〈 논문 〉

시간지연 모델을 이용한 비선형 연소불안정 해석기법 연구

박 태 선† · 김 성 구*

(2006년 3월 15일 접수, 2006년 5월 18일 심사완료)

Numerical Analysis of Nonlinear Combustion Instability Using Pressure-Sensitive Time Lag Hypothesis

Tae Seon Park and Seong-Ku Kim

Key Words: Combustion Instability(연소불안정), Time-Lag Hypothesis(시간지연모델), Convection Scheme(대류항차분법), Liquid Rocket Engine(액체로켓엔진), Linear Stability Limit(선형안정한계)

Abstract

This study focuses on the development of numerical procedure to analyze the nonlinear combustion instabilities in liquid rocket engine. Nonlinear behaviors of acoustic instabilities are characterized by the existence of limit cycle in linearly unstable engines and nonlinear or triggering instability in linearly stable engines. To discretize convective fluxes with high accuracy and robustness, approximated Riemann solver based on characteristics and Euler-characteristic boundary conditions are employed. The present procedure predicts well the transition processes from initial harmonic pressure disturbance to N-like steep-fronted shock wave in a resonant pipe. Longitudinal pressure oscillations within the SSME(Space Shuttle Main Engine) engine have been analyzed using the pressure-sensitive time lag model to account for unsteady combustion response. It is observed that the pressure oscillations reach a limit cycle which is independent of the characteristics of the initial disturbances and depends only on combustion parameters and operating conditions.

기호설명

$A(x)$: 축방향 단면적 변화
c : 음속
e_t : 전내부에너지
H_f : 추진제의 정체엔탈피
L_{comb} : 분사면에서 노즐목까지 축방향 길이
n : 상호작용지수(interaction index)
p : 압력
p' : 압력섭동
t : 시간
T_o : 분사기면에서 정체온도
u : 축방향 속도
$\dot{w}$: 연소가스 발생율
γ : 비열비
ρ : 밀도
τ : 감응시간지연(sensitive time lag)
τ_{ref} : 특성시간($=L_{comb}/c_o$)

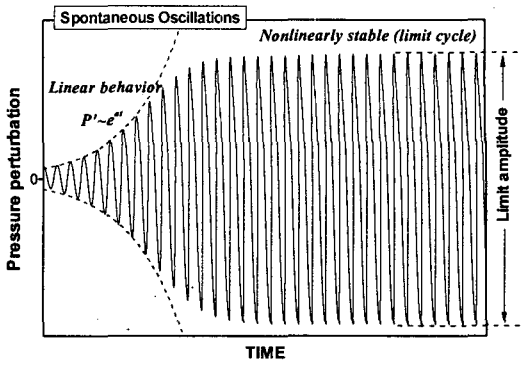
하첨자
o : 분사기면에서 정체조건

† 책임저자, 회원, 경북대학교 기계공학부
E-mail : tsparkjp@knu.ac.kr
TEL : (053)950-5571 FAX : (053)950-6550
* 한국항공우주연구원 연소기그룹

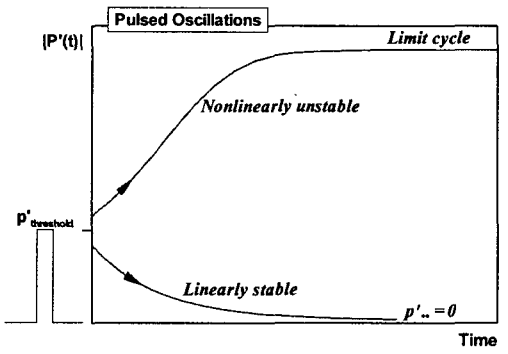
1. 서 론

고주파 연소불안정(high-frequency combustion instability)은 일반적으로 유동교란에 의해 시작된다. 그 결과로 연소에 의한 열방출량이 증가하고 과도에너지의 일부가 다시 유동을 교란시키게 된다. 이러한 비정상 연소과정과 압력교란이 동일 위상조건하에 있다면 피드백 루프가 형성되어 연소불안정이 발생한다. 로켓엔진에서의 연소불안정의 발생을 억제/제거하기 위한 예측모델과 설계코드들은 대부분 선형해석이론에 의존하여 왔다.[1] 선형해석의 관심은 무한히 작은 초기 교란에 대해서도 엔진이 불안정해질 수 있는 작동조건의 범위를 예측하는 데 있다. 그러나 선형 해석은 방법상의 제한성 때문에 주어진 설계조건에서 초기 압력교란의 증폭/감쇠에 대한 판단만이 가능하다. 즉, 실제 연소시험에서 나타나는 연소불안정의 비선형적 현상을 예측하지 못하는 단점을 가진다. 이와는 별도로 3차원 선형음향해석기법을 통해 초기 단계에서 연소기의 공진주파수를 파악하고 음향공 또는 배플과 같은 수동안정화기구를 설계하는 연구가 수행된 바가 있다.[2,3]

연소불안정의 비선형적 거동은 Fig. 1과 같이 크게 한계사이클의 존재(existence and stability of limit cycle)와 비선형 촉발 불안정(nonlinear triggering instability)으로 분류된다. 연소실이 안정적으로 작동하더라도 일정크기의 압력섭동이 존재하는 것이 일반적이며, 연소실 평균압력의 ±5% 보다 작은 경우 안정한 연소장으로 판단한다. 외부교란이 없는 조건의 정상상태에서 존재하는 노이즈 수준의 작은 압력섭동에 의해서도 연소불안정이 발생하는 경우를 선형적으로 불안정한 엔진(linearly unstable engine)이라 한다. 이 경우 Fig. 1(a)에서 볼 수 있듯이 초기에는 선형적 압력섭동의 진폭이 지수함수적[$p'(t)\sim e^{at}$]으로 증가된다. 그렇지만 압력섭동의 진폭이 일정이상으로 커질 경우 점차 비선형적 요인들이 지배적으로 되어 점차 선형적 증가 형태에서 벗어나게 되며, 진폭이 일정한 값으로 수렴되는 주기적 진동 현상(한계사이클, limit cycle)이 발생한다. 고주파 연소 불안정이 발생하는 경우, 일정 크기 이상의 압력진동은 일반적으로 충격파 거동을 수반하게 되고 한계사이클은 톱니 모양의 전방파형(steep-fronted waveform)을 나타내게 된다. 이러한 현상은 초기



(a) Existence and stability of limit cycle in linearly unstable engines



(b) Triggering of nonlinear instability in linearly stable engines

Fig. 1 Nonlinear behaviors of combustion instability phenomena[4]

에 사인파 형태의 완만한 압력교란이 주어진다 하더라도 각 위치에 따라 압력파가 전파되는 특성속도가 달라지기 때문에 점차 음압들이 한 지점에서 정체되어 파형이 왜곡되면서 점차 충격파로 발전하기 때문이며, 이러한 비선형 음향특성은 연소과정 자체에 내재된 비선형성과 함께 연소불안정의 비선형적 거동을 지배하는 주요 요인이 된다.

