

소성 이론을 이용한 콘크리트 공시체의 거동 해석

박재균[†] · 정철현 · 강운석 · 현창현*

단국대학교 토목환경공학과 · *한국원자력안전기술원
(2005. 11. 7. 접수 / 2006. 4. 10. 채택)

Analysis of Concrete Specimen Using Plasticity Theory

Park, Jaegyun[†] · Chung, Chul-Hun · Kang, Un-Suk · Hyun, Chang-Heon*

Department of Civil & Environmental Engineering, Dankook University

*Korea Institute of Nuclear Safety

(Received November 7, 2005 / Accepted April 10, 2006)

Abstract : Recently, experimental and theoretical studies about nonlinear behavior of large concrete structures are in progress. The purpose of this study is to describe the nonlinear behavior of a concrete specimen under compression using several plastic models and to choose the best plastic model for later use in numerical analyses of concrete structures. ABAQUS is a general-purpose FEM program and we tested all suitable embedded material models for concrete. To verify the effectiveness of nonlinear analyses, results were compared with uniaxial and triaxial compression test results.

Key Words : plasticity model, concrete, ABAQUS, uni-axial test, tri-axial test

1. 서 론

건설 산업의 발달에 따라 구조물은 차츰 대형화되고 다양화된 형태로 발전하기에 이르렀다. 또한 콘크리트 구조물의 해석 방법도 현재까지 많은 연구자와 기술자들에 의해 다양한 연구가 이루어졌다. 그러나 콘크리트 구조물의 비선형 거동은 아직까지 소성 이론 적용에 어려움을 가지고 있기 때문에 대부분 실험에 의존하고 있는 것이 현실이며, 현재까지 가장 많이 사용되고 있는 실험에 의한 해석은 많은 시간과 비용, 광범위한 정보 수집에 대한 어려움을 가지고 있다. 이러한 점에서 광범위한 정보 수집, 시간과 비용상의 경제적 효용을 갖는 비선형 유한요소 해석이 요구되며, 이와 더불어 콘크리트 구조물에 적용된 소성 이론의 검증이 필요하다. 본 연구에서는 토목 분야에서 많이 사용되는 범용 유한요소 해석 프로그램 ADINA, DIANA, ABAQUS, MARC 중에서 다양한 소성 모델이 내장되어 있고 현재 콘크리트 비선형 해석에 많이 사용되고 있는 ABAQUS를 사용하였다. 지금까지 많은 연구자들은 콘크리트

구조물의 비선형 해석을 위하여 다양한 실험을 수행하였으며, 그 결과를 검증하기 위하여 실험에 따라 각기 다른 소성 모델로 비선형 유한요소 해석을 수행하였다. 국내에서도 이미 원전 격납건물의 안전성 평가를 위하여 격납건물을 원통형 셸구조물로 모델링하고 콘크리트의 다축응력 상태를 고려하기 위하여 Drucker-Prager 모델로 신뢰성해석을 수행하였고¹³⁾, ABAQUS 등을 이용하여 벽체의 비선형 유한요소 해석을 수행하였는데, 후자에서는 철근콘크리트 구조물을 구성하고 있는 휨벽체의 축력비를 주 변수로 벽체에 대한 비선형 해석을 콘크리트 손상 소성 모델로 수행하고, 이를 실험 결과 값과 비교 검토함으로써 제안된 해석기법의 타당성을 검증하였다^{12,15)}. 최근에는 기형 perfbond 리브 전단연결재의 거동을 실험 결과와 비교하기 위하여 콘크리트의 비선형 유한요소 해석을 수행하고 해석 결과를 비교분석하였다¹⁴⁾. 이에 따라 본 연구에서는 Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc.가 개발한 ABAQUS 비선형 유한요소 프로그램의 다양한 소성 모델을 사용하여 콘크리트 공시체의 비선형 유한요소 해석을 수행하여 비교 분석하고자 한다¹⁾. 또한, 프로그램에 내장된 각각의 소성 모델들이 콘크리트 재료에 적

[†] To whom correspondence should be addressed.
jpark@dku.edu

용 가능한지를 판단하고, 각각의 소성 모델에 사용되는 재료 매개변수(parameter) 산출을 위하여 콘크리트 공시체의 압축실험 결과와 해석결과를 비교 분석하고자 한다.

2. 콘크리트 소성 모델

콘크리트 재료의 1축 압축 상태에서 초기의 응력과 변형율은 $0.3f_c$ 까지 거의 비례적인 선형 탄성구간을 나타내고^{2,6)}, 그 이후 점차적으로 기울기가 감소하여 최대 압축강도를 지나 파괴에 도달한다. 여기서, 탄성구간 이후 파괴까지를 소성구간이라 하고, 탄성구간과 소성구간 사이의 기준을 항복점(yield point)이라 한다. 이것을 기준으로 콘크리트 소성 거동을 나타내는 여러 가지 소성 이론들이 있으며, 범용 유한요소 프로그램인 ABAQUS에서 사용되는 대표적인 소성 이론 모델은 콘크리트 분산균열 모델, Mohr-Coulomb 모델, Drucker-Prager 모델, Cap 소성 모델, 콘크리트 손상 소성 모델 등이 있다¹⁾.

