

영 공간 분해 방법을 이용한 다중 협동로봇의 모빌리티와 가속도 조작성 해석

Analysis of Acceleration Bounds and Mobility for Multiple Robot Systems Based on Null Space Analysis Method

이 필 엽, 이 지 홍*, 전 봉 환
(Fill Youb Lee, Ji Hong Lee, and Bong-Huan Jun)

Abstract : This paper presents a new technique that derives the dynamic acceleration bounds of multiple cooperating robot systems from given individual torque limits of robots. A set of linear algebraic homogeneous equation is derived from the dynamic equations of multiple robots with friction contacts. The mobility of the robot system is analyzed by the decomposition of the null space of the linear algebraic equation. The acceleration bounds of multiple robot systems are obtained from the joint torque constraints of robots by the medium of the decomposed null space. As the joint constraints of the robots are given in the infinite norm sense, the resultant acceleration bounds of the systems are described as polytopes. Several case studies are presented to validate the proposed method in this paper.

Keywords : friction contact, multiple cooperative robotic systems, null space analysis method, mobility, acceleration

I. 서론

로봇 시스템의 조작도 해석은 여러 개의 링크가 직렬로 연결된 단일 로봇의 설계와 성능평가 분야에서 성공적으로 적용되어 왔다[1-3]. 최근 조작도 해석은 협동 작업하는 로봇 팔이나 다족 보행로봇 등과 같이 보다 복잡한 다중 협동 로봇 시스템의 조작도 해석으로 확장되고 있다[4-10]. 다중 협동 로봇의 조작도 해석은 로봇시스템의 기구학식에 기초하여 로봇 시스템이 얻을 수 있는 속도 범위 또는 정적인 힘의 범위를 얻어 내는 기구학적 해석[4,5]과 로봇 시스템의 동력학을 바탕으로 로봇시스템이 얻을 수 있는 가속도의 범위 또는 동적인 힘의 범위를 얻어내는 동력학적 해석[6-10]으로 나눌 수 있다. 한편, 로봇 시스템의 모빌리티 해석은 다중 협동 로봇 시스템으로부터 얻을 수 있는 자유도로부터 기구학적 특성을 얻어 내는 방법으로 로봇의 설계와 기구학적 성능의 척도로 사용된다.

Bicchi[4] 등은 영공간 해석 방법을 이용하여 다중 협동 로봇 팔의 기구학 식으로부터 협동 로봇 시스템으로부터 얻을 수 있는 자유도를 구하고 (mobility analysis) 로봇 시스템이 얻을 수 있는 속도를 해석적으로 표현 (kinematic analysis) 하였으며, 이를 속도 조작도 해석에 적용하였다[4]. 그러나 이 방법은 기구학적 해석에 국한되어 있으며 또한 로봇 팔 끝과 물체 사이의 접촉 점에서의 마찰이 해석에 고려되지 않고 있어 보다 더 정확한 해석을 필요로 한다. [8-10]에서는 다중 협동 로봇의 관절토크 한계를 무한대 높으로 가정하고 이로부터 로봇 시스템의 가속도 범위를 다각형의 형태로 표현하는 동적 조작도를 해석하였다 이 또한 접촉 점에서의 마찰이 해석에 고려되지 않았으며 주어진 식으로부터 로봇의 기구학

적 특성을 해석적으로 파악 할 수 없는 한계가 있다.

본 논문에서는 다중 협동 로봇의 동력학식과 로봇 팔 끝의 접촉 조건으로부터 로봇 시스템의 동력학식을 동차 행렬식으로 유도하고 이로부터 모빌리티 해석과 가속도 조작성 해석을 수행하는 방법을 제안한다. 제안된 방법에서는 선형 동차 행렬식의 형태로 유도된 로봇 시스템의 동력학식에 영공간 분해 방법을 적용하여 모빌리티 해석을 수행하고, 분해된 영공간을 매개변수로 하여 주어진 관절제약 조건과 로봇 팔 끝의 접촉 조건으로부터 로봇 시스템이 얻을 수 있는 가속도 공간을 얻어낸다. 본 논문에서 제시한 동력학식에 대한 모빌리티 해석은 [4]에서 제시한 기구학적 모빌리티 해석과 같은 결과를 보임을 확인하였다. 또한 마찰원뿔 개념[16,17]을 도입하여 접촉 점의 마찰을 가속도 공간 해석에 포함 시킴으로써 기존의 가속도 조작성 해석 방법[8-10]을 확장 하였다. 제안된 방법의 타당성을 입증하기 위해 몇가지 협동 로봇 시스템에 대해 시뮬레이션을 연구 결과와 비교 분석하였다.

논문의 구성은 II장에서 다중 협동 로봇의 동력학식에 대해 소개하고 III장과 IV장에서는 모빌리티와 가속도 조작성에 대한 일련의 과정에 대해 다룬 후 예제를 적용하여 타당성을 입증하였다.

II. 다중 협동 로봇의 동력학 식

여러 대의 로봇이 그림 1과 같이 하나의 물체를 잡고 있을 때, 물체의 움직임을 기술하는 동력학 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q = I_o \ddot{u} + Q_o, \quad (1)$$

$$\text{단, } I_o = \begin{bmatrix} m_o \cdot E_s & 0 \\ 0 & I \cdot E_p \end{bmatrix}, \quad Q_o = \begin{bmatrix} -m_o g^T \\ \omega \times (I \omega)^T \end{bmatrix}^T$$

그리고 물체 중심의 가속도 \ddot{u} 은 다음과 같이 직선가속도와 회전 가속도로 표현되며

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2006. 1. 31., 채택확정 : 2006. 3. 29.