선형 불안정 엔진과는 달리, Fig. 1(b)와 같이 진폭이 일정 크기 이하인 초기교란에 대해서는 압력섭동이 감쇠되어 안정한 상태로 되돌아가는 경우를 선형적으로 안정한 엔진(linearly stable engine)이라 부른다. 이 경우에도 진폭이 일정값(threshold amplitude) 이상이 되는 교란이 주어지게 되면 연소불안정이 발생하게 되는 데, 이를 촉발 불안정(triggering instability)이라 하며 그때

불안정을 야기하는 문턱값을 기준으로 동적 안정성 여분(dynamic stability margin)을 평가할 수 있다. 따라서 연소불안정에 대한 비선형 해석은 실제 액체로켓엔진을 설계하고 평가하는 데 있어 "안정성 평가(stability rating)"라는 측면에서 매우 중요하다고 할 수 있다.

비선형 연소불안정에 대한 초기 연구는 종속변수들을 2차 이상의 근사급수전개 후 Galerkin 방법을 이용하여 해를 구하는 해석기법[5] 등이 시도되었으나, 1990년대에 들어와서는 CFD를 이용하여 직접적으로 해석하는 연구들[6,7]이 주류를 이루게 되었다. 실제 현상에서 나타나는 복잡한 물리화학적 과정들(미립화, 분무, 증발, 난류혼합, 연소)을 정확하게 모사하는데 여전히 많은 한계들이 존재하지만, CFD 기법을 이용한 연소불안정의 해석적 접근방법은 설계에 활용가능한 단계까지 발전하여 왔다. 주목할 만한 대표적 사례로서 ONERA의 PHEDRE 코드[7]를 들 수 있으며 Viking 엔진(UDMH/N_2O_4, radial impinging injector)과 Vulcain 주엔진 및 가스발생기(LOx/H2, coaxial shear injector)의 개발과정에 사용되었다.

비선형 연소불안정을 예측하기 위해서는 우선적으로 지배방정식의 대류항을 공간과 시간에 따라 정확히 해석할 수 있어야 한다. 하지만 고차 정확도의 수치해법은 충격파와 같은 불연속면을 전후로 수치적인 진동(overshoot & undershoot)을 발생시킬 수 있으며, 이로 인한 해석상의 과잉압력이 불안정 모드를 촉발(triggering)시켜 잘못된 경향을 예측할 수도 있다. 따라서 비소산성(non-dissipative)과 비분산성(non- dispersive)을 갖는 정교한 수치해석기법과 경계조건 처리가 매우 중요하게 된다.[4]

본 연구의 궁극적인 목적은 액체로켓엔진 연소기의 설계에 있어 설계자로 하여금 안정성 여분을 평가하고 연소시험으로부터 얻은 결과들을 보다 체계 있게 분석하는 데 도움을 줄 수 있는 예측코드를 개발하는 데 있다. 이를 위해 본 연구는 일차적 단계로서 축 방향 진동모드를 갖는 연소불안정의 비선형 거동(특히 steep-fronted shock wave와 limit cycle)을 정확히 예측할 수 있는 수치해석 기법을 개발 및 검증하는 데 주안점을 두었다. 충격관과 축소-확대 노즐 문제를 통해 본 연구에서 사용한 수치기법의 적용성을 검증하였으며, 공진관에서 나타나는 충격파 발달 과정을 해석함으로서 연소불안정에서 나타나는 비선형 음향특성을 이해하고자 하였다. 또한 비정상 연소응답을 비교적 간단한 n-τ 시간지연모델로 모사함으로서 큰 확대비를 갖는 SSME(Space Shuttle Main Engine)에서 나타나는 한계사이클의 특성과 선형안정한계를 수치해석적으로 고찰하였다.

2. 수치해석 방법

2.1 지배방정식

본 연구에서는 연소불안정 수치해석의 기본적 개발 방향성을 확립하기 위해 액체로켓엔진내의 축 방향 진동모드로 발생하는 비선형 연소불안정에 국한하여 연구를 수행하였으며, 다음과 같은 가정을 도입하였다.

(1) 추력실내 유동장은 준1차원적(quasi 1-d)이다.

(2) 연소실내 기체는 단일성분의 완전기체로 거동하며, 액적의 체적은 무시한다.

(3) 점성, 확산, 열전도의 영향은 무시한다.

(4) 액적의 정체엔탈피는 액적이 연소실 내를 이동하는 동안 일정하게 유지된다.

(5) 가스장과 액적의 상호작용에 의한 운동량 교환은 무시한다.

위와 같은 가정을 통해 1차원 지배방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u A)=\dot{w} \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u A)+\frac{\partial}{\partial x}\{(\rho u u+p)A\}=p\frac{\partial A}{\partial x} \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t A)+\frac{\partial}{\partial x}\{(\rho u e_t+pu)A\}=H_f\dot{w} \tag{3}$$

여기서 $A(x)$는 축 방향으로 단면적 변화를 나타낸다. 연소불안정은 추진제의 미립화, 분무거동, 증발특성 그리고 화학반응 등의 물리현상과 밀접하게 나타나며, 총체적인 비정상 연소과정에 의해 발생되거나 유지된다. 본 연구에서는 Crocco의 압력감응 시간지연 이론(pressure-sensitive time-lag hypothesis)을 도입하였으며, 이때 비정상 연소응답특성은 다음과 같이 표현된다.[5,8]

$$\dot{w}=\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}A)}{\partial x}\left[1+\frac{n}{\bar{p}}\{p'(t,x)-p'(t-\tau,x)\}\right] \tag{4}$$

여기서 bar는 각 물리량의 시간평균을 의미한다. 식 (4)를 보면 두 가지 중요한 연소특성 매개변수가 나타나는데, 상호작용지수 n은 연소과정이 유동장의 압력진동에 민감한 정도를 의미하

고, 감응시간지연 τ는 비정상 연소과정이 유동 교란에 반응하는데 필요한 지연시간을 나타낸다. 이 두 변수를 Rayleigh의 정의와 비교하면, 지연시간 τ는 가진과 응답 사이의 위상(phase)에 대응하며, 압력지수 n은 전달함수에 의한 이득(gain)에 대응될 수 있다.[9] 시간지연 모델은 실험 데이터를 분석하고 상관성을 파악하기 위해 1950년대에 개발된 직관적이며 단순화된 이론이지만, 최근까지도 엔진 설계 및 해석을 위한 선형/비선형 불안정 예측에 많이 사용되어 왔다. 그러나 시간지연 이론은 실제상에 나타나는 어떠한 물리적 과정도 직접적으로 연관시킬 수 없으므로 설계와 관련된 일반성을 제공하지 못하며, 결과적으로 시간지연 이론의 적용을 위해서는 n과 τ로 대표되는 연소특성 파라미터를 결정하기 위해 실제 엔진에 대한 실험적, 경험적 데이터들을 필요로 하게 된다.