2.1. 콘크리트 분산균열 모델

콘크리트 분산균열 모델에서의 탄-소성 거동을 고전적인 소성 이론 개념으로 나타내면, 재료의 변형률은 식 (1)과 같이 탄성 거동과 소성 거동으로 나누어진다. 탄성 거동은 균질한 등방성 재료가 선형으로 거동한다고 가정하며, 소성 거동은 항복 함수와 흐름 법칙에 의하여 정의된다. 아래의 식에서 ϵ 은 전체 변형률, ϵ^{el} 과 ϵ^p 은 각각 탄성 변형률과 압축 소성 변형률을 나타낸다.

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^p \quad (1)$$

소성 거동에서의 항복 함수는 Fig. 1에서와 같은 평면응력 상태의 콘크리트 거동을 Fig. 2와 같은 meridional 평면으로 단순화시켜 다음과 같이 나타낸다.

$$F = q - \sqrt{3} a_0 p - \sqrt{3} \sigma_c = 0 \quad (2)$$

위의 식에서 p 는 제1 응력 불변량(first invariant of stress) I_1 에 의해 $p = -(1/3)I_1$ 로 정의되고, q 는 제2 편차 응력 불변량(second invariant of deviator stress) J_2 에 의해 $q = \sqrt{3}J_2$ 로 정의된다. 그리고, a_0 는 식 (2)를 재료의 1축 압축조건과 2축 압축조건으로 $a_0 = \sqrt{3} \left[\frac{1 - (\sigma_{bc}^u / \sigma_c^u)}{1 - 2(\sigma_{bc}^u / \sigma_c^u)} \right]$, σ_c 는 경화 매개변수(hardening parameter)이다.

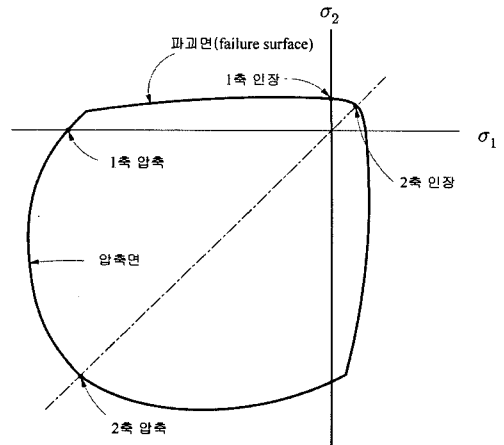


Fig. 1. Failure surface in plane stress condition.

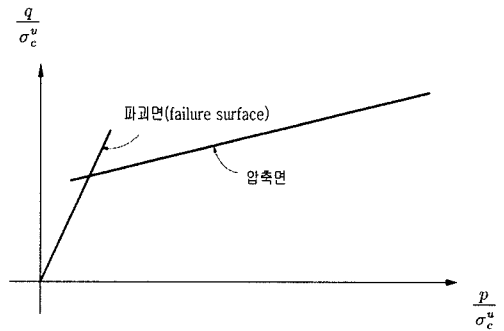


Fig. 2. Failure surface in p-q plane.

소성 거동에서의 흐름 법칙은 일치하는 흐름 (associated flow)으로 정의되고, $F=0$ 과 $\lambda \geq 0$ 의 조건을 가지고 다음과 같이 정의된다.

$$\epsilon^p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (3)$$

2.2. Mohr-Coulomb 모델

Mohr-Coulomb 이론은 일반적으로 토질 재료에서 가장 많이 사용되었으며, 재료의 주 파괴 형식은 압축에 의한 전단파괴이다. 하지만, 파괴 형식이 유사한 콘크리트 재료에서도 Mohr-Coulomb 이론이 많이 사용되고 있으며, Mohr-Coulomb 파괴 규준은 Fig. 3에서와 같이 Mohr원 포락선을 이상화된 직선으로 나타내면 다음과 같다¹¹⁾. 아래의 식에서 τ 는 전단 응력, c 는 재료의 점착력, σ 는 수직 응력, ϕ 는 재료의 마찰각이다.

$$\tau = c - \sigma \tan \phi \quad (4)$$

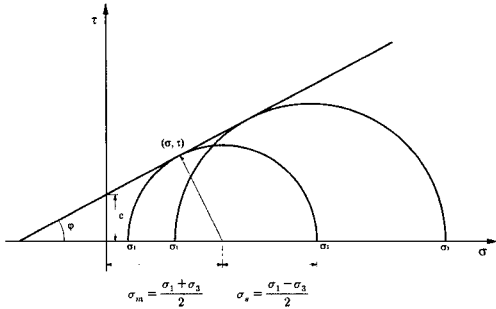


Fig. 3. Mohr-Coulomb failure criteria.

따라서, 식 (4)를 Fig. 3에서의 σ_m 과 σ_s 으로 정리하여 앞에서 정의된 응력 불변량 p 와 q 로 다시 나타내면 Fig. 4와 같은 meridional 평면에서의 항복면이 되며, 식 (5)와 같은 소성 거동에서의 항복 함수가 정의된다.

$$F = R_{mc} q - p \tan \phi - c = 0 \quad (5)$$

$$R_{mc} = \frac{1}{\sqrt{3} \cos \phi} \sin \left(\theta + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \tan \phi \quad (6)$$

위의 식에서 변수 R_{mc} 는 Chen and Han(1988)에 의해 정의되고, θ 는 편차 극각(deviatoric polar angle)을 나타낸다⁵⁾.

