 함수로 j 변량 정규분포의 확률밀도함수이다. 식 (10)에 대한 유도과정은 부록 B에 정리되어 있다.

단위제품당 기대이익을 최대화 하는 결정변수를 구하기 위해서는 식 (10)을 최대화 하는 $\mu^*, n_U^*, \kappa_L^*, \kappa_U^*$ 를 얻어야 한다. 그러나 $E(\pi_s)$ 의 형태가 매우 복잡하여 이를 해석적으로 구하기는 어려운 일이다. 따라서 제 2.2절의 <그림 1>에서 제시한 바와 같이 n 을 변화시켜 가면서 최적해를 탐색하는 절차를 거쳐야 한다. 그러나 $E(\pi_s)$ 를 구하는 과정에서 다중적분값을 Gauss 적분법과 같은 수치해석적인 적분방법으로 구하는 경우에는 적분의 차수가 증가할 수록 계산시간이 급격하게 증가한다. 따라서 이 연구에서는 다중적분을 빠르게 계산하기 위해 Moran(1984)이 제안한 Monte Carlo 모의실험 방법을 이용하였다.

3.3 수치 예제

어떤 화학물을 용기에 담아 판매하는 공장에서 제품의 규격하한이 $L = 1.2Kg$ 이고, 제품이 용기에 담겨지는 양은 $N(\mu, 0.1^2)$ 을 따른다고 한다. 규격을 만족하는 제품은 $A_N = 57.5$ 만원으로 판매하고, 규격에 미달하는 제품은 $A_R = 27$ 만원에 판매하며, 불량품을 양품으로 잘못 판단하여 판매하였을 경우 발생하는 벌과비용 $C_p = 60$ 만원, 화학물의 $1Kg$ 당 생산비용은 $C = 25$ 만원이다. 측정오차는 $N(0, 0.075^2)$ 을 따르고 1회당 검사비용은 0.1만원이라고 할 때, 측차검사를 활용하고자 한다. 제 3.2절에서 제시한 단위제품당 기대이익을 최대로 하는 해를 구하면, $\mu^* = 1.493Kg$, $n_U^* = 15$, $\kappa_U^* = 1.894$, $\kappa_L^* = 1.916$ 이고 $E(\pi_s) = 13.909$ 만원이다. 따라서, 공정평균을 $1.493Kg$ 으로 설정한 후 생산된 화학물의 양을 연속적으로 측정하여 얻어진 \hat{X}_i 값이 $l_i = 1.2 - 1.894 \cdot \sqrt{0.0075} / (0.1i + 0.075)$ 보다 작으면 불량으로 판정하고 $h_i = 1.2 + 1.916 \cdot \sqrt{0.0075} / (0.1i + 0.075)$ 보다 크면 양품으로 판정한다. 만일 14회까지의 반복측정에서도 제품의 양불량을 판단하지 못한 경우에는 \hat{X}_{15} 를 얻어 규격 L 과 비교하여 제품의 양불량을 판단한다.

4. 수행도 평가

4.1 측차검사 방법의 성능 평가

이 절에서는 제 3절에서 제안된 측차검사방법의 수행도를 반복검사방법의 수행도와 비교한다. <표 3>은 <표 2>의 각 경우에 대해 측차검사를 적용할 때 얻어진 것으로, 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

- i) 측차검사방법이 반복검사보다 모든 경우에 대해 기대이익이 더 크다.
- ii) A_N, C_I 가 작거나(경우 3,11) C, C_p 가 커서(경우 6,8) 측정횟수가 비교적 크게 되는 조건일 수록 반복검사보다 제안된 측차검사의 경제성이 두드러진다. 즉, 측차검사가 반복검사에 비해 검사비용을 상당량 줄여주는 것을 알 수 있다.
- iii) 각 공정모수와 비용모수의 변화에 대한 μ^* 와 n_U^* 의 변화는 반복검사방법과 유사한 형태를 보

인다. 즉, 정상판매가격과 검사비용이 낮을 수록 (경우 3,11), 할인판매가격과 생산비용이 높을 수록(경우 4,6) μ^* 는 낮아지고 n_U^* 는 증가한다. 또한 벌과비용이 높을수록(경우 8) μ^* 와 n_U^* 는 증가한다.

- iv) 측정오차의 분산이 클수록(경우 16) μ^* 와 n_U^* 는 증가하며, 품질특성치의 분산이 클수록(경우 14) μ^* 는 증가하고 n_U^* 는 감소한다.