2.2 근사리만 해법

압축성 유동의 충격파 해석기법에 대한 연구는 전산유체역학(CFD)에 있어서 현재까지도 많은 연구가 진행 중인 분야이며, 수학적으로 불연속이 존재하는 격자의 경계면에서 지배방정식이 갖는 쌍곡선(hyperbolic) 특성에 맞게 플럭스를 계산하는 방법을 의미한다. 본 연구에서는 최근에 제안된 방법으로서 특성치에 근거한 근사리만 해법(characteristic-based approximate Riemann solver)[10]을 사용하였으며, 일반적으로 사용되는 검증 문제들에 적용하여 그 정확도를 평가하였다. 먼저 해석절차를 간단히 살펴보면 다음과 같다.

우선 식 (1)~(3)은 $\partial U/\partial t+\partial F/\partial x=b$ 의 형태로 표현되는데, 3단계 Runge-Kutta scheme을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} U_i^{(1)}=U_i^n+\triangle t\cdot L(U_i^n) \\ U_i^{(2)}=\frac{3}{4}U_i^n+\frac{1}{4}[U_i^{(1)}+\triangle t\cdot L(U_i^{(1)})] \\ U_i^{n+1}=\frac{1}{3}U_i^n+\frac{2}{3}[U_i^{(2)}+\triangle t\cdot L(U_i^{(2)})] \end{pmatrix} \quad (5)$$

여기서 $L(U_i^n)=\frac{1}{\triangle x}(F_{i-1/2}^n-F_{i+1/2}^n)-b_i^n$로 정의되고, 격자의 경계면에서 플럭스들은 재구성법(reconstruction)에 의해서 얻어진다.

$$\begin{pmatrix} F_{i+1/2}^n=f(U_{i+1/2,L}^n,U_{i+1/2,R}^n) \\ U_{i+1/2,L}^n=U_i^n+[S^{-1}]_i^n\left\{\frac{1+\phi}{4}\,\widetilde{\triangle}W_i^n+\frac{1-\phi}{4}\,\widetilde{\nabla}W_i^n\right\} \\ U_{i+1/2,R}^n=U_{i+1}^n+[S^{-1}]_{i+1}^n\left\{\frac{1+\phi}{4}\,\widetilde{\nabla}W_{i+1}^n+\frac{1-\phi}{4}\,\widetilde{\triangle}W_{i+1}^n\right\} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\widetilde{\triangle}W_i^n=Minmod(\triangle W_i^n,\beta\cdot\triangle W_i^n)$, $\triangle W_i^n=[S]_i^n\triangle U_i^n$,

$\widetilde{\nabla}W_i^n=[S]_i^n\nabla U_i^n$, $\widetilde{\triangle}W_i^n=Minmod(\triangle W_i^n,\beta\cdot\triangle W_i^n)$

$$Minmod(y,z)=\begin{pmatrix} y & \text{if } |y|<|z| \quad y\cdot z>0 \\ z & \text{if } |z|<|y| \quad y\cdot z>0 \\ 0 & \text{if } y\cdot z<0 \end{pmatrix},$$

$\triangle W_i^n=W_{i+1}^n-W_i^n$, $\nabla W_i^n=W_i^n-W_{i-1}^n$로 표현되고, 상수는 $\phi=1/3$, $\beta=4$로 선택하였다. Jacobian 행렬($\partial F/\partial U=[S]^{-1}[L][S]$)을 구성하는 스칼라 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$[S]^{-1}[L][S]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (\gamma-3)u^2/2 & (3-\gamma)u & (\gamma-1) \\ -\gamma ue_t+(\gamma-1)u^3 & \gamma e_t+3(1-\gamma)u^2/2 & \gamma u \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$[S]=\begin{pmatrix} -c^2+(\gamma-1)u^2/2 & -(\gamma-1)u & (\gamma-1) \\ -cu+(\gamma-1)u^2/2 & c-(\gamma-1)u & (\gamma-1) \\ cu+(\gamma-1)u^2/2 & -c-(\gamma-1)u & (\gamma-1) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$[S]^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{u}{c^2} & \frac{u}{2c^2}+\frac{1}{2c} & \frac{u}{2c^2}-\frac{1}{2c} \\ -\frac{u^2}{2c^2} & \frac{u^2}{4c^2}+\frac{u}{2c}+\frac{1}{2(\gamma-1)} & \frac{u^2}{4c^2}-\frac{u}{2c}+\frac{1}{2(\gamma-1)} \end{pmatrix} \quad (9)$$

경계면에서 플럭스 $F_{i+1/2}$는 압축성 유체에 대한 특성방정식을 이용하여 계산된다.

$$\begin{pmatrix} d^-u-(1/\rho c)d^-p=0 \\ d^op-c^2d^o\rho=0 \\ d^+u+(1/\rho c)d^+p=0 \end{pmatrix}\text{along}\begin{pmatrix} d^-x=(u-c)d^-t \\ d^ox=ud^ot \\ d^+x=(u+c)d^+t \end{pmatrix} \quad (10)$$

식 (10)으로 부터 $I_-=u-p/\rho c$, $I_o=p-\rho c^2$, $I_+=u+p/\rho c$와 같은 고유치(Invariant)관계가 얻어진다. 이 관계를 이용하면 경계면에서 플럭스계산을 위한 변수들이 다음과 같이 얻어진다.[10]

$$p=\frac{I_+-I_-}{2/\rho c},\quad u=I_+-p/\rho c,\quad \rho=\frac{I_o-p}{-c^2} \quad (11)$$

이때 특성속도들($u+c,u,u-c$)의 부호를 판단하여 $U_{i+1/2,L}/U_{i+1/2,R}$을 선택적으로 사용한다. 즉, $u+c\geq 0$, $u\geq 0$, $u-c\geq 0$일 경우 플럭스 $F_{i+1/2}$는 $U_{i+1/2,L}$을 기준으로 결정된 고유치들(I_-,I_o,I_+)을 이용하여 결정된다.

3. 결과 및 고찰

3.1 충격관내의 충격파 전달

압축성 해석기법을 검증하기 위해 가장 일반적으로 사용되는 충격파 문제(Sod's problem)를 통해 본 연구에서 사용한 수치해석기법의 정확성과 안정성을 확인하였다. 초기(t=0)에 왼쪽과 오른쪽이 10:1의 고압과 저압 조건으로 나뉘어 있다가 갑자기 격막이 사라진 경우, 오른쪽으로는 충격파가 전파되고 왼쪽의 고압 기체 쪽으로는 팽창파가 진행된다. Fig. 2에서 보는 바와 같이 충격파

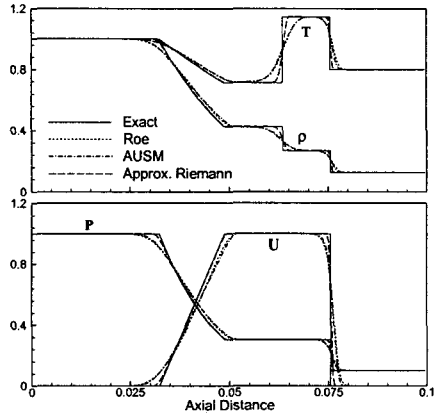


Fig. 2 Wave formation with different schemes in a shock tube (Sod's problem, t=0.15, 200 grids)