소성 거동에서의 흐름 포텐셜 함수 G 는 Fig. 5에서와 같이 쌍곡선 함수로 식 (7)로 정의되지만, 높은 구속압 상태에서는 점차적으로 일치하는 흐름(associated flow)을 나타낸다.

$$G = \sqrt{(e c l_0 \tan \psi)^2 + (R_{mw} q)^2} - p \tan \psi \quad (7)$$

$$R_{mw} = \frac{4(1 - \epsilon'^2) \cos^2 \theta + (2\epsilon' - 1)^2}{2(1 - \epsilon'^2) \cos \theta + (2\epsilon' - 1) \frac{\sqrt{4(1 - \epsilon'^2) \cos^2 \theta + 5\epsilon'^2 - 4\epsilon'}}{3 - \sin \phi}} \cdot \frac{1}{6 \cos \phi} \quad (8)$$

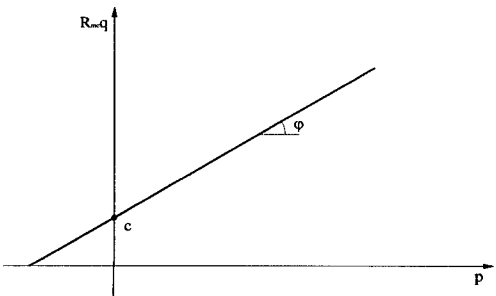


Fig. 4. Yield surface in meridional plane.

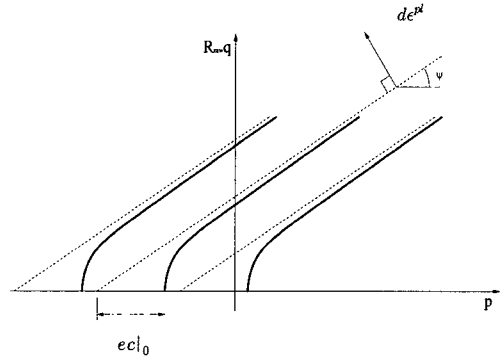


Fig. 5. Flow potentials in meridional surface.

위의 식에서 변수 R_{mw} 는 Menétréy and Willam (1995)에 의해 정의되고, $c l_0 = c |_{\epsilon'^0 = 0}$ 는 초기 점착력 (cohesion yield stress), e 는 쌍곡선 함수에서의 편심률, ψ 는 재료의 팽창각(dilation angle), ϵ' 는 Fig. 6에서와 같이 흐름 포텐셜을 나타내는 매개변수이다¹⁰⁾.

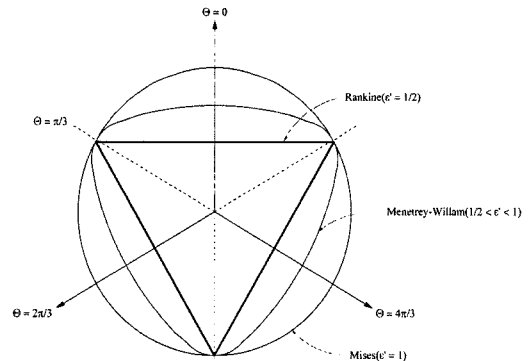


Fig. 6. Menétréy-Willam flow potential¹⁰⁾ in deviatoric plane.

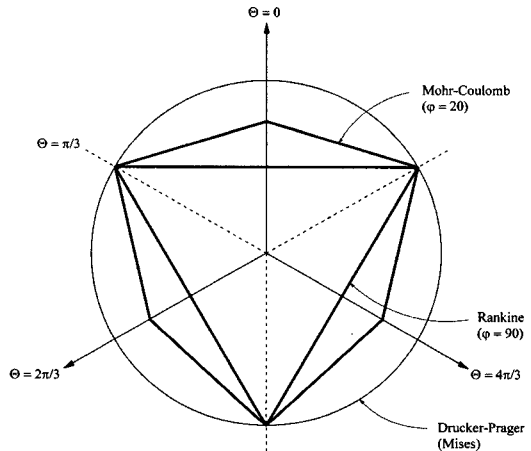


Fig. 7. Mohr-Coulomb surface in deviatoric plane.

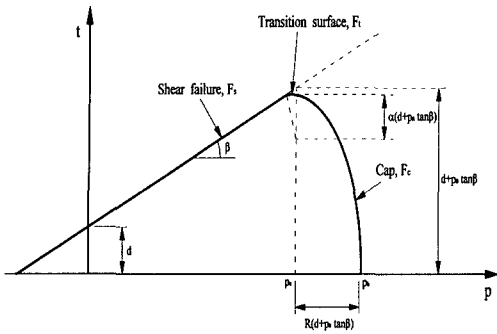


Fig. 8. Drucker-Prager/Cap model : yield surfaces in the p-t plane.

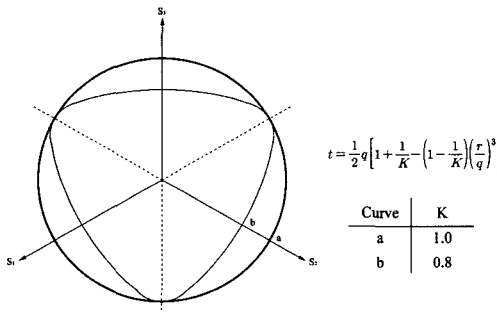


Fig. 9. Typical yield/flow surfaces in the deviatoric plane.

