Bonhoeffer - van der Pol 오실레이터 모델에서의 미소 파라미터 섭동에 의한 카오스 제어

배영철

A study on Controlling chaos for Bonhoeffer-van der Pol oscillation model by small parameter perturbation

Youngchul Bae

Devision of Electronic Communication and Electrical Engineering Chonnam National University
Yeosu 550-250, Korea

ABSTRACT

Applied by periodic Stimulating Currents in Bonhoeffer -Van der Pol(BVP) model, chaotic and periodic phenomena occured at specific conditions. The conditions of the chaotic motion in BVP comprised 0.7182< A_1 <0.792 and 1.09< A_1 <1.302 proved by the analysis of phase plane, bifurcation diagram, and lyapunov exponent.

To control the chaotic motion, two methods were suggested by the first used the amplitude parameter A1, A1 = ε(($x-x_s$) - ($y-y_s$)) and the second used the temperature parameter c , $c = c(1+\eta\cos\Omega t)$ which the values of η,Ω varied respectlvly, and x_s, y_s are the periodic signal. As a result of simulating these methods, the chaotic phenomena was controlled with the periodic motion of periodisity. The feasibilities of the chaotic and the periodic phenomena were analysed by phase plane Poincare map and lyapunov exponent.

1. 서 론

최근에 카오스 현상에 대한 관심이 물리학, 화학, 생물학 등에서 높아지고 있으며 이에 대한 응용이 활발하게 진행되고 있다[1,2]. 많은 생물학적 리듬 과정들은 리미트 사이클 거동을 보여주는 비선형 미분방정식으로 표현되는 발진 시스템과 밀접한 관계를 갖고 있으며 이 발진들은 안정한 범위에서 제어 파라미터 값의 변화에 대응하여 보다 안정화 할 수 있다. 외부에서 주기적인 힘을 인가할 때 비선형 시스템은 주기 배증과정을 거쳐 카오스 현상으로 천이된다[3,4].

비선형 시스템에서 주기적으로 가한 힘에 대한 연구는 이론적으로나 실험적으로 관심의 대상이 되어 왔다. 이 같은 시스템을 대표한 예는 Van der pol 오실레이터로서 이는 물리학 ,전자공학, 생물학, 신경학 등 비선형 동력학에서 자기 여기 발진(Self - excited oscillation)의 기본적인 모델로 광범위하게 사용되어 왔으며 생물학적인 리듬도 Van der pol 오실레이션 시스템과 밀접한 관계를 갖는다.

2개의 변수를 가진 여기된 신경막과 신경 세포막에 전기적 임펄스와 전압 펄스의 지연을 다음과 같이 2개의 방정식으로 나타낼 수 있으며 이를 Bonhoeffer-Van

* 전남대학교 공학 대학 전자통신전기공학부
접수일자 : 2006년 10월 15일

der pol(BVP) 모델이라 부른다[5,6].

$$\dot{x} = x - x^3 / 3 - y + I(t) \quad (1)$$

$$\dot{y} = c\,(x + a - b\,y) \quad (2)$$

여기서 x는 막전위, y는 자극으로 부터 막의 회복을 나타내는 시정수에 관련된 변수, $I(t)$는 외부에서 가한 주기적 자극전류, a는 막의 반경, b는 막의 내부에 흐르는 비저항(저항률), c는 온도요소를 나타낸다.

BVP모델에 대한 연구로서 Kawato와 Suzuki[6], Okuda[5]는 주기적 자극전류가 없는 상태 ($\dot{I}=0$)에서 In - phase와 Anti - phase해의 안정도,Threshold와 Shaping의 활동잡음의 영향에 대한 연구, 주기적 자극전류를 인가하여 카오스 신호를 생성[10]한 연구가 있었다.

본 논문에서는 BVP 모델에 주기적 자극전류를 인가하여 카오스 신호를 생성하고 미소 파라미터 섭동에 의하여 카오스 신호를 주기신호로 바꾸어 주거나 그 크기를 줄여 주는 제어를 행하였으며 이에 대한 타당성을 위상 공간과 Poincare map, Lyapunov exponent로 증명하였다.

