
웨이브렛 스펙트럼 분석을 이용한 신호의 특징 검출

배상범* · 김남호*

Feature Detection of Signals using Wavelet Spectrum Analysis

Sang-Bum Bac* · Nam-Ho Kim*

요 약

기초과학과 공학의 다양한 분야에서, 신호와 시스템을 정확하게 표현하고, 신호의 공간적, 시간적 변화로부터 유용한 정보를 획득하기 위한 많은 연구들이 수행되어 왔다. 이러한 분석 방법들에서, 신호를 주파수 성분들의 조합으로서 표현하는 푸리에 변환은 가장 많은 분야에서 응용되고 있다. 그러나 푸리에 변환은 시간 정보를 고려하지 않는 변환으로서 응용의 한계성을 지니고 있으므로 이를 극복하기 위해, 웨이브렛 변환을 비롯한 다양한 방법들이 제시되었다. 웨이브렛 변환은 스케일 변수에 따라 변화하는 윈도우를 사용하여 신호를 시간-스케일 공간상에서 표현하는 변환으로서, 다중해상도 분석이 가능하며, 응용환경에 따라 다양한 형태의 함수를 정의할 수 있다. 따라서 본 논문에서 신호의 특징을 검출하기 위해, 푸리에 변환의 기저함수를 사용하여 웨이브렛 스펙트럼을 분석하였다.

ABSTRACT

In various fields of basic science and engineering, in order to present signals and systems exactly and acquire useful information from spatial and timely changes, many researches have been processed. In these methods, the Fourier transform which represents signal as the combination of the frequency component has been applied to the most fields. But as transform not to consider time information, the Fourier transform has its limitations of application. To overcome this problem, a variety of methods including the wavelet transform have been proposed. As transform to represent signal by using the changing window, according to scale parameter in time-scale domain, the wavelet transform is capable of multiresolution analysis and defines various functions according to the application environments. In this paper, to detect features of signal we analyzed wavelet the spectrum by using the basis function of the fourier transform.

키워드

wavelet transform, time-scale, window, multiresolution

I. 서 론

오늘날 사회는 통신기술의 급속한 발달로 인해, 컴퓨터를 비롯한 개인 휴대용 단말기의 보급이 확대되었으며, 데이터에 대한 획득, 저장, 전송이 편리해졌다. 그리고 이러한 발전을 가능하게 했던 많은 기초과학과 공학 분야에

서는 여전히 신호와 시스템을 정확하게 표현하고 신호의 공간적, 시간적 변화로부터 유용한 정보를 획득하기 위한 많은 연구들이 수행되고 있다.

지금까지 제안되었던 방법들 중에서, 푸리에 변환은 신호를 주파수 영역에서 나타내기 위한 변환으로서, 주기와 비주기 신호로 분류되는 정제적(stationary) 신호에 대

한 분석과 잡음해석, 그리고 필터링을 위한 중요한 도구로서 광범위하게 사용되고 있다. 그러나 푸리에 변환은 시간 해상도를 고려하지 않은 변환으로서, 주파수 변조 신호와 같이 시간에 따라 주파수 성분이 변화하는 신호에 대한 분석의 한계를 나타낸다. 즉, 획득된 신호의 전체적인 동작에만 의존함에 따라, 특정 시간에 대한 주파수 분석을 제공하지 않는다. 이와 같은 푸리에 변환의 한계성을 극복하기 위해, Gabor에 의해 제시된 STFT(short time fourier transform)는 시간축 상을 일정한 간격으로 이동하는 윈도우를 사용하여, 시간과 주파수 특성을 동시에 표현하였다[1],[2]. 그러나 STFT는 모든 주파수 영역에 대해 동일한 윈도우가 적용됨에 따라 시간-주파수 국부성에서 상충관계를 나타낸다.

따라서 이러한 푸리에 변환에 기초한 방법들에 대한 한계성을 극복하기 위해 제시된 웨이브렛 변환은 스케일 변수에 따라 변화하는 윈도우를 사용하여 신호를 시간-스케일 공간상에서 표현하는 변환이다[3],[4]. 그리고 웨이브렛 변환은 Morlet에 의해 처음 제안된 이후, 신호처리를 비롯한 다양한 응용분야에서 광대역(wideband) 신호와 멀티스케일(multi-scale) 신호 등을 분석하기 위해 사용되는 완전한 변환이며, 응용환경에 따라 다양한 형태의 함수를 정의할 수 있다[5],[6].