2.3. Drucker-Prager /Cap 소성 모델

Drucker-Prager 이론은 Mohr-Coulomb 이론과 함께 일반적으로 토질재료에서 많이 사용되었고, 두 이론의 차이는 Fig. 7에서와 같이 편차 평면에서의 항복면에 있다. Fig. 7에서 표현된 육변형(hexagon) 형태의 Mohr-Coulomb 항복면은 수학적으로는 편리한 장점을 가지고 있지만, 실질적으로 육변형 형태 때문에 생기는 단점들이 존재한다. 이것을 보완한 형태가 Drucker-Prager 이론이며, 육변형 형태의 Mohr-Coulomb 항복면을 부드러운 형태의 타원형으로 나타내었다. Drucker-Prager 이론에서 재료의 소성 거동은 정수압 상태에서 체적증가로 나타낸다. 여기서, 증가된 체적은 Drucker-Prager 이론으로 제어할 수 없는 단점을 가지고 있기 때문에 이것을 보완한 형태가 Cap 소성 이론이다. 이 이론은 정수압 상태에서 Drucker-Prager 항복면의 단점을 Cap 항복면으로 보완한 것이고, Drucker-Prager /Cap 소성 이론 모델은 Fig. 8에서 나타내었다.

Drucker-Prager 모델의 항복 함수는 그림 8에서의 전단 파괴면 F_s 로 식 (9)와 같이 정의된다. 아래의 식에서 β 와 d 는 Mohr-Coulomb 모델에서와 같은 재료의 마찰각과 점착력을 나타내고, t 는 Fig. 9에

서 나타낸 편차 응력량이다.

$$F_s = t - p \tan \beta - d = 0 \quad (9)$$

Cap 소성 모델의 항복 함수는 Fig. 8에서의 Cap 항복면 F_c 로 식 (10)과 같이 정의된다. 아래의 식에서 α 는 완화면(transition surface)의 각을 나타내고, R 은 Cap의 모양을 조절하는 매개 변수이다.

$$F_c = \sqrt{(p - p_a)^2 + \left[\frac{Rt}{(1 + \alpha - \alpha / \cos \beta)} \right]^2} - R(d + p_a \tan \beta) = 0 \quad (10)$$

두 가지의 모델에서의 흐름 법칙은 일치하는 흐름(associated flow)으로 정의되고, $F=0$ 과 $\lambda \geq 0$ 의 조건을 가지고 앞에서의 식 (3)과 같이 정의된다.

2.4. 콘크리트 손상 소성 모델

콘크리트 손상 소성 모델의 항복 함수는 Lubliner et al.(1989)에 의해 제안되고 Lee and Fenves(1998)에 의해 수정 보완된 것을 사용하였다. 항복 함수는 식 (11)로 나타내며, Fig. 10에서와 같이 인장에서의 함수와 압축에서의 함수로 정의할 수 있다. 아래의 식에서 p , q 와 σ_c 는 전과 동일하며, α , β , γ 는 Lubliner et al.(1989)에 의해 정의된 재료 상수이다^{8,9)}.

$$F = \frac{1}{1 - \alpha} (q - 3\alpha p + \beta \sigma_c^u - \gamma \sigma_c^c) - \sigma_c \leq 0 \quad (11)$$

항복 함수에서의 상수 α , β 는 재료의 2축 압축강도와 1축 압축강도로 다음과 같이 구해지며, γ 는 Fig. 11에서와 같이 편차 평면에서의 K_c 값에 의하여 구할 수 있다.

$$\alpha = \frac{\sigma_{bc} - \sigma_c}{2\sigma_{bc} - \sigma_c}, \quad \beta = \frac{\sigma_c}{\sigma_t} (1 - \alpha) - (1 + \alpha), \quad K_c = \frac{\gamma + 3}{2\gamma + 3},$$

$$\gamma = \frac{3(1 - K_c)}{2K_c - 1}$$

콘크리트 손상 소성 모델에서의 흐름 법칙은 일치하지 않는 흐름(nonassociated flow)으로 정의되고, 흐름 포텐셜 함수는 2.2절에서 설명된 Mohr-Coulomb 쌍곡선 함수로 다음과 같이 정의된다. 아래의 식에서 ψ 는 meridional 평면에서의 팽창각(dilation angle), σ_1 는 극한 1축 인장 강도, e 는 쌍곡선 함수에서의 편심률이다.

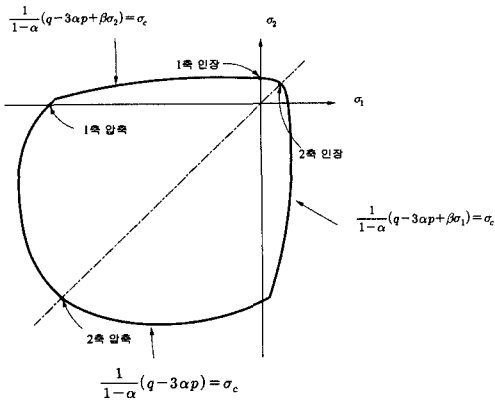


Fig. 10. Yield surface in plane stress.