이필엽, 이지홍 : 충남대학교 메카트로닉스공학과

(powerman2@empal.com/jihong@cnu.ac.kr)

전봉환 : 한국해양연구원(bhjeon@moeri.re.kr)

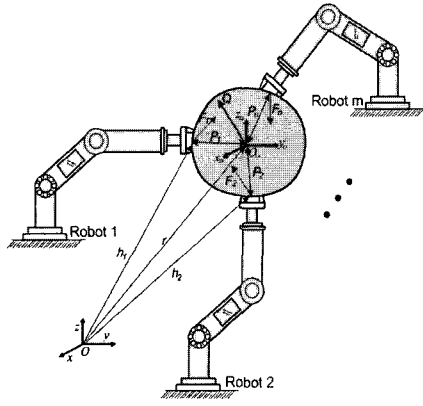


그림 1. 3축 다중 협동로봇.
Fig. 1. 3-DOF cooperating robots.

$$\ddot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}^T & \dot{\boldsymbol{\omega}}^T \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^d. \quad (2)$$

협조 작업하는 m 대 로봇에 대한 동력학 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & M_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1^T & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^T & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & J_m^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau} = M\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}^T \mathbf{F} + \mathbf{V} \quad (4)$$

다음으로 로봇 관절의 각 가속도와 로봇 팔 끝의 가속도는 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$ 로부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & j_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

모든 로봇 팔 끝과 물체 중심 사이의 힘 관계는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^m \mathbf{W}_i \mathbf{F}_i = \mathbf{W} \mathbf{F}. \quad (7)$$

(7)로부터 로봇 팔 끝에서 작용하는 힘은 물체 중심에서의 힘으로 다음과 같이 정리된다[11].

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}^\# (\mathbf{Q} - m_0 \mathbf{g}) + \mathbf{N}(\mathbf{W}) \mathbf{z}. \quad (8)$$

여기서 $\mathbf{N}(\mathbf{W}) \in \mathfrak{R}^{dm \times (dm-d)}$ 는 \mathbf{W} 의 영 공간(null space)을 나타내고 $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^{(dm-d)}$ 는 임의의 벡터를 나타낸다. (8)을 구성하는 \mathbf{W} 는 로봇 팔 끝과 물체 사이의 접촉조건에 따라 결정되는 행렬(grasp matrix)이다.

그림 1에서 \mathbf{h}_i , \mathbf{r} , 그리고 \mathbf{p}_i 는 다음과 같은 관계를 이룬다.

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{r} + \mathbf{p}_i \quad (9)$$

(9)의 \mathbf{h}_i 를 속도와 가속도의 관계로 나타내면

$$\dot{\mathbf{h}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i + \dot{\mathbf{r}}, \quad \ddot{\mathbf{h}}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) + \ddot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{p}}_i \times \boldsymbol{\omega} \quad (10)$$

로 표시된다. 위 식으로부터 로봇 팔 끝에서의 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{\mathbf{h}}_i = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & -\mathbf{p}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}_i) + \begin{bmatrix} \mathbf{E}_3 & -\mathbf{p}_i \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \quad (11)$$

여기서 접촉 점에서의 물체의 각 가속도와 로봇 팔 끝의 각 가속도는 서로 같기 때문에 (11)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{h}}_i \\ \dot{\rho}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_i)^T \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\rho}_i \end{bmatrix} + \boldsymbol{\Omega}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_i)^T & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \dot{\rho}_i \end{bmatrix} + \boldsymbol{\Omega}_i \quad (12)$$

$$= \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_i)^T \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix} \dot{\rho}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \equiv \hat{\boldsymbol{\Omega}}_i \ddot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{E}}_p \dot{\rho}_i + \boldsymbol{\Omega}_i.$$

(12)를 m 대의 로봇으로 확장하면 로봇 팔 끝에서의 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{W} \ddot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{E}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\Omega} \quad (13)$$

(5)와 (12)로부터 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{W} \ddot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{E}} \dot{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}. \quad (14)$$

(4)의 양변에 $\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}$ 를 곱한 후 (8), (14)를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{C}_c \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_r \dot{\boldsymbol{\rho}} + \mathbf{C}_i \mathbf{z}$$

단, $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\boldsymbol{\tau} - \tilde{\mathbf{V}}$, $\mathbf{C}_c = \mathbf{W}^T + \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T\mathbf{W}^\#\mathbf{I}_o$, (15)

$$\mathbf{C}_r = \hat{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{C}_i = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T\mathbf{N}(\mathbf{W}),$$

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{h} + \mathbf{c} + \mathbf{J}^T\mathbf{W}^\#(\mathbf{Q} - m_0\mathbf{g})) + \boldsymbol{\Omega} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$$

(15)와 같은 다중 협동 로봇의 동력학식에 영 공간분해 방법을 적용하기 위해서는 (15)를 $A\mathbf{x}=0$ 의 형태로 나타내 주어야 한다. 따라서 (15)를 $A\mathbf{x}=0$ 의 형태로 나타내주면 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} & \dot{\boldsymbol{\rho}} & \mathbf{z} & \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}^T = 0,$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c & \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_i & -\mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

(16)은 영 공간해석 방법을 적용시키기 위한 $A\mathbf{x}=0$ 의 형태로 여기에 영 공간해석 방법을 적용하면 다중 협동 로봇시스템의 모빌리티(mobility)와 동적 조작도 해석이 가능하게 된다.

다중 협동 로봇시스템의 모빌리티와 동적 조작도를 해석하기 위해 (16)에서 \mathbf{Q} 의 의사역행렬을 이용하면 (16)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} & \dot{\boldsymbol{\rho}} & \mathbf{z} & \tilde{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix}^T = \mathbf{Q}^\# \cdot 0 + \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (17)$$

여기서 \mathbf{C} 는 \mathbf{Q} 의 영공간을 나타내며 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 은 임의의 벡터를 나타낸다.