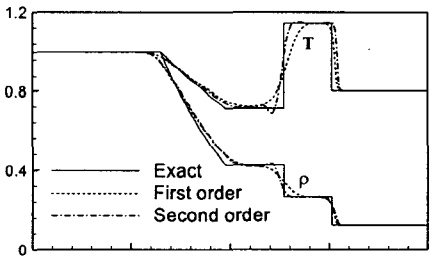


Fig. 3 Wave formation using an approximate Riemann solver

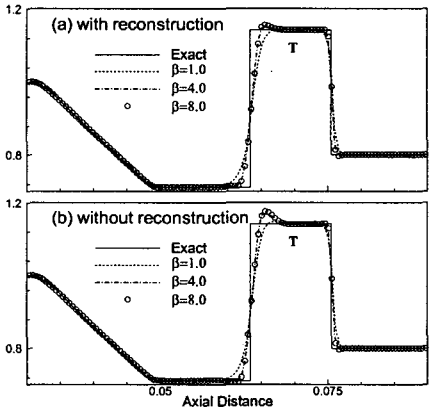


Fig. 4 Wave formation at different conditions of approximate Riemann solver

가 존재하는 기체장을 해석할 경우 예측성은 차분법에 크게 영향을 받는다. 일반적으로 낮은 정확도의 차분법을 사용하면 불연속 영역에서 감쇠가 크게 발생되어 정확성이 떨어지는 단점이 있는 반면에, 고차정확도 차분법을 이용하면 해의 진동을 피할 수 없다. 본 연구에서 사용한 근사리만기법을 비교하기 위해서 상류차분법에 근거한 2종류[Roe,[11,12] AUSM[13,14]]의 차분법이 선택되었다. 이론해와 비교할 때 충격파의 전달과정을 적절하게 묘사하고 있음을 볼 수 있고, 근사리만기법이 상대적으로 우수한 예측성을 나타내고 있다. 이러한 근사리만기법에 대한 특성을 살펴보기 위하여 식 (10)과 (11)을 사용하지 않은 상태에서 추가적인 해석을 수행하였다. Fig. 3은 근사리만 기법에 대해서 식 (6)의 과정에 1차와 2차 정확도 방법을 사용하는 경우에 대한 수치해석의 예측성을 보여주고 있다. 경계면에서 플럭스를 계산할 때 특성속도를 고려하지 않을 경우 해법의 안정성이 감소함을 알 수 있다. 한편, Jacobian 행렬($\partial F/\partial U=[S]^{-1}[L][S]$)의 사용여부에 따른 제한자의 영향에 대한 추가해석 결과를 Fig. 4에 나타내었다. Minmod함수에서 상수 β의 변화에 따라 Jacobian행렬을 사용한 경우(reconstruction)가 상대적인 안정성을 보여주었고, $\beta=4$이상의 값을 사용하는 경우 불연속면에서 예측성의 개선효과는 크게 나타나지 않았다. 이것은 $\beta=4$이상인 경우 제한자 도입의 의미가 감소하기 때문에 해의 불안정성이 증가할 것으로 예상할 수 있다. 전체적으로 본 연구에서 사용한 근사리만기법은 불연속면을 전후로 해의 예측성은 일반적인 특징을 가지고 있지만, 특성속도를 이용한 식 (10), (11)의 도입으로 해의 안정성과 정확성이 크게 향상되어지는 특징을 가지고 있음을 알 수 있다.

3.2 공진관내의 충격파 천이

연소불안정과 관계된 수치해석의 타당성을 검증하기 위하여 공진관내의 충격파 발생 과정을 해석하였다. 이런 형상에 대한 해석은 고체로켓 모터내의 연소불안정을 기체역학적으로 가장 잘 모사할 수 있는 문제로서, 양 끝단이 막힌 파이프내의 정지된 매질에 압력 교란을 가한 후 시간에 따른 압력변화를 파악하는 데 주된 관심이 있다. 따라서 로켓모터와 같은 공진 시스템에서 발생되는 비선형 음향 거동에 대한 예측성을 평가할 수 있기 때문에 연소불안정 해석에 적용하고자 하는 수치해석방법의 타당성을 검증하는 좋은

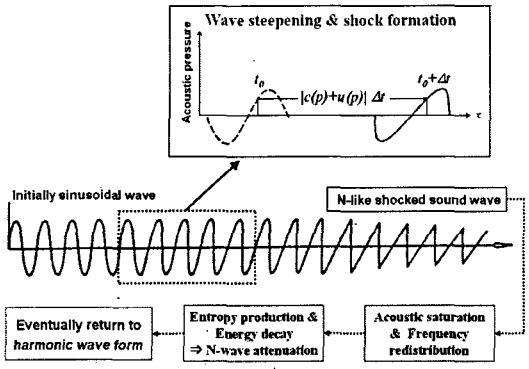


Fig. 5 Wave steepening process in a resonant pipe with initial pressure disturbance

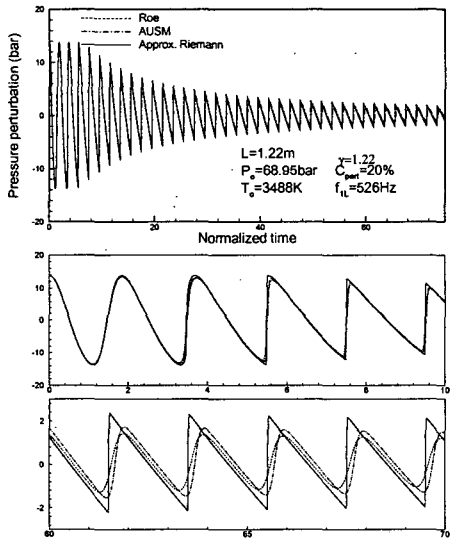


Fig. 6 Time evolution of pressure oscillations at the left wall of resonant pipe

판단근거를 제공할 수 있다.[4]

Fig. 5에서 보듯이 공진관에 주어진 사인파 형태의 압력교란은 wave steepening을 통해 톱니 모양의 충격파(N-wave)로 변하게 된다. 이러한 파형의 왜곡은 유체의 유동 속도가 압력파의 전파속도에 기여하게 되고 음속 역시 각각의 위치에 따라 달라지기 때문에 음압이 끝단에서 적체되어 나타나는 비선형적 현상이다. N-파동이 형성되고 난 후 일정한 형태를 유지하게 되는데, 이때 압력진폭은 초기 교란의 크기에는 무관하고 진동주파수에 의해 결정되게 된다(acoustic saturation). 또한 파형의 왜곡은 음향에너지가 초기에 사인파가