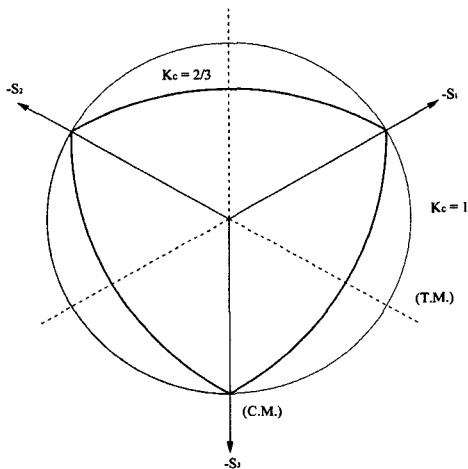


Fig. 11. Yield surfaces in the deviatoric plane.

$$G = \sqrt{(e\sigma_i \tan \psi)^2 + q^2} - p \tan \psi \quad (12)$$

3. 콘크리트 압축 실험

3.1. 일축 압축 실험

3.1.1. 항복 함수에 의한 응력-변형률 곡선 해석

콘크리트 재료에서 1축 압축 상태의 전체 변형률은 탄성 변형률과 소성 변형률의 합으로 나타내며, 탄성 변형률은 Hook의 법칙, 소성 변형률은 흐름 법칙에서의 일치하는 흐름(associated flow)으로 정의하여 각각의 항복함수에 의한 응력-변형률 곡선을 계산하였다. 계산에 의해 나타난 결과는 Fig. 12, 13, 14와 같으며 사용된 응력-변형률 곡선은 수정 Hognestad 응력-변형률 곡선을 사용하였다⁷⁾. 재료의 유효 압축응력은 $0.3f'_c$ 에 도달할 때까지만 선형 탄성으로 가정하였다^{2,6)}.

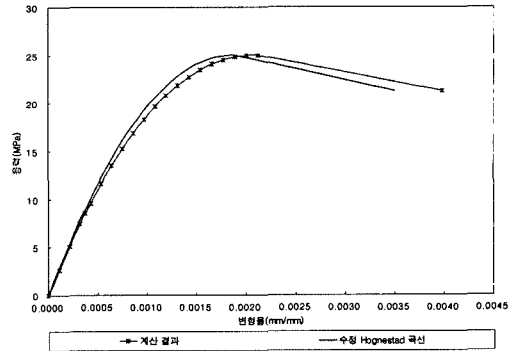


Fig. 12. Concrete smeared cracking model.

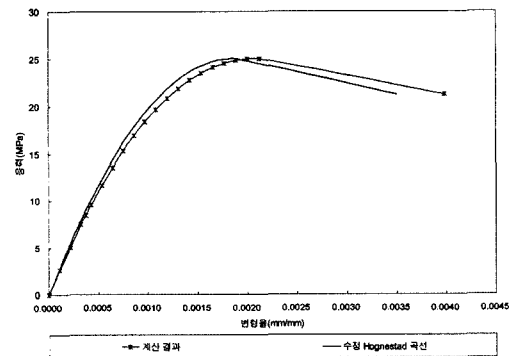


Fig. 13. Concrete damaged plasticity model.

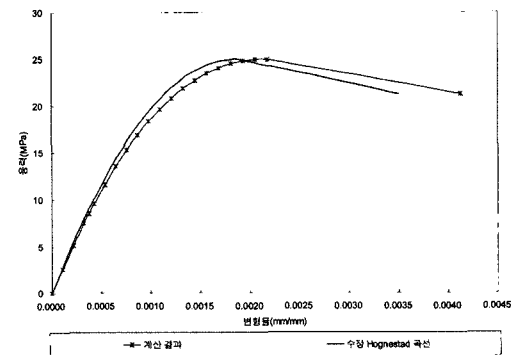


Fig. 14. Drucker-Prager model and Mohr-Coulomb model.

3.1.2. 재료 실험에 대한 비선형 해석 결과

콘크리트 1축 압축 재료의 비선형 유한요소 해석에 사용될 소성 모델들을 평가하기 위하여 과거 연구자들의 원주형 콘크리트 공시체의 1축 압축 실험 결과를 사용하였다⁴⁾. 해석에 사용된 재료의 물성치는 Table 1과 같으며, 실험 결과는 Fig. 15로 나타내었다. 그리고 비선형 해석은 범용 해석 프로그램인 ABAQUS를 사용하여 Fig. 16과 같이 8개의 적분점을 갖는 8절점 Solid 요소로 모델링하였다.

Table 1. Material properties for the uniaxial compression test

| | 고강도 콘크리트 | 보통 콘크리트 |
|------------|----------|---------|
| 압축 강도(MPa) | 49 | 25 |
| 탄성 계수(MPa) | 30800 | 24200 |
| 프아송 비 | 0.2 | 0.2 |
| 최대 변형률 | 0.0031 | 0.0035 |

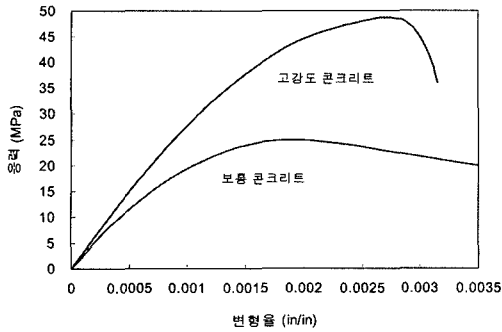


Fig. 15. Uniaxial compression stress-strain curve for concrete.