따라서 본 논문에서는 신호의 특징을 검출하기 위해, 스케일러를 윈도우에 의해 푸리에 변환의 기저함수를 사용하여 웨이브렛 스펙트럼을 분석하였으며, 이때 변환은 특정한 전이 궤적에서만 수행되었다.

II. 웨이브렛 변환

어떤 함수 $\psi(t)$ 가 다음의 식 (1)에서 식 (3)을 만족하면, 이때 함수 $\psi(t)$ 를 mother 웨이브렛이라 정의한다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt < \infty \quad (2)$$

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad (3)$$

식 (3)은 허용조건(admissibility condition)으로서 $0 < C < \infty$

이며, 웨이브렛 및 역 웨이브렛 변환이 성립되기 위해 만족되어야 하는 조건이다. 그리고 식으로부터 $\Psi(\omega)$ 는 식 (4)와 같이 정의되는 함수 $\psi(t)$ 의 푸리에 변환이다.

$$\Psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

또한 $\psi(t)$ 의 이동과 확장에 의해 식 (5)의 baby 웨이브렛을 얻을 수 있으며, a 는 scale 변수이고 b 는 translation 변수이다.

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (5)$$

식으로부터, scale 변수 a 가 변화함에 따라 연산을 위한 웨이브렛 윈도우의 크기가 확대 또는 축소되어, scale 에 따른 다중 해상도 해석을 가능하게 한다. 이에 따라, 신호 $f(t) \in L^2(R)$ 이면, 연속 웨이브렛 변환(CWT; continuous wavelet transform)은 식 (6)과 같이 정의되며, $*$ 는 켈레 복소를 의미한다.

$$Wf(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt \quad (6)$$

그러므로 웨이브렛 변환은 웨이브렛으로 정의되는 함수를 사용하여 임의의 신호 $f(t)$ 를 시간-스케일 공간에서 나타내는 것을 의미하며, 또한 웨이브렛을 이용하여 신호 $f(t)$ 에 대한 필터링 과정을 수행하는 것과 같다.

그리고 이러한 웨이브렛은 복소수 웨이브렛과 실수 웨이브렛으로 나누어지며, 다음의 식 (7)은 mother 웨이브렛이 실함수인 대표적인 2차 미분 가우스 웨이브렛을 나타내고 있다.

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (7)$$

III. 웨이브렛 스펙트럼 분석

임의의 신호 $f(t)$ 에 대한 푸리에 변환의 일반적인 표

현은 식 (8)과 같다.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \{ \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \} dt \end{aligned} \quad (8)$$

식으로부터 푸리에 변환은 주파수 ω 에 대하여, 신호 $f(t)$ 와 기저함수의 곱에 대한 적분으로 표현되며, 그림 1과 같이 설명될 수 있다.

그림 1은 구간 $[-1.5\pi, 1.5\pi]$ 에서, 푸리에 변환의 기저함수로서 고려될 수 있는 $\cos(2t)$ 와 함수 $f(t) = \cos(t)$ 를 나타낸 것이며, 식 (8)의 전구간에 대한 적분 표현법은 그림에서의 임의 구간 a, b, c 에서의 적분과 그것의 합으로 표현될 수 있다.

따라서 푸리에 분석으로부터 임의의 신호 $f(t)$ 에 대한 정보를 획득하기 위해, 다음의 식들과 같은 한 주기 함수를 정의한다.

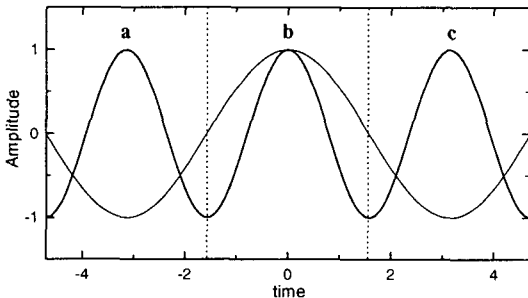


그림 1. 푸리에 변환
Fig. 1. Fourier transform.

$$\psi^c(t) = \begin{cases} \cos(t), & t \in [-\pi, \pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi^s(t) = \begin{cases} \sin(t), & t \in [-\pi, \pi) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