<표 3> 측차검사의 수행도

경우	μ^*	n_U^*	κ_U^*	κ_L^*	$E(\pi_s)$	PD
1	1.493	15	1.894	1.916	13.909	12.37
2	1.598	12	1.998	1.988	24.298	6.59
3	1.244	17	2.128	1.723	4.776	59.15
4	1.425	14	1.878	1.875	15.304	16.16
5	1.551	9	1.717	1.730	13.204	11.13
6	1.431	17	1.841	1.806	7.246	55.73
7	1.571	11	2.038	1.933	21.952	6.43
8	1.499	16	1.916	1.910	13.922	15.11
9	1.474	10	1.895	1.918	14.180	10.89
10	1.501	13	1.901	1.918	13.661	11.46
11	1.491	18	1.910	1.914	14.306	14.23
12	1.734	16	1.933	1.946	7.827	22.72
13	1.254	15	1.975	1.891	20.116	9.46
14	1.506	14	1.872	1.923	12.873	10.40
15	1.477	16	2.016	1.892	15.275	14.99
16	1.500	16	1.905	1.900	14.066	14.76
17	1.485	14	1.907	1.905	14.098	12.59

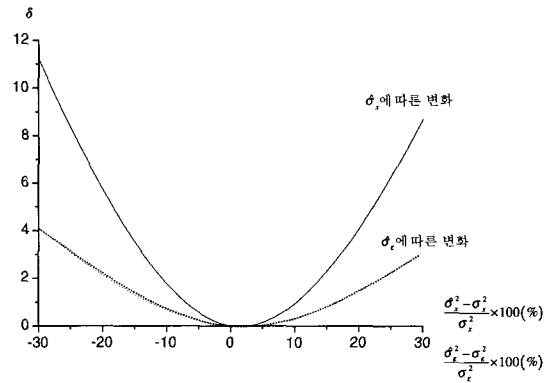
4.2 민감도 분석

이 논문에서 제안한 \hat{X}_n 을 품질특성치 X 의 추정치로 사용하기 위해서는 공정의 변동의 나타내는 σ_x^2 와 측정시스템의 변동을 나타내는 σ_e^2 을 사전에 추정해야 한다. σ_x^2 와 σ_e^2 의 추정치는 일반적으로 Gauge R&R 분석을 통해 얻을 수 있다. 이에 대한 자세한 내용은 배도선 등(1999)에 자세히 정리되어 있다. 그러나 σ_x^2 와 σ_e^2 의 추정에 오류가 존재할 수 있으므로 이 절에서는 이들을 잘못 추정한 경우의 단위 제품당 기대이익의 변화를 살펴본다.

모수의 참값이 θ 일 때, 단위 제품당 기대이익을 $E_{\pi_s}(\theta)$ 라 하면 θ 를 $\hat{\theta}$ 으로 추정된 경우의 단위 제품당 기대이익의 변동을 δ 는

$$\delta = \frac{E_{\pi_s}(\hat{\theta}) - E_{\pi_s}(\theta)}{E_{\pi_s}(\theta)} \times 100(\%)$$

이다.



<그림 2> σ_x^2 및 σ_e^2 의 잘못된 추정에 따른 $E(\pi_s)$ 의 변화

<그림 2>는 3.3절의 예제에서 σ_x^2 와 σ_e^2 를 각각 30%까지 잘못 추정했을 때의 단위 제품당 기대이익의 변동률을 나타낸 것이다. <그림 2>에서 제안된 검사방법은 σ_x^2 와 σ_e^2 를 참값보다 작게 추정할 경우가 크게 추정할 경우보다 기대이익에 미치는 영향이 조금 더 크고, σ_e^2 의 잘못된 추정에 비해 σ_x^2 의 잘못된 추정이 기대이익에 더 많은 영향을 미치게 됨을 알 수 있다.

5. 결 론

일반적으로 공정의 총변동에서 측정오차의 변동이 차지하는 비율이 10%이하이면 측정시스템이 매우 우수하다고 평가하고, 10%~30%이면 경우에 따라 허용 가능하다고 판단한다(Zipin, 1982). 만일 그 값이 30%를 초과하는 경우에는 측정오차의 감소를 위한 적절한 수정조치를 취해야 한다. 그러나 경제적인 이유 등으로 측정시스템의 정확도 향상이 어려운 경우에는 반복측정을 실시하는 것이 효과적임이 많은 연구들에 의해 증명되었다.