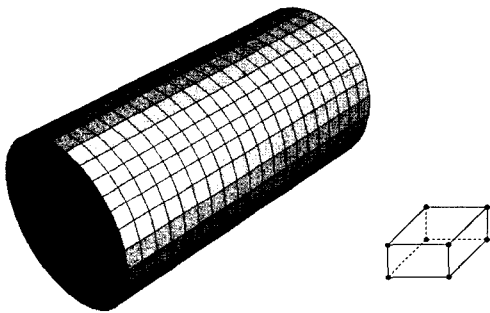


Fig. 16. FEM model of concrete specimen.

콘크리트 분산균열 모델과 콘크리트 손상 소성 모델은 소성의 기준이 되는 2축 압축강도와 1축 압축 강도의 비는 일반적으로 콘크리트에 사용되는 1.16 을 사용하였고³⁾, 인장강도는 압축강도의 10%를 사용하였다²⁾. 그리고 재료의 팽창각은 다른 소성들과의 동등한 조건을 위하여 마찰각과 같은 54.9°를 사용하여 흐름법칙에서의 일치하는 흐름으로 가정하였으며, 소성 거동에서의 인장 강화 효과는 철근에 대한 영향이 없으므로 고려하지 않았다. 콘크리트 분산균열 모델의 해석 결과는 Fig. 17과 같으며, 콘크리트 손상 소성 모델의 해석 결과는 Fig. 18과 같다.

Mohr-Coulomb 모델과 Drucker-Prager/Cap 소성 모델은 항복의 기준이 되는 재료의 마찰각과 팽창각을 54.9°의 값을 사용하였고, 재료의 점착력은 식 (4)에서 유도하였다. Fig. 19, 20, 21은 Mohr-Coulomb 모델, Drucker-Prager /Cap 소성 모델의 해석결과이다.

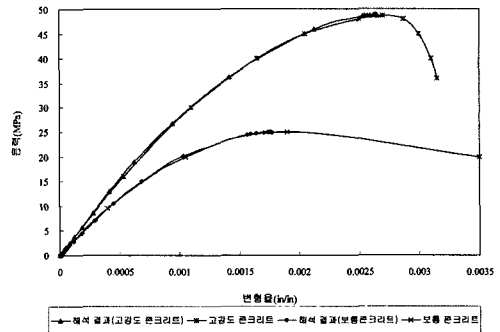


Fig. 17. Stress-strain curve of concrete smeared cracking model.

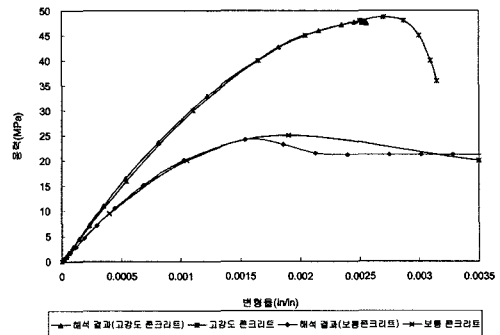


Fig. 18. Stress-strain curve of concrete damaged plasticity mode.

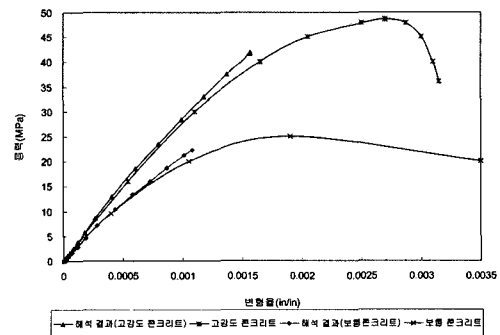


Fig. 19. Stress-strain curve of Mohr-Coulomb model.

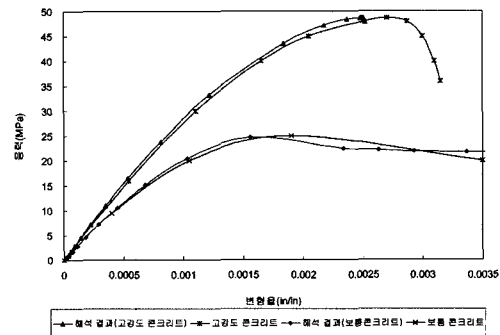


Fig. 20. Stress-strain curve of Drucker-Prager model.

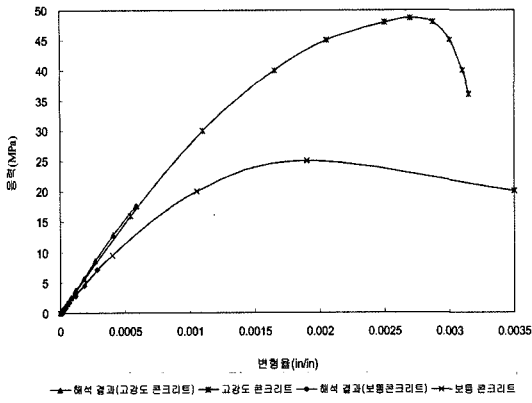


Fig. 21. Stress-strain curve of cap plasticity mode.