III. 모빌리티와 가속도 조작성 해석

1. 협동 로봇시스템의 모빌리티 해석

모빌리티와 가속도 조작성을 해석하기 위해서는 각 로봇의 관절 토크와 물체와의 관계를 독립과 비 독립성분으로 구분해야 한다. 이를 위해 본 논문에서는 (17)의 C행렬의 행을 물체와 관련된 항인 \ddot{u} , \dot{p} , z 와 로봇의 관절 토크와 관련된 항인 $\bar{\tau}$ 의 크기에 따라 C_1 , C_2 로 나누어 구분하였다. 구분된 C행렬은 영 공간 해석 방법[4]에 의해 다음과 같이 재 표현된다(유도과정은 부록에 기술).

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

(18)에서 로봇과 물체 사이의 모빌리티 해석은 기존에 Bicchi[4]가 영공간 분해 방법을 이용하여 해석한 기구학적 모빌리티 해석을 동적 모빌리티 해석으로 확장한 것으로 로봇과 물체 사이의 힘 관계에 따라 3가지로 구분되고 이를 구분하면 다음과 같다. C_{11} 은 로봇이 물체에 힘을 전달하지 못하는 자유도($\mathfrak{R}(C_{11})$, indeterminacy)를 나타내고 C_{12} 와 C_{22} 는 로봇의 움직임과 물체의 움직임이 1:1로 대응되는 자유도(connectivity)를 나타낸다. 그리고 C_{23} 은 물체를 움직이지 않으면서 로봇이 움직일 수 있는 여유자유도($\mathfrak{R}(C_{23})$, redundancy)를 나타낸다.

2. 협동 로봇 시스템의 가속도 조작성 해석

2절에서는 Bicchi[4]가 제안한 협동 로봇 시스템의 속도 조작성 해석 방법을 이용하여 협동 로봇 시스템의 가속도 조작성을 해석하는 방법을 제안한다. 먼저 (18)에서 구분된 세 개의 요소의 행렬 크기에 따라 ε 을 구분하면 $\varepsilon = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^T$ 이 되며 요소 별로 구분된 C와 ε 항을 (17)에 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{p} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\bar{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

위 식에서 완전구속 접촉 모델의 경우에 로봇은 물체에 의해 완전히 구속되어 있기 때문에 로봇은 물체에 항상 힘과 모멘트를 전달할 수 있게 된다. 따라서 (19)에서 로봇이 물체에 힘을 전달할 수 없는 항을 나타내는 C_{11} 은 항상 0인 행렬이 된다.

(19)에서 \ddot{u} , \dot{p} , z 의 범위는 ε_1 , ε_2 , ε_3 의 범위로부터 얻어지는데, ε_1 , ε_2 , ε_3 의 범위는 (20)에서 관절토크의 범위를 무한대 놔의 형태로 제한함으로써 구해진다[9-12]. 이 과정을 정리하면 다음과 같다.

(20)은 다음과 같은 형태로 정리가 된다.

$$C_2 \varepsilon = \bar{\tau}. \quad (21)$$

$\bar{\tau}$ 를 다음과 같이 제약하면

$$\bar{\tau}_i^{\min} \leq \bar{\tau}_i \leq \bar{\tau}_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (22)$$

ε 의 범위가 n 차원에서 주어지는데 그 영역을 구하는 수학적 도구이다. 이 점에 착안하여 본 논문에서는 물체의 가속도 다각형을 구하는데 응용하였다. 먼저 선형변환과정을 거쳐 (22)를

$$-1 \leq \bar{\tau}_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, m. \quad (23)$$

로 간단화시킨 뒤, slack variable을 도입하여 이 부등식을 다음과 같은 형태의 등식으로 변환시킨다.

$$\begin{aligned} Bz &= d, \\ B &= \begin{bmatrix} C_2 & E_{2m \times 2m} \\ -C_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(2m \times (r+2m))}, \\ z &= \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \sigma \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{r+2m}, \quad d = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{2m}. \end{aligned} \quad (24)$$

여기서 σ 는 $2m$ 차원의 slack variable 벡터로서 부등식을 방정식의 형태로 변형하기 위해 도입한 변수를 나타내며 $E_{2m \times 2m}$ 은 $2m \times 2m$ 단위 행렬을 나타낸다. B의 처음 열부터 r 열까지, 즉 $[C_2 - C_2]^T$ 과 단위행렬 $E_{2m \times 2m}$ 중 중복되지 않게 $2m-r$ 개의 열을 선택하여 만든 정방행렬을 B_k 라 하면, 다음과 같은 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} B_k \bar{z} &= d, \quad k = 1, \dots, \binom{2m}{r}, \\ \bar{z} &= \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{\sigma}_k \end{bmatrix}, \quad (0 \leq \bar{\sigma}_k^T, \quad k = 1, \dots, 2m-r). \end{aligned} \quad (25)$$

여기서 $\bar{\sigma}_k$ 는 단위행렬 $E_{2m \times 2m}$ 중 선택된 $2m-r$ 개의 열에 대응되는 slack variable 벡터 σ 의 요소들로 이루어진 벡터이다. B_k 가 정방행렬이므로 위 식은 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\bar{z} = (B_k)^{-1} d \quad (26)$$

위 식으로부터 역행렬이 존재하는 B_k 를 이용하여 구한 \bar{z} 중, slack variable 내에 음이 아닌 요소를 가지는 ε 들만이 ε 영역의 꼭지점 후보 해가 되며, 이들로부터 ε 의 vertex들을 구할 수 있게 된다[15].

3. 마찰이 적용된 협동 로봇 시스템의 가속도 조작성 해석

이번 절에서는 [8-10]에서 다룬 가속도 조작성 해석보다 더욱 정확한 가속도 조작성 해석을 위해 각 로봇의 관절 제약 조건과 각 로봇 팔 끝과 물체 사이의 접촉 점에서의 마찰에 의한 제약 조건을 적용해 마찰이 적용된 새로운 관절 제약 조건을 얻는 과정에 대해 설명한다. 여기서 얻어진 새로운 관절 제약 조건은 (20)의 $\bar{\tau}$ 에 적용된다.

로봇과 물체 사이에 마찰력이 존재하고 i 번째 로봇과 물체가 점 접촉을 하고 있을 때 그림 2의 어두운 영역(friction cone)에서는 미끄러짐이 발생하지 않는다[16].