2. BVP모델에서의 주기 배증과정과 카오스 현상 해석

식(1)과 식(2)에서 주기적 자극전류 $I(t) = A_1 \cos \omega t$를 인가하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{x} = x - x^3 / 3 - y + A_1 \cos \omega t \quad (1a)$$

$$\dot{y} = c\,(x + a - b\,y) \quad (2a)$$

식(1a)과 식(2a)에서 a,b,c는 다음과 같은 조건을 만족하여야 한다.[5,6]

$$b < 1 \quad (3)$$

$$3a + 2b \geq 3 \quad (4)$$

$$b < c^2 \quad (5)$$

2.1 A1 값의 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동 해석

식(1a)와 식(2a)에서 주기적 자극전류 $I(t) = A_1 \cos \omega t (\omega = 1.0)$을 $A_1 > 0$ 의 조건이 되는 A_1의 크기를 변화하였을 때 위상 공간을 조사하였다.

2.1.1 $0 < A_1 < 0.6070$ 일 때

그림 1에서 보는바와 같이 $0 < A_1 < 0.6070$ 범위에서는 주기적 자극 전류를 가하지 않은 상태인 그림 1과 비슷한 결과를 얻었으며 1주기 운동을 하고 있다.

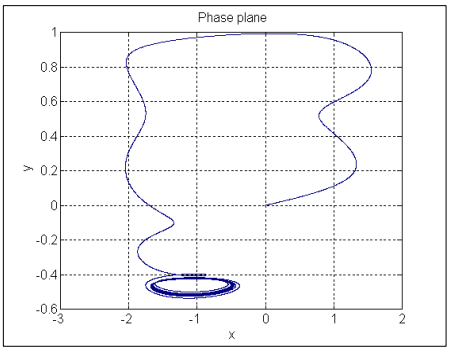

Fig.1 Phase plane when $A_1 = 0.6070$

2.1.2 $0.6070 < A_1 < 0.7182$ 일 때

$0.6070 < A_1 < 0.7182$ 범위에서는 그림 2에서 보는바와 같이 2주기 운동이 이루어짐을 확인 할 수 있으며 A_1의 값이 커질수록 4주기, 8주기 등의 주기배증과정이 이루어진다.

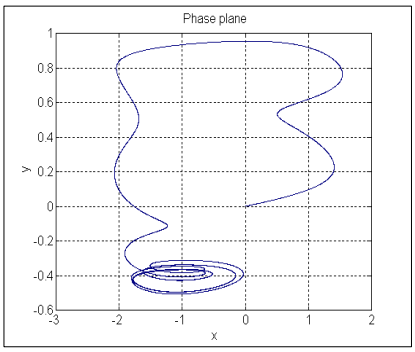

Fig.2 Phase plane when $A_1 = 0.7181$

2.1.3 $0.7182 < A_1 < 0.792$ 및 $1.09 < A_1 < 1.302$ 일 때

$0.7182 < A_1 < 0.792$ 및 $1.09 < A_1 < 1.302$ 범위에서는 그림 3에서 보는바와 같이 카오스 운동이 이루어짐을 확인할 수 있다. 그림 3은 A_1이 0.76, 그림 4는 A_1이 1.28일 때의 위상공간에 대한 카오스 현상을 나타내었다.

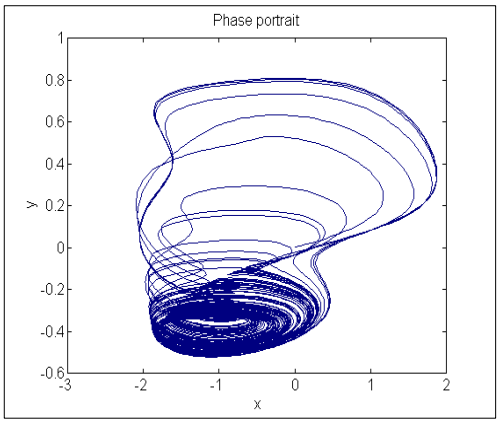

Fig.3 Phase plane when $A_1 = 0.76$

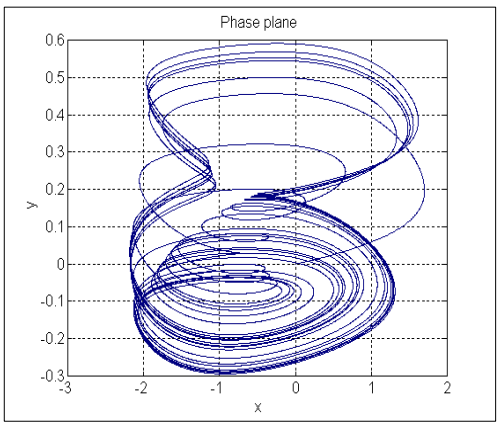

Fig.4 Phase plane When $A_1 = 1.28$

2.1.4 $A_1 > 1.29$ 일 때

진폭 A_1값을 1.29보다 큰 값으로 변화하면 카오스 운동에서 주기운동으로 바뀐다. BVP모델은 A_1값에 따라 주기운동에서 카오스 운동으로 카오스 운동에서 주기운동으로의 역현상이 일어남을 알 수 있다.