3.2. 삼축 압축 실험

3.2.1. 재료 실험에 대한 비선형 해석 결과

콘크리트 1축 압축 재료에서 각각의 소성 모델을 적용하여 해석을 수행한 결과에서는 콘크리트 손상 소성 모델과 Drucker-Prager 모델이 콘크리트 비선형 거동을 비교적 잘 나타내었다. 따라서, 두 가지 소성 모델이 콘크리트 3축 압축 실험에서도 잘 수렴하는지를 비교 분석하기 위하여 과거 연구자들의 콘크리트 3축 압축 실험결과를 사용하였다³⁾.

해석에서는 실험과 동등한 경계 조건을 위해 측면에 미리 등분포 하중을 가하여 해석을 수행하였으며, 해석에 사용된 재료의 물성치와 실험결과는 Table 2와 Fig. 22로 나타내었다. 보다 정밀한 해석을 위하여 Fig. 23과 같이 10개의 적분점을 갖는 10절점 Tetrahedra 요소로 모델링하였다. 해석 결과는 Fig. 24, 25, 26, 27과 같다.

Table 2. Triaxial compression test result

| | A | B |
|------------|-------|-------|
| 압축 강도(MPa) | 32.6 | 49.7 |
| 탄성 계수(MPa) | 25856 | 30305 |
| 프아송 비 | 0.2 | 0.2 |

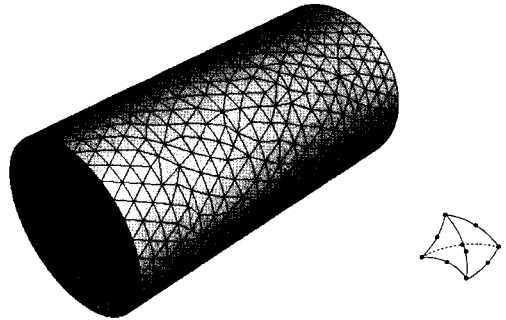


Fig. 23. FEM model of concrete specimen.

(1) 콘크리트 손상 소성 모델

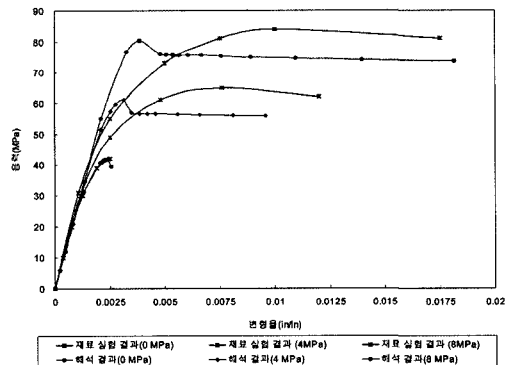
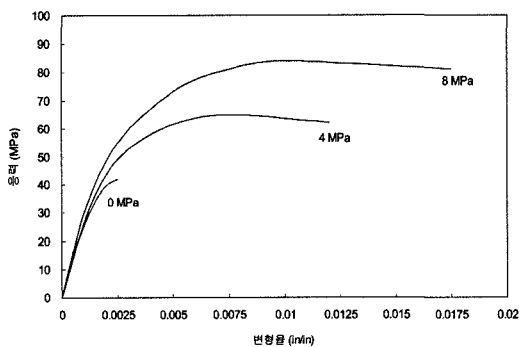
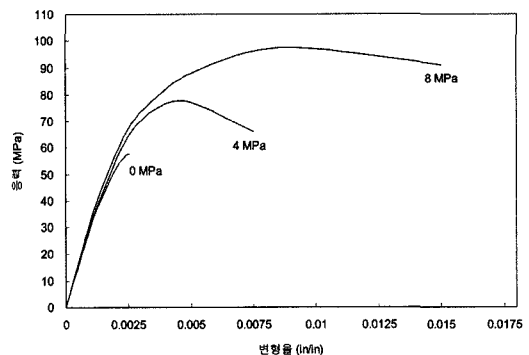


Fig. 24. Stress-strain curve of uniaxial compression strength 32.6MPa.



(a) 콘크리트 압축강도 32.6MPa



(b) 콘크리트 압축강도 49.7MPa

Fig. 22. Triaxial compression stress-strain curve for concrete.

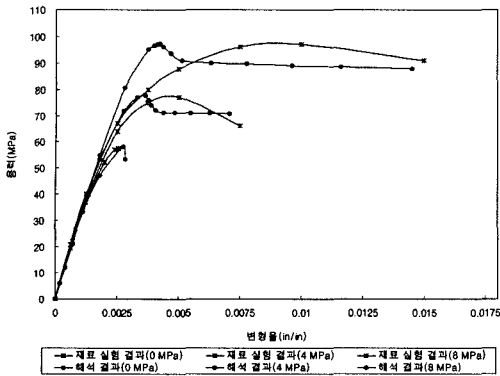


Fig. 25. Stress-strain curve of uniaxial compression strength 49.7MPa.

(2) Drucker-Prager 모델

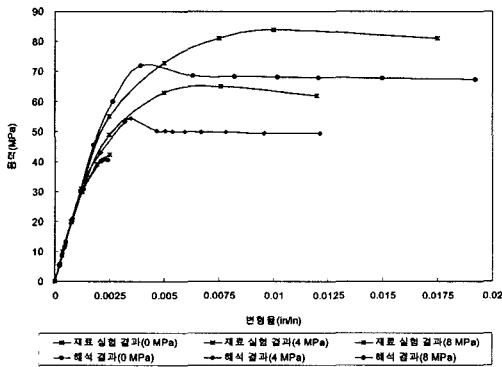


Fig. 26. Stress-strain curve of uniaxial compression strength 32.6MPa.