그림 2에서 로봇이 물체와의 접촉면에 가하는 수직 방향

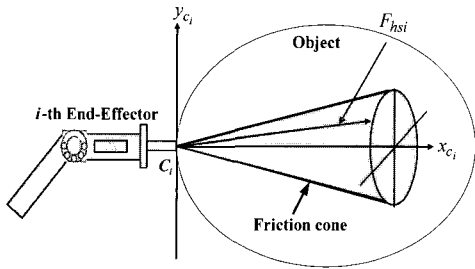


그림 2. 로봇과 물체 접촉 점의 마찰원뿔.
Fig. 2. The friction cone between robots and object.

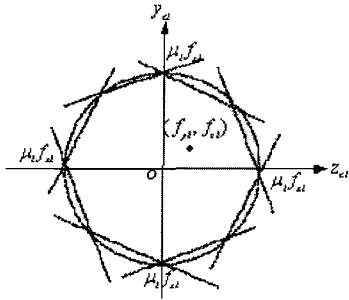


그림 3. 마찰 원뿔 근사화.
Fig. 3. Approximation of friction cone.

의 힘의 절대 값에 마찰 계수를 곱한 값이 접촉 면의 수평 방향 힘보다 작으면 미끄러짐이 발생한다. 그래서 미끄러짐 없이 로봇이 물체를 잡고 있으려면 물체의 표면에 접하는 수평 방향의 힘이 마찰력보다 크지 않아야 한다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\mu_i |f_{iN}| \geq |f_{iT}| \tag{27}$$

여기서 f_{iN} 는 접촉면에 수직 방향 성분, f_{iT} 는 접촉면에 수평 방향 성분, μ_i 는 물체와 i 번째 로봇 사이의 최대 정지 마찰 계수를 나타낸다.

(27)로부터 friction cone 안에 있을 조건 즉 로봇이 물체에 대하여 미끄러짐 없이 조작을 하기 위한 조건을 구하면 다음과 같다[16].

$$e_{Ni}^T e_{Fi} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_i^2}}, \quad i = 1, \dots, m \tag{28}$$

여기서 e_{Ni} 는 접촉 점 c_i 에 대한 내부방향 단위접선 벡터를 나타내고, e_{Fi} 는 i 번째 로봇이 물체에 가하는 내부 힘 f_{iN} 의 단위 방향벡터를 나타낸다.

마찰이 적용된 관절 토크제약 조건을 구하기 위해 먼저 그림 2와 같이 각 접촉 점 좌표계 $\sum c_i (i=1, \dots, m)$ 의 x_{ci} 축을 접촉 점 c_i 에 대한 내부 힘 방향의 법선 벡터로 정한 후 (28)로 표현되는 내부 힘에 대한 구속 식을 이용해 각 로봇이 물체에 가할 수 있는 관절 토크 범위를 구해준다. (28)의 구속 조건은 비선형이기 때문에 이를 선형화 하기 위해 선형 계획법을 이용하였다. 그림 2에서의 마찰 원뿔의 단

면을 8면 뿔로 나누어 구속 조건을 선형화하면 그림 3과 같고, Yoshikawa 등은 이를 τ 에 대한 구속 식으로 표현하였다 [16,17]. 동력학식을 고려하기 위해 가속도와 속도 성분에 의한 토크를 τ 에 대한 구속 식에 대해 고려하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$BR_i(\tau - M\ddot{q} - V) \leq 0 \tag{29}$$

여기서 $B \equiv \text{diag}[B_1, \dots, B_m] \in \mathbb{R}^{m \times 2m}$ 는 마찰 원뿔의 구속조건을 나타내는 행렬로 8면 뿔에 대해 선형 근사화하면 다음과 같다.

$$B = \begin{bmatrix} -\mu_i & (\sqrt{2}-1) \\ -\mu_i/(\sqrt{2}-1) & 1/(\sqrt{2}-1) \\ \vdots & \vdots \\ -\mu_i & -(\sqrt{2}-1) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{8 \times 2} \tag{30}$$

여기서 n 은 마찰 원뿔의 뿔의 개수를 나타내며 마찰 원뿔을 n 면 뿔로 근사화 할 경우 n 이 클수록 보다 정확한 구속조건을 얻을 수 있다. $R_i \in \mathbb{R}^{2m \times N_i}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$R_i = (JM^{-1}J^T)^{-1}JM^{-1} \tag{31}$$

각 로봇의 관절 토크 제약 조건과 (29)로부터 관절 토크를 만족해야 하는 조건을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tau_{\min} \leq \tau \leq \tau_{\max} \\ BR_i(\tau - M\ddot{q} - V) \leq 0 \end{aligned} \tag{32}$$

다중 협동 로봇이 물체에 가하는 토크의 경계 값은 로봇의 관절 토크에 의한 경계 값과 접촉 점에서 각 로봇과 물체 사이의 마찰에 의해 결정되는 토크의 경계 값의 공통 영역을 구해줌으로써 새로운 토크의 경계 값을 얻을 수 있고 얻어진 경계 값을 (20)에 대입해주면 마찰이 적용된 동적 조작도를 얻을 수 있게 된다. 이 두 조건 식을 모두 만족하는 경계 값을 얻기 위해 선형 계획법(LP, Linear Program)을 적용하였다.

IV. 적용 예제

마찰이 적용된 τ 의 경계 값을 구하기 위해서는 (32)에서 \ddot{q} , V 를 고려해야 하지만 이를 고려할 경우 τ 의 경계 값을 구하는 과정이 복잡해지기 때문에 본 논문에서는 이 과정을 간략화 하기 위해 \ddot{q} , V 를 0으로 가정하였다. 또한 각 관절 토크는 $\|f_{i\infty}\| < 1$ 으로 제한하였고 로봇과 물체의 기본변수들 값은 표 1과 같이 가정하였다.