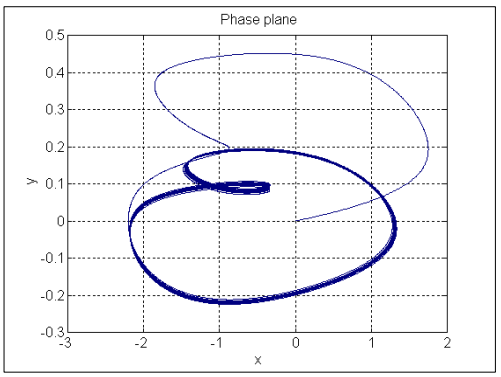

Fig.5 Phase plane when $A_1 = 1.62$

2.2 분기도(Bifurcation) 및 Lyapunov exponent 의한 주기배증 과정과 카오스 운동 해석

식 (1a), (2a) A_1 값의 변화에 의해 주기운동과 카오스 운동을 분기도를 통해 확인해 보았다.A_1값을 0부터 1.8까지 변화 하였을 때 분기도를 그림6에 Lyapunov exponent를 나타내었다.

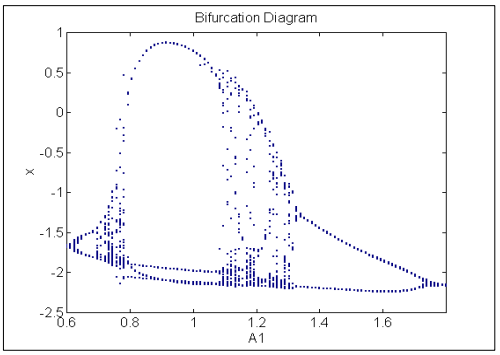

Fig.6 Bifurcation.$(0.6 < A_1 < 1.8)$

그림 6에서 A_1이 0.6070일 때 2주기의 분기가 발생하고 0.7182일때 주기 배증이 계속되며 Band Merging 점들이 모여 있음을 알 수 있고 0.7181 이후에 카오스 현상이 일어남을 확인할 수 있다. 또한 q x 2n (q는 정수 n은 주기 q의 기본적 주기 궤도의 주기적 배증의 차수를 나타낸다)의 주기를 가진 고차주기인 경우 윈도우(분기도에서 하얀 부분)들이 나타나며 이 사실로 부터 카오스현상이라는 것이 분명해진다.

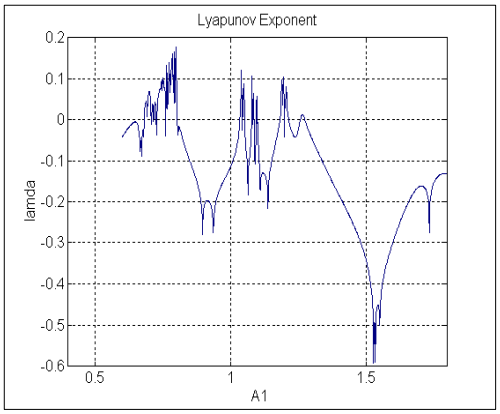

Fig.7 Lyapunov exponent.$(0.6 < A_1 < 1.8)$

3. 진폭 A1값의 섭동에 의한 제어

본 논문에서는 식(1a)와 식(2a)에서 카오스 운동이 일어날 때 주기적 자극 전류 에서 A_1값의 미소 섭동에 의한 제어방법을 제시하였다. 카오스 신호를 원하는 주기 신호인 $X_s=(x_s(t),y_s(t))$로 제어하기 위해 주기적 자극 전류의 진폭 A_1값을 적응 제어 알고리즘[11]을 적용하여 다음과 같이 처리하였다.

$$\dot{A}_1 = \epsilon G(X - X_S)$$
$$= \epsilon((x - x_s) - (y - y_s)) \quad (6)$$

여기서 ε은 제어의 강인성, G는 X_s와 실제 출력값 X사이의 차에 비례하는 함수를 나타낸다. 식(6)에서 제어하고자 하는 주기신호

$$x_s = a + b\cos(\omega t) + c\sin(\omega t)$$

$$y_s = d + e\cos(\omega t) + f\sin(\omega t)$$

를 주어 각 계수의 값을 조정하면 카오스에서 1주기 운동으로 제어됨을 그림 8에 나타내었다.