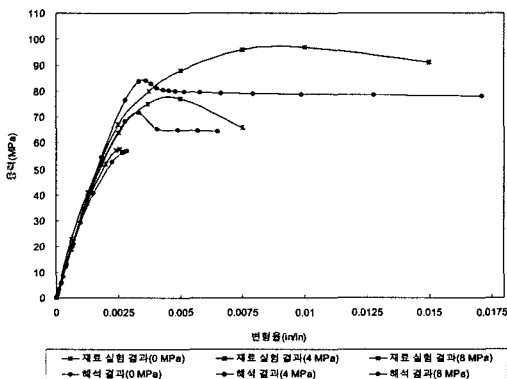


Fig. 27. Stress-strain curve of uniaxial compression strength 49.7MPa.

5. 결론

본 연구에서는 콘크리트 공시체 비선형 해석을 통

하여 콘크리트 재료에 사용된 소성 모델이 재료 거동에 미치는 영향과 그에 따른 소성 매개변수(parameter)들을 산정하였다. 또한, 연구 결과의 타당성을 검증하기 위하여 여러 참고문헌들을 바탕으로 실험 결과와 해석 결과를 비교하였으며, 이상의 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

1) ABAQUS에서 콘크리트의 소성해석을 위한 패러미터를 산정하는 과정을 여러 모델에 대하여 자세히 정리하였다.

2) 일축 압축 해석 결과에서 재료의 비선형 거동을 가장 유사하게 묘사한 소성 모델은 콘크리트 손상 소성 모델과 Drucker-Prager 모델이었다. 또한, 해석 결과에서 각각의 소성 모델별로 비선형 거동을 묘사하지 못하는 부분은 탄성 거동 이후의 거동을 정의하는 경화 매개변수에 의한 것으로 확인되었고, 재료의 비선형 거동을 잘 묘사한 모델에서도 최대 압축 강도 이후 급격히 줄어드는 강도 감소를 묘사하지 못하는 것으로 나타났다. 이는 기본적으로 콘크리트의 거동이 일반적인 금속의 소성 거동과는 다른 한계를 나타내는 부분이다.

3) 삼축 압축 해석 결과는 탄성 거동을 제외한 소성 거동부분에서 실험 결과와의 차이를 나타내었다. 이것은 공시체 2축과 3축으로 재하되는 실험에서의 경계 조건을 해석에서 엄밀하게 묘사하지 못한 것으로 판단되며, 향상된 경계조건 묘사가 필요하다.

참고문헌

- 1) ABAQUS User's Manual, Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 2003.
- 2) Bangash, M.Y.H. "Concrete and Concrete Structure : Numerical Modeling and Application", Elsevier Science Publishers Ltd., 1989.
- 3) Candappa, D.C., Sanjayan, J.G., and Setunge, S. "Complete Triaxial Stress-Strain Curve of High-Strength Concrete", Journal of Materials in Civil Engineering, Vol. 13, No. 3, pp. 209~215, 2001.
- 4) Carrasquillo, R.L., Nilson, A.H., and Slate, F.O. "Mechanical Properties of High-Strength Lightweight Concrete", Journal of America Concrete Institute, No. 83-54, pp. 606~613, 1986.
- 5) Chen, W.F. and Han, D.J. "Plasticity for Structural Engineers", SpringerVerlag, New York, 1988.
- 6) Chen, W.F. "Plasticity in Reinforced Concrete",

- McGrawHill, New York, 1982.
- 7) Hognestad, E. "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members", Bulletin 399, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana, Ill, 1951.
 - 8) Lee, J. and Fenves, G.L. Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 124, No. 8, pp. 892~900, 1998.
 - 9) Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S., and Onate E. "A Plastic-Damage Model for Concrete", Int. J. Solids Structures, Vol. 25, No. 3, pp. 299~326, 1989.
 - 10) Menétrey and Willam, K.J. "Triaxial Failure Criterion for Concrete and Its Generalization", Journal of America Concrete Institute, Vol. 92, No. 3, pp. 311~317, 1995.
 - 11) Ugural, A.C. and Fenster, S.K. "Advanced Strength and Applied Elasticity", Prentice Hall PTR, 1995.
 - 12) 윤현도, 한민기, 김선우, 박완신, 양일승, 한병찬, "철근콘크리트 장방형 전단벽의 비선형 유한요소 해석", 대한건축학회 학술발표논문집, 제24권, 제1호, 2004.
 - 13) 이성로, 배용귀, "격납건물의 내진안전성 평가", 한국구조물안전진단학회, 제8권, 제3호, pp. 225~233, 2004.
 - 14) 이홍수, 정철현, 박재균, 이한주, "ㄱ형 perfobond 리브 전단연결재 전면 콘크리트의 비선형 유한요소 해석", 대한토목학회 정기학술대회, 2004.
 - 15) 한민기, 박완신, 한병찬, 황선경, 최창식, 윤현도, "ABAQUS를 이용한 휨벽체의 비선형 유한요소 해석기법", 대한건축학회논문집 구조계, 제21권, 제2호, 2005.