예제 1: 2 관절을 가진 두 대 로봇 시스템

그림 4와 같이 로봇의 각 관절 값이 $q_{1,2,3,4} = [90^\circ, -90^\circ, 90^\circ, 90^\circ]$ 으로 주어졌을 때 이 형상에 대한 완전구속 접촉 모델과 점 접촉 모델에 대한 조작도 다각형을 구하였다. 그림에서 W 는 로봇의 회전을 의미한다.

1) 점 접촉 모델

(33)은 각 로봇의 관절 제약과 접촉 점에서의 마찰 제약 조건을 모두 만족하는 토크의 vertex들을 나타내는 것으로 이

표 1. 로봇과 물체의 기본 파라미터.

Table 1. Parameters of robots and object.

로봇의 파라미터	
링크의 무게(kg)	$m_{1,2,3,4} = 1$
링크의 길이(m)	$l_{1,2,3,4} = 1$
각 로봇의 토크(τ_i)	$-1 \leq \tau_i \leq 1, i = 1,2,3,4$
각 로봇의 마찰계수(μ_i)	$\mu_i = 0.3, i = 1,2,3,4$
물체의 파라미터	
물체의 무게(kg)	$m_o = 1$

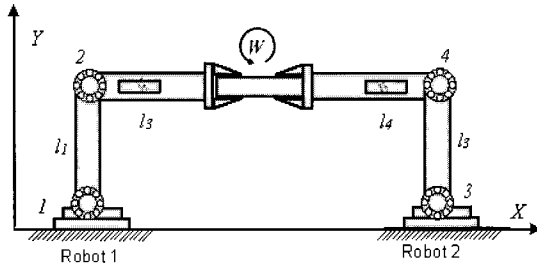


그림 4. 2관절을 가진 두 대 로봇 시스템.

Fig. 4. Two 2-DOF cooperating SCARA robot system.

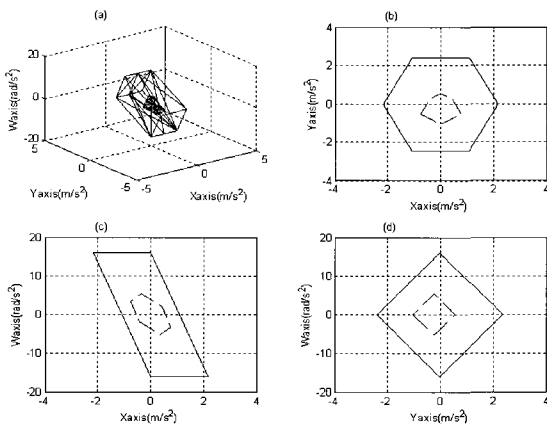


그림 5. 예제 1에 대한 점 접촉 모델의 물체 중심에서의 가속도 영역.

Fig. 5. Acceleration bounds of center of object for example in point-contact-with-friction model.

를 얻기 위해 선형 계획법을 이용하였다.

$$\tilde{r} = \begin{Bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.2308 \\ -1.0000 & -1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -1.0000 \\ -0.2308 & 0.4286 & -0.0000 & 0.0000 & -0.2308 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2308 \\ -1.0000 & -1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -1.0000 \\ -0.2308 & 0.4286 & -0.0000 & 0.0000 & -0.2308 \\ 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ -0.4286 & -0.4286 & -0.4286 & -0.4286 & 0.2308 & 0.2308 \\ -1.0000 & -1.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.2308 & 0.4286 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

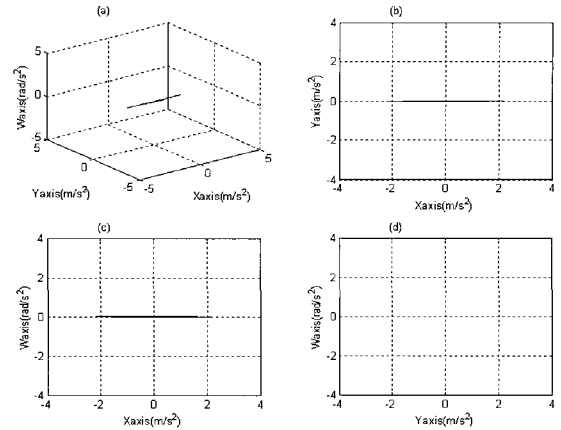


그림 6. 예제 1에 대한 완전구속 접촉 모델의 물체 중심에서의 가속도 영역.

Fig. 6. Acceleration bounds of center of object for example I in complete constraint model.

선형계획법은 목적함수와 제약식이 모두 선형으로 수식화 될 수 있는 경우에 일정한 제약 조건하에 목적하고자 하는 값을 최대화하고자 하는 최적화 방법으로 기하학적으로 말하면 주어진 구속 조건에 의하여 만들어진 볼록 다각형의 영역 중에서 정해진 목적함수가 최대 또는 최소가 되는 꼭지점들을 찾는 것이다. 선형 계획법을 적용하기 위해서는 구속 조건과 목적함수를 정의해야 한다. 선형 계획법의 구속 조건은 앞서 구한 (32)와 같이 로봇의 관절 토크에 의한 경계 값과 접촉 점에서 각 로봇과 물체 사이의 마찰에 의해 결정되는 토크의 경계 값을 구속 조건으로 주면 된다. 그리고 두 구속 조건을 모두 만족하는 꼭지점들은 로봇의 토크의 경계에 존재하기 때문에 구속 조건은 로봇의 토크 경계를 구속 조건으로 주면 된다. (33)은 선형 계획법을 적용하여 새롭게 얻은 토크의 vertex들로서 마찰이 적용되기 전 토크의 vertex들의 절대값은 1의 값을 가지지만 새롭게 얻은 토크의 vertex들은 -1과 1사이의 값을 가지며 절대값이 1을 넘지 않는 것을 (33)을 통해 알 수 있다. 이는 접촉 점에서 마찰에 의한 구속조건이 더해졌기 때문이다.