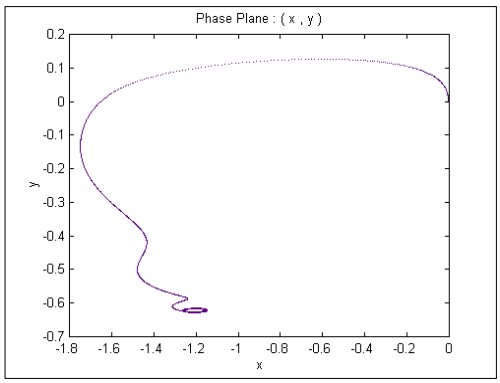

Fig.8 Phase plane after control by amplitude perturbation.

4. 온도요소 C의 섭동에 의한 제어

식(1a)와 (2a)에서 온도 요소 C에 의한 카오스 신호를 주기 신호를 제어하기 위해 온도 요소 c대신 c(1+η$\cos\Omega$t)인 미소 파라미터를 인가하면 다음 식과 같이 정리할 수 있다.

$$\dot{x} = x - x^3/3 - y + A_1\cos\omega t \quad (7)$$

$$y = c(1 + \eta\cos\omega t)(x + a - by) \quad (8)$$

식(7)과 (8)에서 Melnikov의 섭동 범위[8]를 만족하는 η의 값과 Ω의 값을 정하여 변화시키면 카오스 운동에서 주기 운동으로 제어가 이루어진다.

본 논문에서는 식(7)과 (8)에서 주기적 자극 전류가 발생하는 조건인 A_1을 0.76으로 놓고 미소한 파라미터의 특성을 나타내기 위하여 η<<1인 조건을 만족하는 0<η<0.4 범위와 0<Ω<2의 범위에서 카오스 운동이 주기운동으로 제어됨을 위상 공간과 Poincare map, Lyapunov exponent로 확인하였다.

Ω와 η값의 변화에 의한 주기 운동과 카오스 운동의 결과를 표1에 나타내었다.

Table 1. The result of control by variation Ω and η.

Ω	η	결과
1.0	0.054	카오스
	0.059	카오스
	0.069	준주기
	0.104	4주기
	0.324	2주기
	0.399	1주기
1.5	0.054	카오스
	0.059	준주기
	0.069	준주기
	0.104	4주기
	0.324	1주기
	0.399	1주기
2.0	0.054	카오스
	0.059	카오스
	0.069	카오스
	0.104	카오스
	0.324	카오스
	0.399	준주기

대표적인 제어 결과를 그림9, 그림 10, 그림 11, 그림 12, 그림 13, 그림 14에 위상 공간과 Poincare map로 각각 나타내었다.