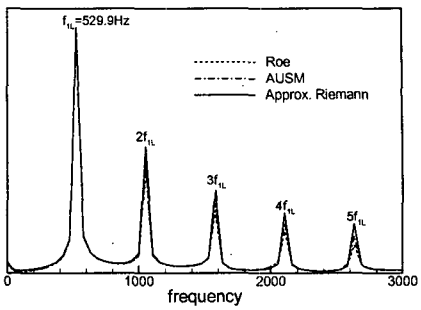


Fig. 7 FFT result for the wave steepening

갖는 단색 주파수로부터 정수배의 harmonics 모드로 재분배되게 된다(frequency redistribution). 추가적으로 일어나게 되는 현상으로 충격파의 발생에 따른 엔트로피 증가는 점차 N-파동을 감쇄시키게 된다(attenuation of N-wave). 따라서 지속적인 에너지원이 공급되지 않는다면 공진관내의 압력진동은 충분한 시간 후에는 궁극적으로 다시 조화함수 형태의 완만한 파형으로 되돌아가게 된다. 서론에서 밝힌 대로 격자경계면에서 대류플럭스를 계산하는 수치해석 기법의 정확도가 낮다면 소산오차(dissipative error)가 발생하고 이는 유체의 점성처럼 작용하여 고주파의 harmonics를 소산시키게 된다. 따라서 N-파형 충격파의 끝단이 뭉툭해지는 해석결과를 얻게 되고 실제보다 훨씬 빠른 N-파동의 감쇄를 예측하게 된다. 반대로 고차 정확도 기법을 사용하는 경우 격자경계면에서의 플럭스를 적절히 제어하지 못한다면 불연속면 근방에서 수치적 압력진동을 야기하게 된다.

해석조건은 압력과 온도가 각각 68.95bar과 3488K인 가스(비열비 1.22)가 채워진 길이 L=1.22m인 파이프 내에 아래와 같은 축 방향 압력교란(C_{pert}=20%, N=1)을 가한 경우이다.

$$p'(x,0)=\bar{p}(x)\left[1+C_{pert}\cos\left(\frac{N\pi x}{L}\right)\right] \tag{12}$$

이때 초기 교란된 밀도와 온도장은 등엔트로피 관계식을 통해 결정하였으며 초기 속도섭동은 없다고 가정하였다. 양 끝단은 고체벽면으로 처리하였다. Fig. 6은 왼쪽 벽면에서 구한 시간에 따른 압력진동의 해석결과를 나타내고 있다. 초기 압력교란의 크기가 상대적으로 크므로(평균압력의 20%) 충격파가 형성되는 주기가 매우 빠르게 나타난다. 근사리만기법은 수치진동 없이 N-파형

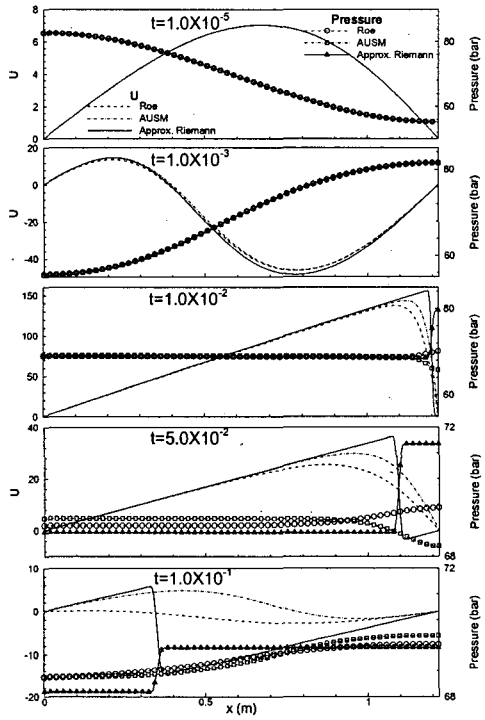


Fig. 8 Several solutions of velocity and pressure

을 정확히 예측하고 있으며, 많은 주기가 지난 후에도 동일한 파형을 유지하는 것을 알 수 있다. 그렇지만 Roe[11,12]와 AUSM[13,14] 차분법은 감쇠효과가 크게 발생되어 N-파형 예측에 어려움이 있음을 볼 수 있다. 또한, Fig. 7은 음향포화(acoustic saturation) 상태에 대한 FFT 결과를 보여주고 있으며, 파형의 왜곡으로 인해 초기의 1차 축 방향 음향모드로부터 정수배의 harmonics($2f_{1L}$, $3f_{1L}$...)로 음향에너지가 분배되었음을 알 수 있다. Fig. 8은 시간변화에 따른 공진관 내부의 속도 및 압력의 분포를 보여주고 있다. 초기 cosine함수로 주어진 압력변화에 의존한 속도분포가 서서히 발달하면서, $t=1.0\times10^{-2}$일 때부터 공진관의 끝단에서 압력파가 적체되어 N-파동의 형성이 시작되고 있다.

결과적으로 파형왜곡현상의 예측에서 Roe[11,12]와 AUSM[13,14] 차분법은 정확성의 증가가 필요함을 나타내었다. 물론 최근에 정확성이 개선된 기법들[15,16]이 많이 제안되어 그런 종류의 차분법을 이용하면 좋은 결과를 예상할 수 있다. 따라서 예비해석과정에서 본 연구의 해석코드에 도입을 시도하였지만 기법의 복잡성으로 안정성을 확인

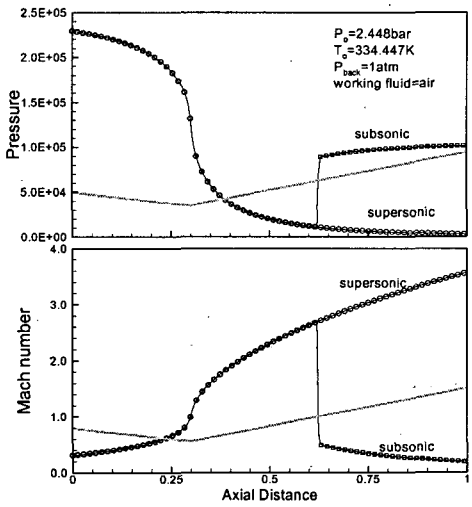


Fig. 9 Normal shock in a convergent-divergent nozzle

할 수 없었다. 결과적으로 제한된 조건에서 상대적으로 예측성이 우수한 근사리만기법[10]을 선택하였다. 파형왜곡현상에 대한 결과로부터 본 연구에서 사용한 수치해석 방법은 연소불안정 문제해석을 적용하는데 적절한 정확성과 안정성을 가지고 있는 것으로 판단된다.