그림 4의 로봇 자세에 대해 II, III장에서 언급한 방법을 적용하여 얻은 조작도 다각형의 꼭지점들은 (34)와 같고

$$P_s = \begin{Bmatrix} 0.4196 & 0.7792 & -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.3043 & -0.4869 & 0.0274 & 0.0274 & 0.5813 \\ 1.8462 & -3.4286 & 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.4196 & 0.7792 & -0.0000 & -0.0000 & 0.3596 \\ 0.3043 & -0.4869 & 0.0274 & 0.0274 & -0.2099 \\ 1.8462 & -3.4286 & 0.0000 & 0.0000 & -5.2747 \\ -0.3596 & -0.0000 & -0.7792 & -0.7792 & -0.4196 & -0.4196 \\ -0.2099 & -1.0012 & -0.4869 & -0.4869 & 0.3043 & 0.3043 \\ 5.2747 & 0.0000 & 3.4286 & 3.4286 & -1.8462 & -1.8462 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

이를 그림으로 나타내면 그림 5와 같다.

점 접촉 모델은 로봇 손 끝과 물체가 접촉 점에서 점 접촉을 하고 있는 모델이기 때문에 x축 방향뿐만 아니라 y축 방향으로도 잘 움직일 수 있는 자세가 된다. 따라서 물체 중심

의 가속도 영역은 x, y 축 모두 고르게 움직일 수 있다는 결과를 예측할 수 있고 이는 그림 5의 결과들과 일치한다. 그리고 두 대 로봇이 y 축에 대하여 좌우 대칭의 자세를 취하고 있기 때문에 조작도 다각형의 xy 평면이 y 축에 대하여 좌우 대칭인 결과를 얻어야 한다. 이 결과는 그림 5(b)와 일치한다. 다음으로 마찰의 구속조건이 각 로봇의 관절 토크에 제약조건으로 가해지면 마찰이 적용된 조작도 다각형의 범위는 마찰이 적용되기 전의 조작도 다각형의 범위보다 작아진다는 사실을 예측할 수 있고 이 사실은 그림 5의 결과들과 일치한다. 위에서 마찰을 적용하지 않고 얻은 조작도 다각형의 결과는 논문[9]의 결과와 일치하며 마찰을 적용하여 얻은 조작도 다각형은 논문[16,17]과 일치한다.

2) 완전구속 접촉 모델

같은 방법으로 완전구속 접촉 모델에 대하여 물체의 가속도 범위를 나타내는 조작도 다각형의 꼭지점을 구하면 (35)와 같고

$$P_a = \begin{Bmatrix} -0.0000 & -1.0909 & 1.0909 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -1.0909 & -2.1818 & 0.0000 & -1.0909 & -1.0909 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 1.0909 & -0.0000 & 2.1818 & 1.0909 & 1.0909 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 & 0.0000 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

이를 그림으로 나타내면 그림 6과 같다.

완전구속 접촉 모델은 물체가 로봇에 의해 완전히 구속되어 있기 때문에 그림 4와 같은 로봇 자세의 경우 물리적으로 x 축 방향으로만 움직일 수 있는 자세가 된다. 이로부터 물체의 가속도는 x 축 방향으로만 발생을 하게 된다는 사실을 알 수 있고 이 사실은 그림 6의 결과와 일치한다. 또한 완전구속 접촉 모델은 물체가 로봇에 의해 완전히 구속되어 있기 때문에 로봇과 물체 사이에 마찰이 발생하지 않게 되어 μ 값에 대한 영향을 받지 않는다. 이 사실로부터 마찰 적용 전·후의 결과가 완전히 일치한다는 사실을 예측할 수 있고 이 사실은 그림 6의 결과와 일치된다. 이 결과는 기존의 연구 결과와도 일치한다[9].

예제 2: 3 관절을 가진 두 대 로봇 시스템

그림 7과 같이 로봇의 각 관절 값이 $q=[90^\circ, -177^\circ, 177^\circ, 90^\circ, 177^\circ, -177^\circ]$ 으로 주어졌을 때 이 형상에 대한 점 접촉 모델과 완전구속 접촉 모델에 대한 조작도 다각형을 그림 8, 9와 같이 구하였다. 그림에서 W 는 로봇의 회전축을 의미한다.

1) 점 접촉 모델

예제 1의 점 접촉 모델에 대한 결과와 마찬가지로 마찰이 적용된 조작도 다각형의 범위는 마찰이 적용되기 전의 조작도 다각형의 범위보다 작다는 사실을 예측할 수 있고 이 사실은 그림 8의 결과와 일치한다. 그리고 두 대 로봇이 y 축에 대하여 좌우 대칭의 자세를 취하고 있기 때문에 조작도 다각형의 xy 평면이 y 축에 대하여 좌우 대칭인 결과를 얻어야 하는데 이는 그림 8(b)를 통해 확인 할 수 있다.

2) 완전구속 접촉 모델

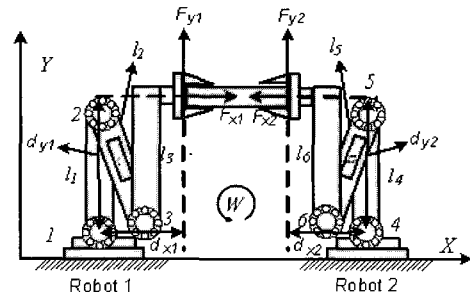


그림 7. 3축 두 대 로봇 시스템.
Fig. 7. Two 3-DOF SCARA robot system.