이 논문에서는 반복측정을 실시하는 경우, 검사회수의 상한이 존재하는 측차검사를 사용할 것을 제안하고, 생산비용, 벌과비용, 검사비용 등을 고려하여 단위제품당 기대이익을 유도하였으며, 이를 최대화하는 최적의 공정평균과 반복측정횟수의 상한 및 제

품의 양불량을 판단하는 선별기각치를 구하였다. 또한, 반복측정에 있어 측정치의 평균보다는 최량추정량을 사용할 것을 제안하였다. 제안된 모형의 수행도를 분석한 결과 측정오차가 존재하는 경우 제안하는 측차검정방법을 사용하는 것이 경제적으로 우수함을 보였다.

이 논문에서 제안하는 측차검사를 적용하기 위해서는 관측치가 얻어질 때마다 추정치 \hat{x}_i 를 구해야 한다. 따라서, 이 논문에서 제안하는 방법은 제품을 수작업으로 측정하는 공정보다는 자동검사장비(auto-matic inspection system)를 사용하는 공정에 쉽게 적용이 가능할 것이다.

추후 연구로는 매 검사마다 통계량을 얻어 제품을 선별하는 측차검사를 수행하기 어려운 경우에 비교적 손쉽게 적용이 가능하도록 검사횟수를 n_1 과 n_2 의 2회로 제한하는 2단계 검사를 적용하여 보는 것을 고려할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] 박환수(2000), “반복측정을 이용한 최적공정 평균의 설정”, 한국과학기술원 석사학위 논문.
- [2] 배도선, 류문찬, 권영일, 윤원영, 김상부, 홍성훈, 최인수(1999), 「최신 통계적 품질관리」, 개정판, 영지문화사.
- [3] Arcelus, F. J. and Rahim, M. A.(1994), “Simultaneous Economic Selection of a Variables and an Attribute Target Mean”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, pp. 125-133.
- [4] Bai, D. S. and Lee, M. K.(1993), “Optimal Target Values for a Filling Process When Inspection is Based on a Correlated Variable”, *International Journal of Production Economics*, Vol. 32, pp. 327-334.
- [5] Bisgaard, S., Hunter, W. G., and Pallesen, L.(1984), “Economic Selection of Quality of Manufactured Product”, *Technometrics*, Vol. 26, pp. 9-18.
- [6] Boucher, T. O. and Jafari, M. A.(1991), “The Optimum Target Value for Single Filling Operations with Quality Sampling Plans”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 23, pp. 44-47.
- [7] Carlsson, O.(1992), “Quality Selection of a Two-Dimensional Process Level under Single Acceptance Sampling by Variables”, *International Journal of Production Economics*, Vol. 7, pp. 43-56.
- [8] Chandra, M. J. and Schall, S.(1988), “The Use of Repeated Measurements to Reduce the Effect of Measurement Errors”, *IIE Transactions*, Vol. 20, pp. 83-87.
- [9] Chen, S. L. and Chung, K. J.(1996), “Selection of the Optimal Precision Level and Target Value for a Production Process : The Lower-Specification-Limit Case”, *IIE Transactions*, Vol. 28, pp. 979-985.
- [10] Duffuaa, S. O. and Siddiqui, A. W.(2003), “Process Targeting with Multi-Class Screening and Measurement Error”, *International Journal of Production Research*, Vol. 41, pp. 1373-1391.
- [11] Elsayed, E. A. and Chen, A.(1993), “Optimal Levels of Process Parameters for Products with Multiple Characteristics”, *International Journal of Production Research*, Vol. 31, pp. 1117-1132.
- [12] Golhar, D. Y. and Pollock, S. M.(1988), “Determination of the Optimal Process Mean and the Upper Limit for a Canning Problem”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 20, pp. 188-192.
- [13] Hong, S. H. and Elsayed, E. A.(1999), “The Optimum Mean for Processes with Normally Distributed Measurement Error”, *Journal of Quality Technology*, Vol. 31, pp. 338-344.
- [14] Hooke, R. and Jeeves, T. A.(1961), “Direct Search Solution for Numerical and Statistical Problem”, *Journal of the Association of Computing Machinery*, Vol. 8, pp. 212-229.
- [15] Hunter, W. G. and Kartha, C. D.(1977), “Determining the Most Profitable Target Value for a Production Process”, *Journal*

of Quality Technology, Vol. 9, pp. 176-180.

[16] Lee, M. K.(2000), "Determination of Optimum Process Mean and Screening Limit for a Production Process Based on Two Correlated Variables", *Journal of Korean Society for Quality Management*, Vol. 28, pp. 155-164.

[17] Lee, M. K. and Elasyed, E. A.(2002), "Process Mean and Screening Limits for Filling Processes under Two-Stage Screening Procedure", *European Journal of Operational Research*, Vol. 138, pp. 118-126.