3.3 축소-확대 노즐내의 수직 충격파

액체로켓엔진에 적용하기 위해서는 유로의 단면의 변화[$A(x)$]와 압축성 유동의 입/출구 경계가 고려되어야 하므로, 경계조건 처리에 대한 검증을 위해서 간단한 예로서 Fig. 9와 같은 일반적인 축소-확대(convergent-divergent) 노즐내의 압축성 유동을 해석하였다. 입구에서는 정체조건을 주었으며, 출구는 각각 초음속 출구조건과 1 기압의 배압이 걸리는 아음속 압력경계조건을 고려하였다. 계산영역내의 압력/속도 진동이 경계면에 도달하면 파동의 반사 및 투과가 일어나는 동시에 부적절한 수치적 진동(wiggle)이 발생될 수 있다.[17] 정상상태 해를 구하는 경우 수렴성에 관계된 경계 처리만이 중요하다. 그러나 LES(Large Eddy Simulation)와 DNS(Direct Numerical Simulation)와 같이 비정상거동을 정밀하게 해석해야 하는 경우이거나, 연소불안정에 대한 비정상해석을 수행할 경우 경계처리는 수치해석의 효율성과 정확성을 크게 좌우하게 된다. 본 연구에

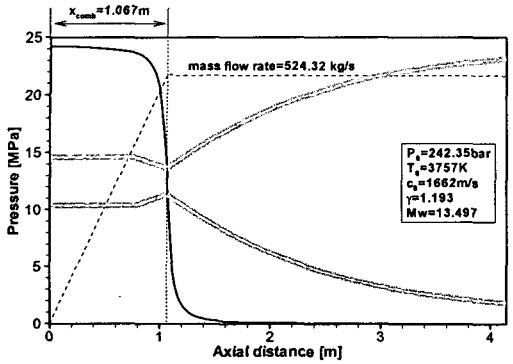
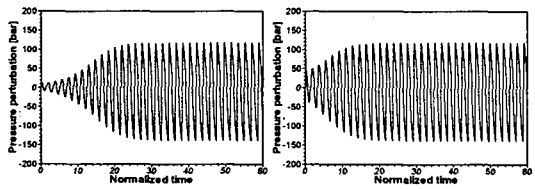
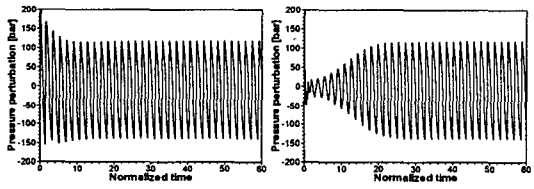


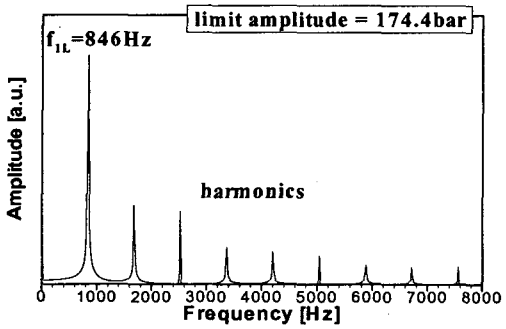
Fig. 10 Steady solution for SSME engine



(a) $C_{pert,1L}$=5% (b) $C_{pert,1L}$=20%



(c) $C_{pert,1L}$=80% (d) $C_{pert,2L}$=20%



(e) PSD of the limit cycle

Fig. 11 Existence and stability of limit cycle (τ^*=1.0, n=2.0, P_o=242.35bar)

서는 경계면의 특성속도에 따라 입사 및 반사파의 양을 조절하는 오일러-특성경계조건(Euler Characteristic Boundary Conditions)[17]을 사용하였다. 이 방법은 특성속도를 이용하여 경계면에서 플럭스를 계산하기 때문에 무반사(Non-reflecting) 경계처리가 용이하게 구현될 수 있는 장점이 있다.

Fig. 9에 나타난 결과를 보면 전형적인 축소-확대 단면 노즐의 유동특성을 잘 예측하고 있음을 알 수 있다. 특히 1기압의 배압이 걸리는 아음속 압력경계인 경우 노즐내부에 수직충격파의 발생을 적절하게 묘사하고 있다. 위의 결과로부터 본 연구에서 사용한 해석방법은 로켓엔진에서 나타나는 축방향 단면 변화 및 입/출구 경계조건에 따른 아음속-초음속의 유동특성을 적절하게 예측할 수 있음을 알 수 있다.

3.4 SSME내의 축방향 연소불안정 해석

앞 절의 선행연구로부터 확립된 해석기법을 바탕으로 로켓엔진에 대한 적용성을 검토하기 위하여 많은 연구대상이 되어 온 SSME에 대한 해석을 수행하였다. 해석은 한계사이클과 관련된 비선형 거동에 미치는 연소파라미터의 영향을 살펴보는데 목적을 두었다. 연소불안정 해석을 위해 식 (4)와 같은 n-τ 연소응답모델을 사용하였으며, 먼저 Fig. 10에 나타낸 추력실 형상 및 연소조건에 대해 평균 열 방출율이 일정하다는 가정을 통해 정상상태 해를 구하였다. 초기 교란을 주는 방법은 t=0까지는 엔진이 정상상태로 작동하다가 순간적으로 연소실 내부($x<L_{comb}$)에 식 (12)와 같은 코사인 함수형태의 압력교란이 가해진다고 가정하였다. 이때 속도장은 그대로 두고 초기 교란된 밀도와 온도장은 등엔트로피 관계를 통해 계산하였다. τ^*는 지연시간 τ를 특성시간 τ_{ref}로 무차원하여 나타낸 값이다. 주어진 해석조건에서 계산한 특성시간 τ_{ref}는 0.642msec이다.

Fig. 11은 연소파라미터가 각각 τ^*=1(공진조건)과 n=2인 조건에서 각각 다른 초기 교란을 주고 해석한 결과이다. 초기에 주어진 코사인 형태의 연속적인 기본 진동모드(1L=노즐목까지 0.5주기, 2L=노즐목까지 1주기)는 비선형적 파형 왜곡(wave-steepening)을 거쳐 스스로 불연속적인 파형을 갖는 급격한 전방파(N-type shock wave)로 변환된다. 해석결과로부터 한계사이클의 진폭과 음향모드는 연소파라미터와 작동조건만의 함수일 뿐, 초기 교란의 특성(크기와 모드)과는 상관없이 동일하게 나타나는 것을 알 수 있다. 이때, 한계진폭은 평균 연소압 P_o의 97.8%로 예측되었으며, 846Hz의 1차 종방향(1L) 음향모드를 나타낸다.