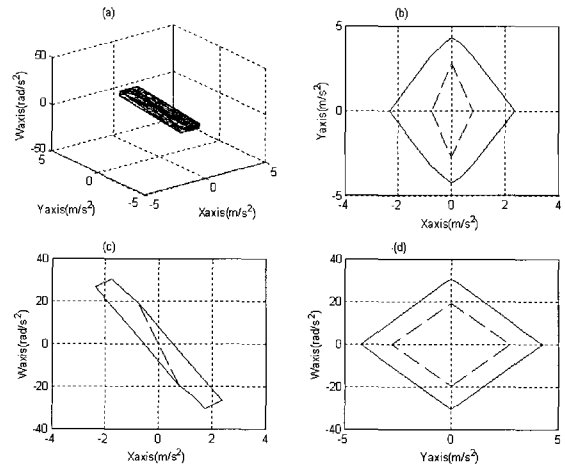


그림 8. 예제 2에 대한 점 접촉 모델의 물체 중심에서의 가속도 영역.
Fig. 8. Acceleration bounds of center of object for example in point-contact-with-friction model.

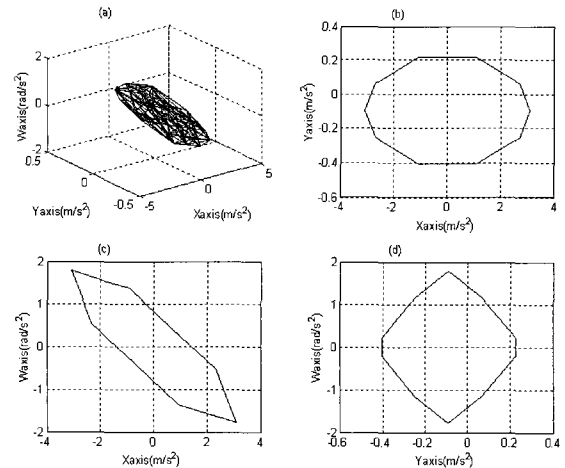


그림 9. 예제 2에 대한 점 접촉 모델의 물체 중심에서의 가속도 영역.
Fig. 9. Acceleration bounds of center of object for example in point-contact-with-friction model.

예제 1의 완전구속 접촉 모델에 대한 결과와 마찬가지로 마찰이 적용 전후의 결과가 정확히 일치하는 것을 그림 9의 결과를 통해 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 협동 로봇시스템의 동력학식을 선형 동차 행렬식의 형태로 유도하고 이 식에 영공간 분해방법과 마찰 접촉 개념을 적용시켜 다중협동 로봇시스템의 모빌리티와 가속도에 대한 동적 조작성을 해석하는 방법을 제안하였다. 그리고 제안된 방법의 타당성을 기존의 연구 결과와 비교 분석하여 동일한 결과를 얻음을 확인하였다.

현재 연구는 여러 개의 손가락으로 물건을 집는 상황의 동력학적 해석으로 확장 연구할 수 있다고 판단된다.

추후 연구로는 앞선 과정에서 0으로 가정한 로봇의 각 관절 가속도와 바이어스 항을 추가하여 보다 더 정확한 가속도 범위를 얻을 수 있는 동적 조작도에 관한 연구를 진행할 계획이다.

변수 정의

$\ddot{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^d$	물체 중심점의 가속도 벡터
$\mathbf{r} \in \mathbb{R}^s$	기준 좌표계에 대한 물체 중심의 위치 벡터
$\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^p$	물체의 회전 속도 벡터
s, p	직선 및 회전 변수의 개수
$d = s + p$	다중 협동 로봇의 작업공간 변수의 개수
$\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^{s \times s}$	i 번째 로봇 팔 끝에서 물체 중심까지의 위치 벡터
$\mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^s$	i 번째 로봇 팔 끝에서 접촉 점을 통하여 물체에 가하는 힘
$\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^p$	i 번째 로봇 팔 끝에서 접촉 점을 통하여 물체에 가하는 모멘트
$\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^d$	i 번째 로봇 팔 끝에서 물체에 가하는 힘과 모멘트
$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$	물체의 관성 모멘텀
$\mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{i \times i}$	$i \times i$ 단위 행렬
$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^d$	로봇 팔 끝에서 접촉 점을 통하여 물체의 무게 중심으로 전달되는 힘과 모멘트
$\mathbf{I}_0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$	물체의 관성행렬
$\mathbf{Q}_0 \in \mathbb{R}^d$	중력 및 회전 속도에 관련된 항들의 총합
$\mathbf{m}_0 \in \mathbb{R}^{d \times d}$	물체의 질량
$\mathbf{g} \in \mathbb{R}^d$	물체에 작용하는 중력 가속도 벡터
$\boldsymbol{\tau}_i \in \mathbb{R}^{N_i}$	i 번째 로봇의 관절 토크벡터
N_i	협동 작업하는 i 번째 로봇의 총 관절 수
$\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$	로봇 i 의 관성 행렬
$\dot{\mathbf{q}}_i \in \mathbb{R}^{N_i}$	로봇 i 의 관절 각 가속도 벡터
$\mathbf{J}_i \in \mathbb{R}^{d \times N_i}$	i 번째 로봇의 관절속도와 로봇 팔 끝 속도 사이의 자코비안 행렬
$\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^{N_i}$	전향력, 원심력, 중력의 합으로 정의되는 바이어스 항
$\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{d \times d}$	로봇 팔 끝에 작용하는 힘과 물체 중심에 작용하는 힘 사이의 변환 행렬
$\mathbf{W}^\# \in \mathbb{R}^{d \times d}$	\mathbf{W} 의 의사역행렬
$\boldsymbol{\rho}_i \in \mathbb{R}^p$	i 번째 로봇 팔 끝의 각속도 벡터