또한, 위의 식 (9)는 각주파수 ω 에서 시간 스케일과 이동 b_n 에 의해, 식 (11)과 같이 표현될 수 있으며, ψ^s 에 대해서도 동일하게 적용된다.

$$\psi_{\omega, b_n}^c(t) = \psi^c(\omega[t - b_n]) \quad (11)$$

그리고 그림 1로부터 기저함수로서 고려되는 연속되는 정현파에 대한 임의의 분석 구간 a, b, c 는 시간축 상에서 $2\pi/\omega$ 의 간격으로 분할되었으므로, 모든 주파수의 정현파에 대해서 분할 구간을 식 (12)와 같이 나타낼 수 있다.

$$I_n = \left[-\frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega}, \frac{\pi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega} \right) \quad (12)$$

위의 식으로부터 $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ 이다. 따라서 식 (12)를 적용하여, 식 (8)로 표현된 푸리에 변환은 다음의 식 (13)과 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{I_n} f(t) \cos(\omega t) dt \\ &\quad - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{I_n} f(t) \sin(\omega t) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^c\left(\omega\left[t - \frac{2\pi n}{\omega}\right]\right) dt \\ &\quad - j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^s\left(\omega\left[t - \frac{2\pi n}{\omega}\right]\right) dt \end{aligned} \quad (13)$$

또한, 위의 식으로부터 실수부와 허수부의 적분 항을 다음의 두 식과 같이 각 전이 지점에서의 웨이브렛 변환으로서 나타낼 수 있다.

$$W_c(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\omega, b_n}^c(t) dt \quad (14)$$

$$W_s(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{\omega, b_n}^s(t) dt \quad (15)$$

식으로부터 $b_n = (2\pi/\omega)n$ 이며, 각주파수 ω 에 의존하고 시간축을 따라 이동한다. 그리고 주파수-시간 평면에서 전이될 수 있는 지점들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S &= \{(\omega, b_n); \omega \in (-\infty, +\infty), \\ &\quad b_n = \frac{2\pi n}{\omega}, n = 0, \pm 1, \dots, \pm N(\omega)\} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 $N(\omega)$ 는 구간 $[-k\pi, k\pi]$ 에서 분석되는 신호에 대해서 식 (17)과 같으며, $\lfloor \cdot \rfloor$ 는 floor 함수를 의미한다.

$$N(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{if } \omega < \frac{1}{k} \\ \lfloor \frac{k\omega-1}{2} \rfloor, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

그리고 식 (18)과 같이 정규화(normalization)할 경우, 식 (14)는 식 (19)와 같이 다시 나타낼 수 있으며, 동일한 과정에 의해 $\hat{W}_s(\omega, b_n)$ 을 얻을 수 있다.

$$\hat{\Psi}_{\omega, b_n}^c(t) = \sqrt{|\omega|} \Psi^c(\omega [t - b_n]) \quad (18)$$

$$\mathcal{W}_c(\omega, b_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\Psi}_{\omega, b_n}^c(t) dt \quad (19)$$

따라서 위의 과정으로부터 웨이브렛 쌍에 의한 modulus와 angle은 다음 식들로부터 구해진다.

$$Mf(\omega, b_n) = \sqrt{\mathcal{W}_c(\omega, b_n)^2 + \mathcal{W}_s(\omega, b_n)^2} \quad (20)$$

$$Af(\omega, b_n) = \arctan \left(\frac{\mathcal{W}_s(\omega, b_n)}{\mathcal{W}_c(\omega, b_n)} \right) \quad (21)$$

만약, $k=3$ 으로 주어지는 구간에서 신호가 정의된다면, 분석을 위해 요구되는 전이의 수 γ 는 식 (22)로부터 구해진다.

$$\gamma = \begin{cases} 1, & \text{if } \omega \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \\ 2n+1, & \text{if } \omega \in \left(\frac{2n+1}{3}, \frac{2n+3}{3}\right) \end{cases} \quad (22)$$