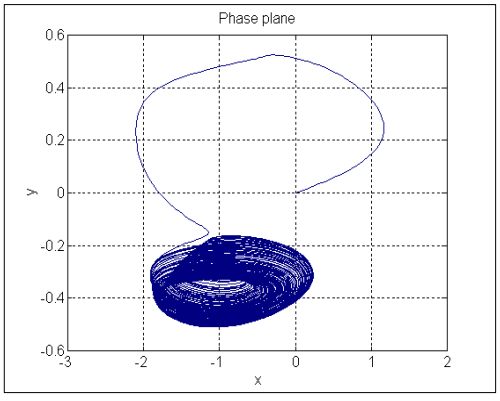

Fig.9 Phase plane when $\Omega=1,\ 0<\eta<0.055$ after control

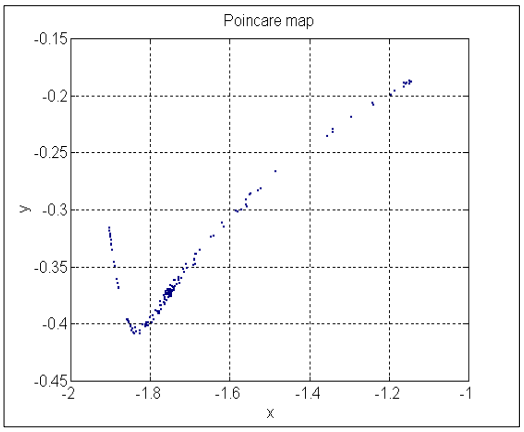

Fig.10 Poincare map when $\Omega=1,\ 0<\eta<0.055$ after control

그림 9와 그림 10에서 η값이 크지 않을 때에는 카오스 운동이 주기운동으로 제어되지 않음을 확인할 수 있다.

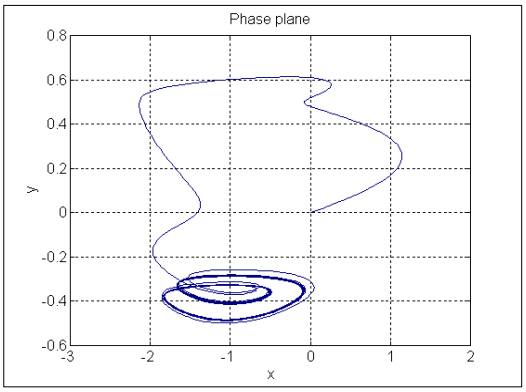

Fig.11 Phase plane when $\Omega=1,\ 0.105<\eta<0.325$ after control

그림 11과 그림 12에서 $\Omega=1,\ 0.105<\eta<0.325$의 범위에서는 카오스 운동이 2 주기운동으로 제어가 이루어짐을 알 수 있다.

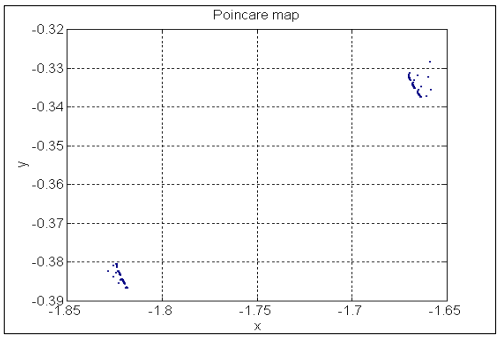

Fig.12 Poincare map when
$\Omega = 1,\ 0.105 < \eta < 0.325$ after control

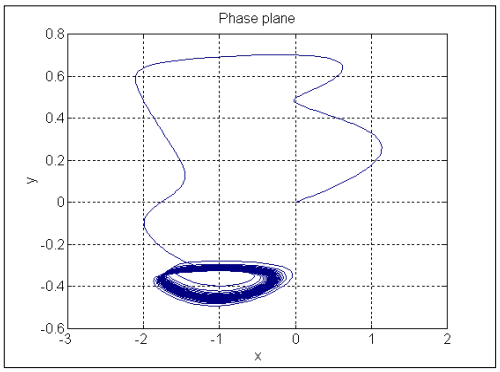

Fig.13 Phase plane when
$\Omega = 1,\ 0.325 < \eta < 0.4$ after control

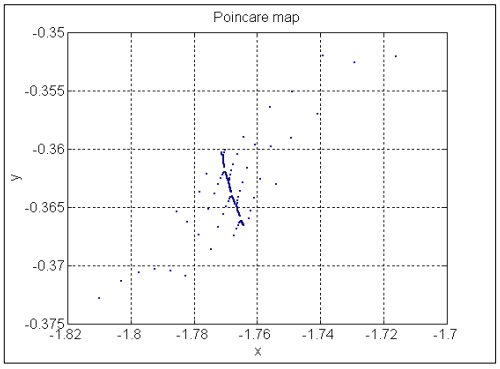

Fig.14 Poincare map when
$\Omega = 1,\ 0.325 < \eta < 0.4$ after control

그림 13과 그림 14의 결과에서 보듯이 1주기의 주기운동으로 제어가 이루어짐을 확인할 수 있다.

그림 15, 그림 16에 온도변화에 의한 제어 결과를 리아프노프 지수로 나타내었다.