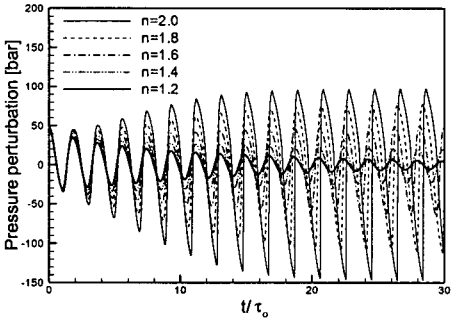


Fig. 12 Effect of interaction index, n (τ^*=1.0, P_o=242.35bar, $C_{pert,1L}$=20%)

한계사이클의 PSD(power spectral density)을 살펴보면 1L 모드와 함께 정수배의 하모닉 모드들($2f_{1L}$, $3f_{1L}$, ..)이 존재하는 것을 알 수 있다. 이들은 2L, 3L등의 독립된 고차 모드를 의미하는 것이 아니라, 앞 절에서 설명한 대로 N-파형의 음향에너지 재분배 결과로 나타난다. 선형불안정 엔진에서 초기 교란의 특성은 한계사이클 자체와는 무관하지만 한계사이클에 도달하기까지 나타나는 천이과정에는 많은 영향을 주게 된다. Fig. 11(a)~(c)를 보면 초기 교란이 클수록 천이구간이 짧아지며 한계사이클에 빨리 도달하는 것을 알 수 있다. 또한 Fig. 11(d)의 결과로부터 초기에 가해진 2L 모드의 압력교란은 천이구간을 거치면서 1차 모드로 바뀌는 것을 알 수 있다. 결과적으로 주어진 엔진의 작동조건에 대해 초기 교란이 적절한 모드가 아닌 경우에는 천이구간을 거쳐 스스로가 작동조건에 맞는 연소불안정 모드로 변화된다. 다시 말해, 선형 불안정 엔진에서 한계사이클의 예측은 초기교란에 대한 어떠한 정보도 필요로 하지 않게 된다.

다음으로 연소파라미터 n과 τ의 영향을 살펴보았다. 공진조건(τ^*=1)에서 증폭지수 n을 변화시켜 가며 해석한 Fig. 12의 결과를 보면, n이 클수록 한계사이클에 빨리 도달하고 한계진폭도 커지게 된다. 반면에 n=1.4과 1.2인 경우에는 초기 교란이 증폭되지 못하고 압력진동이 감쇠되는 것을 알 수 있다. n=2.0과 $C_{pert,1L}$=20%일 때 τ^*를 변화시킨 해석결과를 Fig. 13에 나타내었다. 한계진폭은 공진조건(τ^*=1)에서 가장 크게 나타나며, 공진조건으로부터 벗어남에 따라 점차 작아진다.

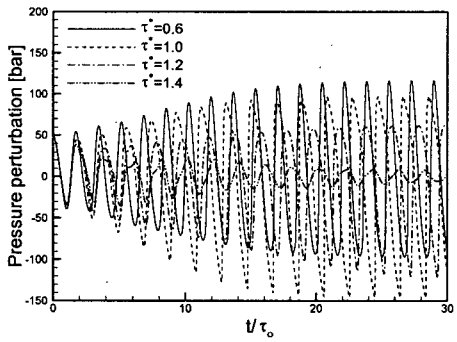


Fig. 13 Effect of sensitive time lag, τ^* (n=2.0, P_o=242.35bar, $C_{pert,1L}$=20%)

탈공진조건(off-resonant condition)에서는 압력의 기준값이 평균 연소압 P_o로부터 약간씩 커지거나 작아지는 경향을 나타내고 있으며, 공진조건에서 벗어난 형태에 따라 파형의 형태가 뚜렷한 차이를 나타내게 된다. 이와 같은 방법으로 n과 τ를 변화시켜 가며 해석을 수행하면 주어진 작동조건에서 1L 모드의 선형안정한계(linear stability limit)를 구할 수 있다. 이 곡선을 기준으로 위쪽이 선형불안정영역(linearly unstable regime), 즉 아주 작은 교란에 대해서도 1L 모드 연소불안정이 발생되는 영역이 된다.

Fig. 14는 위의 방법을 이용하여 구한 SSME에 대한 선형안정한계 결과이다. 선형불안정영역에서 n의 최소값은 1.4로 공진조건(τ^*=1)이 아니라 τ^*=0.85에서 나타난다. $\tau^* = \tau / \tau_{ref}$의 관계에서 τ_{ref}는 단면적 변화가 없는 경우에 유효하지만, SSME와 같은 로켓노즐에서는 노즐축소부의 영향으로 인해 실제 파장 길이가 노즐목까지 길이 L_{comb}보다 15% 정도 작아지기 때문에 나타난 결과이다. 1L 모드의 공진조건을 벗어나서 2L 모드가 훨씬 위쪽의 작은 영역에서 나타나는 이유는 노즐 축소부의 존재가 고차의 축방향 모드를 안정화시키는 역할을 하기 때문이다. 따라서 단면적 변화를 고려하지 않고 노즐부가 극단적으로 짧다는 가정(short-nozzle approximation)을 사용한 경우[5]에는 예측할 수 없는 경향이다. 이론적으로 선형안정한계 곡선 아래로 선형안정영역(linearly stable regime), 즉 작은 교란에 대해서는 안정하지만 일정한 크기 이상의 교란이 주어지면 촉발연소불안정(triggering instability)이 발생하는 영역

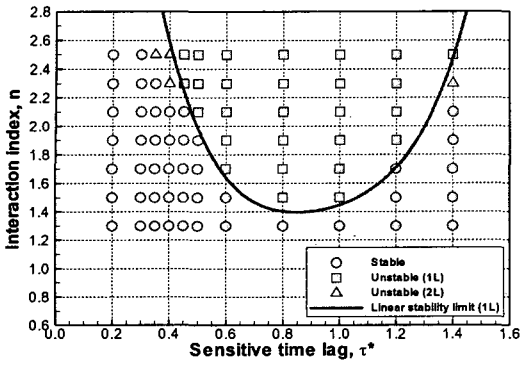


Fig. 14 Prediction of linear stability limit for longitudinal combustion instabilities within SSME

이 존재한다. 그보다 더 아래로 내려가면 어떠한 크기의 교란에 대해서도 항상 안정한 절대안정영역(absolute stable regime)이 된다. 선형안정영역과 절대안정영역을 구분하는 기준으로서 비선형안정한계(nonlinear stable limit)는 항상 선형안정한계 아래에 나타나게 된다. 본 연구에서는 선형안정영역과 비선형 안정한계를 예측하고자 시도하였으나 촉발 연소불안정 현상을 발견할 수 없었다. 그 이유는 선형화된 n-τ 연소모델로 인해 연소과정이 갖는 비선형성이 과소평가되기 때문으로 판단된다. 연소불안정의 비선형적 거동은 크게 충격파, Arrhenius 형태의 화학반응율, 그리고 추진제 액적의 증발과정으로부터 발생한다. 시간지연 이론은 다음과 같은 두 가지 가정에 기초하기 때문에 실제 연소안정성 문제에 적용하는 데 제약이 따른다. 첫 번째로, 액체 추진제의 증발 또는 연소과정은 분사시점으로부터 일정 지연시간이 지난 후에 순간적으로 그리고 완전하게 일어난다고 가정하며, 동일한 시간대에 분사된 추진제의 모든 질량은 동일한 시간지연을 가지고 연소된다는 가정이다. 실제 조건하에서 연료액적의 증발은 유한한 시간구간에 걸쳐 점진적으로 진행되며, 액적 가열과정은 액적의 수명(life time)에서 상당한 부분을 차지한다. 따라서 위의 가정은 액적의 수명이 압력진동 주기에 비해 무시할 정도로 작은 경우에만 타당할 수 있다. 두 번째로, 추진제 질량의 연소는 단지 시간지연 구간에 걸쳐 가상의 "controlling rate-process"에서 일어나는 에너지 축적의 결과로만 일어난다고 가정한다. 이렇게 가정된 시간지연은 실제 시스템에 존재하는 그 어떠한 물리적 과정과도 직접적으로 연결할 수 없다. 따라서 궁극적으로는 국내에서 개발되고 있는 액체로켓엔진의 추진제 조합(케로신/액체산소)과 분사방식(동축형 스월 분사기) 등을 고려하여 연소현상에 대한 기본적 연구와 물리모델의 개발이 함께 진행되어야 할 것으로 사료된다.