[18] Lee, M. K., Kwon, H. M., Kim, Y. J., and Bae, J. H.(2005), "Determination of Optimal Target Values for a Production Process Based on Two Surrogate Variables", *Lecture Note in Computer Science*, Vol. 3483, pp. 232-240.

[19] Moran, P. A. P.(1984), "The Monte Carlo Evaluation of Orthant Probabilities for Multivariate Normal distributions", *Australian Journal of Statistics*, Vol. 26, pp. 39-44.

[20] Schweppe, F. C.(1973), *Uncertain Dynamic Systems*, Prentice-Hall, New Jersey.

[21] Zipin, R. B.(1982), "The Risks due to Measurement Errors", in *Inspection and Quality Control in Manufacturing Systems*, ASEM Publications, Vol. 6, pp. 9-23.

부 록

A. 품질특성치, 측정치, 추정량의 분포

i) (X, Y_1, \dots, Y_n) 은 평균이 $\mu_1 = (\mu, \dots, \mu)$, 분산-공분산행렬이 $\Sigma_1 = \{\sigma_{pq}\}$ 인 $(n+1)$ 변량 정규분포를 따른다. 여기서

$$\sigma_{pq} = \begin{cases} \sigma_x^2, & \text{if } p = q = 1 \\ \text{or } p \neq q, p \geq 2, q \geq 2 \\ \sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2, & \text{if } p = q, p \geq 2, q \geq 2 \end{cases}$$

이다.

[증명] $Y_1 | x, \dots, Y_n | x$ 들은 서로 독립이므로 X 와 이들의 결합확률밀도함수는

$$\begin{aligned} f(x, y_1, \dots, y_n) &= f(x)f(y_1 | x) \cdots f(y_n | x) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n+1} \sigma_x \sigma_\epsilon^n} \exp -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x-\mu}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y_1-x}{\sigma_\epsilon} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{y_n-x}{\sigma_\epsilon} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

으로 평균이 μ_1 이고 분산공분산 행렬이 Σ_1 인 $n+1$ 변량 정규분포의 확률밀도함수가 된다. 따라서 $(X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 는 $n+1$ 변량 정규분포를 따른다.

ii) $X|y_1, \dots, y_n$ 은 평균이 \hat{X}_n , 분산이 τ_n^2 인 정규분포를 따른다. 여기서,

$$\begin{aligned} \hat{X}_n &= (ny_n \sigma_x^2 + \mu \sigma_\epsilon^2) / (n\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2), \\ \tau_n^2 &= (\sigma_x^2 \sigma_\epsilon^2) / (n\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2) \end{aligned}$$

이다.

[증명] i)에 의해 (X, Y_1, \dots, Y_n) 은 평균이 μ_1 이고 분산공분산 행렬이 Σ_1 인 $(n+1)$ 변량 정규분포를 따르므로 평균벡터와 분산공분산 행렬을

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu, \mu_2 = \mu \mathbf{1}_n, \mathbf{y}_n = (y_1, \dots, y_n)', \\ \Sigma_{11} &= \sigma_x^2, \Sigma_{12} = \sigma_x^2 \mathbf{1}_n', \Sigma_{12} = \sigma_x^2 \mathbf{1}_n', \\ \Sigma_{22} &= \sigma_\epsilon^2 \mathbf{I}_n + \sigma_x^2 \mathbf{J}_n \end{aligned}$$

와 같이 분해하면 $X|y_1, \dots, y_n \sim N(\mu_{1.2}, \sigma_{11.2}^2)$ 이 된다. 여기서 $\mathbf{1}_n$ 은 모든 원소가 1인 $(n \times 1)$ 행렬, \mathbf{I}_n 은 $(n \times n)$ 단위행렬, \mathbf{J}_n 은 모든 원소가 1인 $(n \times n)$ 행렬을 의미하고,

$$\begin{aligned} \mu_{1.2} &= \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (\mathbf{y}_n - \mu_2), \\ \sigma_{11.2}^2 &= \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \end{aligned}$$

이다. 이때, $\Sigma_{22}^{-1} = [\mathbf{I}_n - \sigma_x^2 / (\sigma_\epsilon^2 + n\sigma_x^2) \mathbf{J}_n] / \sigma_\epsilon^2$ 이 되므로 $X|y_1, \dots, y_n$ 의 평균과 분산은 각각 \hat{X}_n 과 τ_n^2 이 된다.

iii) $(X, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$ 은 평균이 $\mu_2 = (\mu, \dots, \mu)$, 분산-공분산행렬이 $\Sigma_2 = \{\sigma_{pq}\}$ 인 $(n+1)$ 변량 정규분포를 따른다. 여기서

$$\sigma_{pq} = \begin{cases} \sigma_x^2, & \text{if } p = q = 1 \\ (q-1)\sigma_x^4 / \{(q-1)\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2\}, & \text{if } p = 1, q \geq 2 \\ & \text{or } 2 \leq q < p \\ (p-1)\sigma_x^4 / \{(p-1)\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2\}, & \text{if } q = 1, p \geq 2 \\ & \text{or } 2 \leq p \leq q \end{cases}$$

이다.