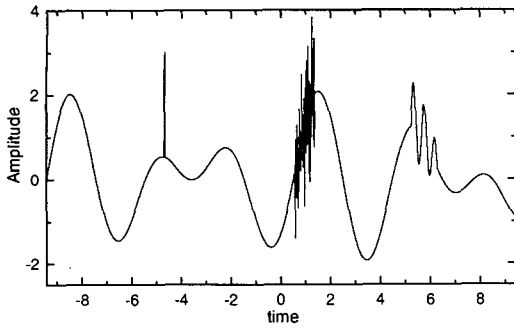
IV. 시뮬레이션 및 결과

본 논문에서는 신호의 특징을 검출하기 위해, 스케일 러블 윈도우에 의해 푸리에 변환의 기저함수를 사용하여 웨이브렛 스펙트럼을 분석하였으며, 신호에 대한 분석 특성을 살펴보기 위해, 테스트 신호로서 국부적으로 임펄스 성 잡음과 AWGN(additive white gaussian noise), 그리고 Ringwave가 중첩된 신호를 사용하였다.

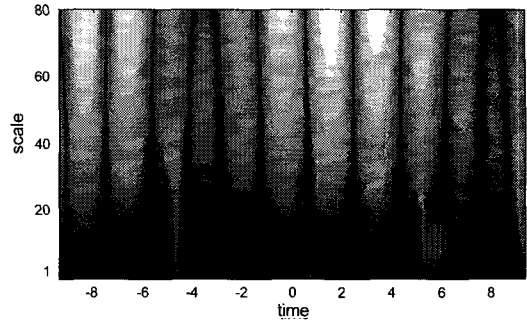
그림 2는 테스트 신호에 대한 시뮬레이션 결과이며, 그림으로부터 (a)는 시간영역에서 표현된 테스트 신호이고, (b)는 2차 미분 가우스 웨이브렛에 의한 스칼로그램을 나타내고 있다. 그리고 그림 (c)와 (d)는 이산 전이 궤적 상에서 표현된 cosine과 sine 웨이브렛 변환 $\hat{W}_c(\omega, b_n)$ 와 $\hat{W}_s(\omega, b_n)$ 이다. 또한 그림 (e)는 테스트 신호에 대한 웨이브렛 modulus이며, 그림 (f)는 그림 (e)에서 (►)으로 표현된 부분의 주파수 성분을 나타내고 있다.

시뮬레이션 결과로부터, 그림 (b)의 스칼로그램과 같이 표현되는 기존의 웨이브렛 변환은 신호를 분석하기 위해, 각 스케일에서 시간축 상의 모든 위치에 대해 변환을 수행한다. 이에 따라, 윈도우가 서로 중복되어 연산을 수행하게 되므로, 웨이브렛 변환 결과로부터 매우 많은 양의 계수를 갖게 된다.

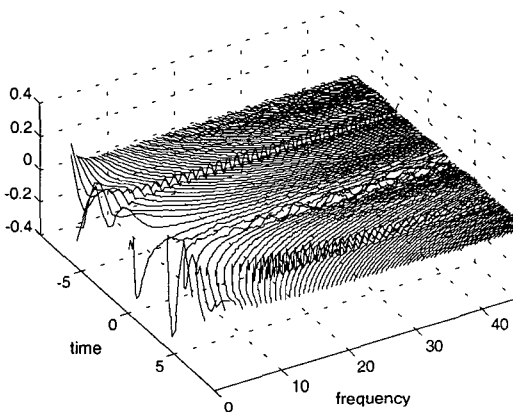
그러나 주파수에 의존하여 전이 궤적상에서 연산을 수행하는 cosine과 sine 웨이브렛 쌍은 분석 신호에 대해서, 최소 정보만을 획득하여 신호를 표현한다. 또한, 웨이브렛 modulus와 angle 정보를 두 웨이브렛 쌍에 의해 얻을 수 있으므로, 신호의 특성을 진폭과 변곡점의 변화로서 표현할 수 있다. 그리고 임의의 주파수 성분에 대한 시간 정보를 웨이브렛 modulus로부터 획득할 수 있으며, 시간 축에서 이러한 modulus의 합으로부터 푸리에 계수를 얻을 수 있다.