$\mathbf{h}_i \in \mathbb{R}^d$ 기준 좌표계에 대한 i 번째 로봇 팔 끝의 위치 및 자세 벡터

참고문헌

- [1] T. Yoshikawa, "Dynamic manipulability of robot manipulators," in *Proceedings 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 1033-1038, 1985, St. Louis, Missouri.
- [2] T. Yoshikawa, "Manipulability of robotic mechanisms," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 4, no. 2, 1985, Also appearing *Robotics Research The Second International Symposium*.
- [3] P. Chiacchio, S. Chiaverini, L. Sciavicco, and B. Siciliano, "Influence of gravity on the manipulability ellipsoid for robot arms," *ASME J. Dynamic Syst., Measurement and Control*, 114, pp. 723-727, 1992.
- [4] A. Bicchi, C. Melchiorri, and D. Balluchi, "On the mobility and manipulability of general multiple limb robots," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 11, no. 2, pp. 215-228, 1995.
- [5] S. Lee, "Dual redundant arm configuration optimization with task-oriented dual arm manipulability," *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, vol. 5, no. 1, pp. 78-97, Feb. 1989.
- [6] A. Bicchi, D. Prattichizzo, and C. Melchiorri, "Force and dynamic manipulability for cooperating robot systems," *Proc. IROS 97 IEEE* pp. 1479-1484, 1997.
- [7] 이지홍, 전봉환, "다족 보행로봇의 속도작업공간 해석," 제어·자동화·시스템공학 논문지, vol. 8, no. 6, pp. 477-483, 2002.
- [8] 이지홍, 심형원, "공동 작업하는 다중 로봇 시스템의 동적 조작도," 제어·자동화·시스템공학 논문지, vol. 10, no. 10, pp. 930-939, 2004.
- [9] J. H. Lee and H. W. Shim, "On the dynamic manipulability and contact conditions for multiple robot system," in *proceedings 2004 Intelligent Manipulation and Grasping International Conference*, pp. 468-473, July. 2004.
- [10] J. H. Lee and H. W. Shim, "Analysis of acceleration bounds of cooperating multiple arm robot systems," in *proceedings 2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 111-111, Oct. 2004.
- [11] Y. Nakamura, "Advanced robotics redundancy and optimization," *Addison-Wesley Publishing Company*. 1991.
- [12] D. Prattichizzo and A. Bicchi, "Dynamic analysis of mobility and graspability of general manipulation systems," *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 14, no. 2, Apr. 1998.
- [13] J. H. Lee, "Velocity workspace analysis for multiple arm robot systems," *Robotica*, vol. 19, no. 5, vol. 5, pp. 581-591, Sep. 2001.
- [14] I. S. Ha and J. H. Lee, "Analysis on a minimum infinity-norm solution for kinematically redundant manipulators," *Trans. on Control, Automation, and System Engineering*, vol. 4. no. 2, Jun. 2002.
- [15] J. H. Lee, "A structured algorithm for minimum l_∞ -norm solutions and its application to a robot velocity workspace analysis," *Robotica*, vol. 19, no. 3, pp. 343-352. May. 2001.

[16] X.-Z. Zheng, N. Tomochika, and T. Yohshikawa, "Dynamic manipulability of multiple robotic mechanisms in coordinated manipulation," 일본로봇학회지, vol. 11, no. 6, pp. 892-900. 1993.
 [17] 이지홍, 변재민, 장명언, "Dynamic manipulability analysis of multiple robots with frictional contact," in Proceedings KACC, pp. 12-17, 1985. 2005.

부록

• 영 공간 분해 방법

(18)의 C_1 과 C_2 는 LU decomposition 방법을 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_1 C_1 = L_1 \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$P_2 C_2 = L_2 \begin{bmatrix} U_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

여기서 P_1 과 P_2 는 열 교환 행렬(permutation matrix)이고, L_1 과 L_2 는 C_1 과 C_2 의 하 삼각행렬(lower-triangular matrix), U_1 과 U_2 는 C_1 과 C_2 의 상 삼각행렬(upper-triangular matrix)을 나타낸다. C_1 과 C_2 에서 indeterminacy, connectivity, redundancy 향을 얻는 방법은 다음 과정과 같다.

과정 1: C_1 에 P_1 과 L_1 을 아래와 같이 적용하여 새로운 행렬 C_1 을 얻는다.

$$C_1 P_1^T L_1^{-T} = \begin{bmatrix} U_{C_1} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C_1 \quad (38)$$

위의 식에서 0의 열의 개수는 C_{23} 의 열의 개수와 동일하며, 열의 개수를 N_r 라 정의한다.

과정 2: 행렬 C_2 에 과정 1을 적용하여 새로운 행렬 C_2 을 얻는다.

$$C_2 P_1^T L_1^{-T} \rightarrow C_2 \quad (39)$$

과정 3: 행렬 C 가 $(d+m) \times \sigma$ 의 크기를 갖는다면, 과정 2에서 얻은 C_2^T 의 처음부터 $\sigma - N_r$ 번째 행에 과정 1을 적용한다.

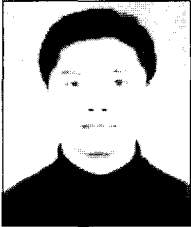
$$C_2 P_2^T L_2^{-T} = \begin{bmatrix} U_{C_2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow C_2 \quad (40)$$

위의 식에서 0의 열의 개수는 C_{11} 의 열의 개수와 동일하다.

과정 4: 행렬 C_1 에 과정 3을 적용하면, 행렬 C 의 구조는 다음과 같게 된다.

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{12} & C_{11} & 0 \\ C_{22} & 0 & C_{23} \end{bmatrix} \quad (41)$$

과정 5: 과정 4에서 얻은 행렬 C 의 첫 번째 열과 두 번째 열을 교환해서 (18)과 같은 구조의 행렬 C 를 얻는다.



이 필 업

1977년 12월 5일생. 2004년 충남대학교 메카트로닉스공학과(공학사). 2004년~현재 충남대학교 메카트로닉스공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 로보틱스 응용 및 제어, FSS.



이 지 홍

1960년 4월 12일생. 1983년 서울대 전자공학과(공학사). 1985년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1991년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년~현재 충남대학교 메카트로닉스공학과 교수. 관심분야는 로보

틱스, 인공지능.



전 봉 환

1970년 1월 14일생. 1994년 부경대 기계공학과(공학사). 1996년 동 대학원 기계공학과(공학석사). 2006년 충남대학교 메카트로닉스공학과(공학박사). 1996년~현재 한국해양연구원 선임연구원. 관심분야는 로보틱스 및 응용.