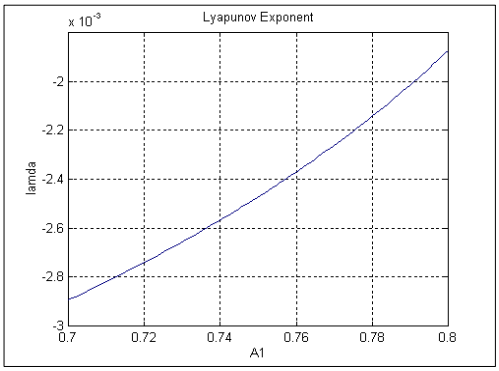

Fig.15 Lyapunov exponent after control.

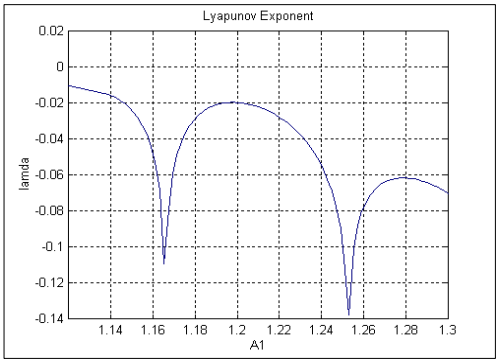

Fig.16 Lyapunov exponent after control.

그림 15, 그림 16에서 제어결과를 살펴보면 리아프노프 지수가 음수로 주기 운동을 나타내어 만족한 결과를 얻었다.

5. 결 론

본 논문에서는 BVP 모델에서 주기적 자극 전류를 인가하였을 때, A1값의 변화에 따라 주기 운동과 카오스 운동이 나타남을 비교 분석하고 미소 파라미터

섭동에 의한 카오스 운동을 주기 운동으로 제어하기 위한 방법을 자극 전류의 진폭 A1값을 적응 제어 알고리즘에 의한 방법과 온도 요소 $C(1+\eta\cos\Omega t)$의 섭동을 가하여 Ω과 η값의 변화에 의한 제어하는 방법을 제시하였고 이를 시뮬레이션을 통해 증명하였으며 만족할 만한 결과를 얻었다.

참고 문헌

[1] 배 영철, 카오스의 응용, 전자저널. pp110 - 112, 93.1.20

[2] J.P. Gollub, T.O.Brunner, and B.G.Danly, "periodicity and Chaos in Coupled Nonlinear Oscillators" science, 200, pp.48 - 50, 1978.

[3] A.v.Holden, ed. ,chaos, Manchester univ. press , 1986.

[4] N.Minoskey, Nonlinear Oscillation, Van Nostrand, 1962.

[5] M.Okuda, " A New Method of Nonlinear Analysis for threshold and shaping Actions in Transient states " progr. Theor. phys. 66, pp 90 -100, 1981.

[6] M.Kawatu. and R Suzuki, " Two Coupled Neural Oscillators and a Model of the Circadium pacemaker " J. Theor. Biol. 86, pp 574 - 575, 1980.

[7] A wolf J.B swift , H.L swinney and J.A. Vastano, " Determing Lyapunov exponent from a time series" physica D, 16, pp 285 - 317, 1985.

[8] J. Guckenheimer and P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical systems , and Bifurcations of Vector Field. ,springer- Verlag, 1983.

[9] E.Ott, C.Grebogi and J.A Yorke, " Controlling chaos" Phys.rew. Lett 64,pp 1196-1199.1990.

[10] 고재호, 배영철, 임화영, “주기적 외력을 인가한 Bonhoeffer-Van der pol 오실레이터 모델에서의 카오스 현상 해석에 관한 연구” 1995 제어계측 연구회 합동 학술 발표회 논문집, pp 100-102, 1995.

[11] B.A. Huberman & E.Lumer "Dynamics of adaptive system" IEEE Trans. Circuit and System. 37 pp 547-550.1990.

저자 소개

배영철(Youngchul Bae)

1984년 2월 광운대학교 전기공학과 졸업

1986년 2월 광운대학교대학원 전기공학과 졸업(공학석사)

1997년 2월 광운대학교대학원 전기공학과 졸업(공학박사)

1986～1991 한국전력공사

1991～1997 산업기술정보원 책임연구원

1997～2006.3 여수대학교 전자통신전기공학부 부교수

2006.3-현재 전남대학교 전자통신전기공학부 교수

※ 관심분야 : 퍼지 및 신경망, 카오스 동기화 및 암호화, 카오스 로봇 설계 및 제어, Small World