[증명] $X \sim MVN_n(\mu, \Sigma)$ 이고, A 는 $p \times n$ 행렬, b 는 $p \times 1$ 행렬이라 하면, $AX + b \sim MVN_p(A\mu + b, A\Sigma A')$ 라는 사실이 알려져 있다. 이때, $X = (X, Y_1, \dots, Y_n)'$, $A = \{a_{pq}\}$, $b = \{b_q\}$ 라 하자. 여기서,

$$a_{pq} = \begin{cases} 1, & \text{if } p = q = 1 \\ \sigma_x^2 / \{(p-1)\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2\}, & \text{if } 2 \leq p \leq q \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$b_q = \begin{cases} 0, & \text{if } q = 1 \\ \sigma_x^2 / \{(q-1)\sigma_x^2 + \sigma_\epsilon^2\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다. $AX + b = (X, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)'$ 이 되므로 $(X, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$ 은 평균이 $A\mu + b = \mu_2$, 분산-공분산 행렬이 $A\Sigma A' = \Sigma_2$ 인 $(n+1)$ 변량 정규분포를 따른다.

B. 축차검사 경우의 단위제품당 기대이익

제 3.1절에서 제안한 축차검사에 따른 단위제품당 기대이익은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$E(\pi_s) = \int_{h_1}^\infty \int_L^\infty \pi_{11}\omega_1 dx dx_1$$

$$+ \int_{h_1}^\infty \int_{-\infty}^L \pi_{12}\omega_1 dx dx_1$$

$$+ \int_{-\infty}^{l_1} \int_{-\infty}^\infty \pi_{13}\omega_1 dx dx_1$$

$$+ \int_{h_2}^\infty \int_{l_1}^{h_1} \int_L^\infty \pi_{21}\omega_2 dx dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{h_2}^\infty \int_{l_1}^{h_1} \int_{-\infty}^L \pi_{22}\omega_2 dx dx_1 dx_2$$

$$+ \int_{-\infty}^{l_2} \int_{l_1}^{h_1} \int_{-\infty}^\infty \pi_{23}\omega_2 dx dx_1 dx_2$$

$$+ \dots$$

$$+ \int_{h_{n_v-1}}^\infty \int_{l_{n_v-2}}^{h_{n_v-2}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \int_L^\infty \pi_{(n_v-1)1}\omega_{n_v-1} dx dx_1 \dots dx_{n_v-1} dx_{n_v}$$

$$+ \int_{h_{n_v-1}}^\infty \int_{l_{n_v-2}}^{h_{n_v-2}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \int_{-\infty}^L \pi_{(n_v-1)2}\omega_{n_v-1} dx dx_1 \dots dx_{n_v-1} dx_{n_v}$$

$$+ \int_{-\infty}^{l_{n_v-1}} \int_{l_{n_v-2}}^{h_{n_v-2}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \int_{-\infty}^\infty \pi_{(n_v-1)3}\omega_{n_v-1} dx dx_1 \dots dx_{n_v-1} dx_{n_v}$$

$$+ \int_L^\infty \int_{l_{n_v-1}}^{h_{n_v-1}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \int_L^\infty \pi_{n_v 1}\omega_{n_v} dx dx_1 \dots dx_{n_v-1} dx_{n_v}$$

$$+ \int_L^\infty \int_{l_{n_v-1}}^{h_{n_v-1}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \int_{-\infty}^L \pi_{n_v 2}\omega_{n_v} dx dx_1 \dots dx_{n_v-1} dx_{n_v}$$

$$+ \int_{-\infty}^L \int_{l_{n_v-1}}^{h_{n_v-1}} \dots \int_{l_1}^{h_1} \int_{-\infty}^\infty \pi_{n_v 3}\omega_{n_v} dx dx_1 \dots dx_{n_v-1} dx_{n_v}$$

부록 A의 iii)에 의해 $X, \hat{X}_1, \dots, \hat{X}_j$ 의 결합확률밀도함수인 ω_j 는 $(j+1)$ 변량 정규분포의 확률밀도함수이다. 따라서 위의 식을 비용 모수별로 정리하면 식 (10)의 단위제품당 기대이익 함수를 얻을 수 있다.