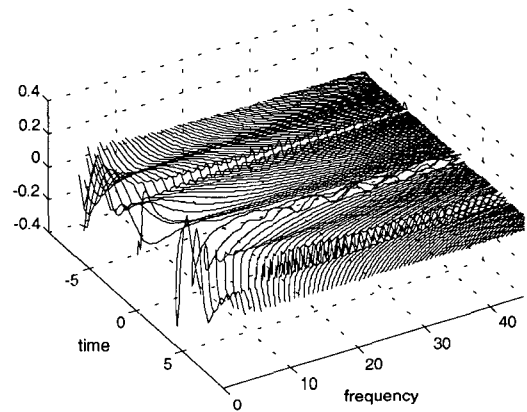
(a) Test signal



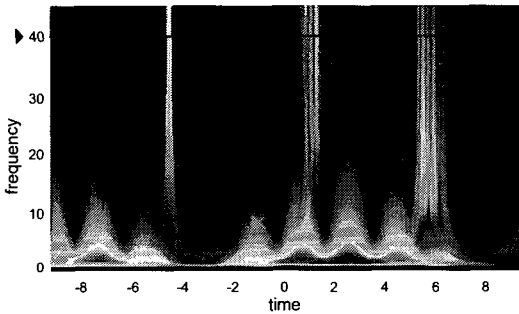
(b) Result of Mexican Hat wavelet



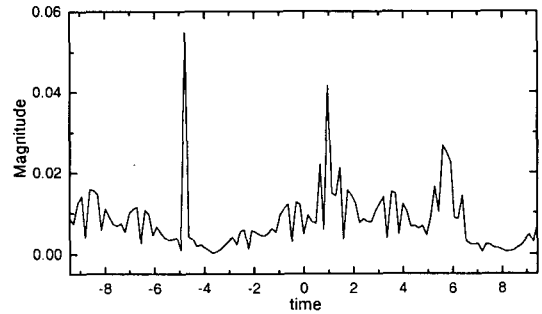
(c) Cosine wavelet transform



(d) Sine wavelet transform



(e) Wavelet modulus



(f) Frequency component at line (e)

그림 2. 테스트 신호의 웨이블릿 스펙트럼

Fig. 2. Wavelet spectrum of test signal.

V. 결 론

본 논문에서는 신호의 특징을 검출하기 위해, 푸리에 변환의 기저함수를 사용하여 웨이블릿 스펙트럼을 분석하였다.

신호를 분석하기 위해 사용되는 많은 방법들 중에서, 푸리에 변환은 시간해상도가 고려되지 않는 변환이며, STFT는 고정된 윈도우로 인해 시간-주파수 국부성에서 상충관계를 나타낸다. 그러나 본 논문에서, 웨이블릿 스펙트럼 분석을 위해 사용되는 기저함수가 푸리에 변환과

동일한 기저함수이지만, 유한 구간에서 윈도우를 정의함에 따라 시간-주파수 국부성을 나타낸다.

다양한 잡음이 중첩된 테스트 신호에 대한 시뮬레이션 결과로부터, 기존의 웨이브렛 변환은 신호를 분석하기 위해 모든 지점에서 윈도우가 중복되어 연산이 수행됨에 따라 많은 양의 데이터를 포함하였다. 그러나 cosine과 sine 웨이브렛 변환은 특정한 전이 궤적 상에서만 신호를 분석함에 따라, 웨이브렛 변환 후 최소의 정보만으로 신호를 표현하였으며, 웨이브렛 modulus와 angle 정보로부터 신호에 대한 다양한 분석이 가능하였다.

참고문헌

- [1] J. G. Daugman, "Complete discrete 2-D Gabor transforms by neural networks for image analysis and compression", IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process., vol. 36, no. 7, pp. 1169-1179, July 1988.
- [2] O. Ersoy, Fourier-Related Transform, Fast Algorithms and Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [3] S. G. Mallat, "A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 11, no. 7, pp. 674-693, July 1989.
- [4] I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets", in Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, 1992.
- [5] C. S. Burrus, R. A. Gopinath and H. Guo, Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms, a Primer. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1998.
- [6] Mallat, S., Hwang, W. L., "Singularity detection and processing with wavelets", IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 38, pp. 617-643, Mar. 1992.

저자소개



배 상 범(Sang-Bum Bae)

1999년 8월 부경대학교 공과대학 제어계측공학과 공학사

2002년 2월 부경대학교 대학원 제어계측공학과 공학석사

2002년 3월~현재 부경대학교 대학원 제어계측공학과 박사과정

※ 관심분야: 통신 및 신호처리



김 남 호(Nam-Ho Kim)

제10권 제1호 참조

1992년 3월~현재 부경대학교 공과대학 전기제어계측공학부 정교수

※ 관심분야: 신호처리, 회로 및 시스템