4. 결 론

액체로켓엔진에서 축방향 진동모드로 발생하는 비선형 연소불안정을 예측하기 위해 1차원 해석코드를 개발하였다. 다양한 측면에서 수치해법의 정확성을 검증하였고, n-τ 연소응답모델을 사용하여 한계사이클의 특성을 파악함과 동시에 선형안정한계를 예측하였다. 본 연구의 결론을 요약하면 다음과 같다.

(1) 대류항 차분법에 대한 선행연구로부터 선택된 근사리만 해법과 오일러-특성 경계조건은 충격관 및 축소-확대 노즐에서 나타나는 충격파에 대해 좋은 예측을 보여주었다. 특히, 공진관내에서 일어나는 비선형 음향거동(wave steepening)의 결과는 연소불안정에서 흔히 수반되는 N-파형 충격파(steep-fronted shock wave)의 발생메커니즘을 잘 묘사할 수 있음을 보여주었다.

(2) 검증된 해석방법을 확대비가 큰 SSME 노즐에 적용하여 축방향 진동모드를 갖는 연소불안정의 비선형적 특성을 고찰하였다. 초기에 주어진 압력교란은 천이구간을 거쳐 스스로 주어진 작동조건에 맞는 연소불안정 모드로 변화되는 것을 발견하였으며, 초기 교란의 특성(크기, 모드)에 상관없이 동일한 한계사이클에 도달하는 것을 알 수 있었다. 이를 통해 연소파라미터에 따른 선형안정한계를 구할 수 있었으나, 선형화된 n-τ 연소응답모델의 한계로 인해 비선형안정한계는 예측할 수 없었다. 촉발 불안정을 예측하기 위해서는 액적 증발 및 화학반응과 관련된 비선형성을 고려할 수 있는 물리모델의 개발이 필요할 것으로 판단된다.

(3) 본 연구를 통해 설계방향 제시 및 연소시험결과를 분석할 수 있는 연소불안정 예측코드 개발 가능성을 확인하였다. 개발된 1차원 해석코드는 2차원 환형(annular) 모델을 이용한 축-접선방향(longitudinal-tangential) 연소불안정 해석코드로 확장하는 연구가 진행될 예정이다. 이러한 해석코드는 시간지연모델에 필요한 n과 τ를 연소시

험결과로부터 도출하는 연구가 확립되면 활용성이 증가될 것으로 생각된다. 그렇지만 정확한 고주파 연소불안정 해석은 비정상 연소과정에 대한 정교한 묘사기법 연구가 선행되어야 가능할 것으로 생각된다.

후 기

이 논문은 2005년도 경북대학교 학술진흥연구비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

(1) Harrje, D. T. and Reardon, F. H. (eds.), 1972, "Liquid Propellant Rocket Combustion Instability," *NASA SP-194*.

(2) Kim, H. J. and Kim, S. K., 2006, "A Study on the Acoustic Damping Characteristics of Acoustic Cavities in a Liquid Rocket Combustor," *Transactions of the KSME(B)*, Vol. 30, No. 1, pp. 32~40.

(3) Sohn, C. H., Kim, S. K. and Kim, Y. M., 2004, "Effects of Various Baffle Designs on Acoustic Characteristics in Combustion Chamber of Liquid Rocket Engine," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 18, No. 1, pp. 145~152.

(4) Przekwas, A. J. and Yang, H. Q., 1989, "Advanced CFD Methodology for Fast Transients Encountered in Nonlinear Combustion Instability Problem," *CFDRC Report 4065/1 Under Contract No. NAS8-38034*, Marshall Space Flight Center, Alabama.

(5) Lores, M. E. and Zinn, B. T., 1972, "The Prediction of Nonlinear Longitudinal Combustion Instability in Liquid Propellant Rockets," *NASA CR-120904*.

(6) Kim, Y. M., Chen, C. P., Ziebarth, J. P. and Chen, Y. S., 1994, "Prediction of Fast Transient Spray Combustion Flows," *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 25, pp. 21~42.

(7) Habiballah, M. and Dubois, I., 1995, "Numerical Analysis of Engine Instability," in Liquid Rocket Engine Combustion Instability (Yang, V. and Anderson, W. E., eds), *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 169, AIAA, Washington DC, pp. 475~502.

(8) Crocco, L., Grey, J. and Harrje, D. T., 1960, "Theory of Liquid-Propellant Rocket Combustion Instability and Its Experimental Verification," *ARJ Journal*, Vol. 30, pp. 159~168.

(9) Yoon, W. S. and Huh, H. I., 2003, "Prediction of High Frequency Combustion Instabilities of a Liquid Rocket Engine," *Journal of the Korean Society of Propulsion Engineers*, Vol. 7, No. 3, pp. 61~68.

(10) Koptchenov, V. I. and Krajko, A. N., 1983, "Monotone Second Order Accurate Difference Scheme for Systems of Hyperbolic Equations with Two Independent Variables," *USSR J. Comp. Math. and Math. Phys.*, Vol. 23, pp. 848~859 or http://www.geocities.com/andrei_chernousov.

(11) Roe, P. L., 1981, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *J. Computational Phys.*, Vol. 43, pp. 357~372.

(12) Roe, P. L., 1986, "Characteristic-based Schemes for the Euler Equations," *Ann. Rev. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 337~365.

(13) Liou, M. S. and Steffen, C. J., 1993, "A New Flux Splitting Scheme," *J. Computational Phys.*, Vol. 107, pp. 23~39.

(14) Liou, M. S., 1996, "A Sequel to AUSM: AUSM+," *J. Computational Phys.*, Vol. 129, pp. 364~382.

(15) Wendroff, B., 1999, "A Two-Dimensional HLLE Riemann Solver and Associated Godunov-Type Difference Scheme for Gas Dynamics," *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 38, pp. 175~185.

(16) Kim, S. S., Kim, C., Rho, O. H. and Hong, S. K., 2003, "Cures for the Shock Instability: Development of a Shock-Stable Roe Scheme," *J. Computational Phys.*, Vol. 185, pp. 342~374.

(17) Poinsot, T. and Veynante, D., 2001, Theoretical and Numerical Combustion, 1st ed., Edwards, Inc., PA.