

Bayesian Confidence Intervals in Penalized Likelihood Regression

Young-Ju Kim¹⁾

Abstract

Penalized likelihood regression for exponential families have been considered by Kim (2005) through smoothing parameter selection and asymptotically efficient low dimensional approximations. We derive approximate Bayesian confidence intervals based on Bayes model associated with lower dimensional approximations to provide interval estimates in penalized likelihood regression and conduct empirical studies to access their properties.

Keywords : Bayesian Confidence Interval; Penalized Likelihood; Smoothing Parameter.

1. 서론

별점회귀분석법 중 하나인 스무딩 방법은 함수의 굴곡성을 최대한 허용하기 위하여 추정함수의 거친 정도에 대한 별점도를 함께 주는 방법이다. 이러한 별점우도 추정법은 가우시안 사전분포(prior)를 가지는 베이저안 추정법으로도 생각할 수 있다. (Wahba (1978, 1983), Gu (1992))

$l(\eta; Y)$ 을 반응변수 Y 에 대한 마이너스 로그 우도함수로 두면, 별점우도회귀는 다음과 같은 별점우도 범함수를 최소화하는 해 η_λ 로 함수 η 를 추정한다.

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i(\eta(x_i); Y_i) + \frac{\lambda}{2} J(\eta). \quad (1.1)$$

이 때, $J(\eta)$ 는 η 의 거친 정도에 대한 별점도 범함수이고, λ 는 평활(smoothing) 모수로서 η 의 자료에 대한 적합도(goodness of fit)와 평활도(smoothness)의 상충관계(trade-off)를 조절하는 역할을 한다. 자료에 대한 적합도가 높을수록 추정함수의 굴곡성도 높아진다. 주로 무한 차원 공간 $H \subseteq \{\eta : J(\eta) < \infty\}$ 에 존재하는 위 식(1.1)의 최소해를 스무딩 스플라인이라고 하고 η_λ 로 표시한다. 실제로 식(1.1)의 최소해는 $J(\eta) \leq \rho$ 의 제한(constraint)하에서의 최대우도추정치(MLE)와 같으며, 이 때 $\rho > 0$ 이며 λ 는 라그랑즈 승수(Lagrange multiplier)이다.

Wahba (1978, 1983)는 η 의 평균이 0인 가우시안 사전분포(prior)에 대하여 η 의 사후(posterior) 평균이 스무딩 스플라인 η_λ 와 같아짐을 보였다. Wahba (1983)는

1) Full-Time Instructor, Department of Information Statistics, Kangwon National University, Chuncheon 200-701, Korea. E-mail : ykim7stat@kangwon.ac.kr

Wahba (1978)의 베이즈 모델을 기초로 하여 베이저안 신뢰구간의 경험적 포함률에 대한 성질인 Across-the-function coverage 성질을 제시하고 가우시안 자료를 이용하여 그 성능을 확인하였다. Gu (1992)는 이러한 Wahba의 베이즈 모델을 Bernoulli 자료에 확장시켰다. 그러나 기존의 스무딩 스플라인 계산은 대용량 자료에 대한 계산의 현실적 어려움이 있었다. 이를 극복하는 방안으로 Kim and Gu (2004)는 가우시안 자료에 대하여 점근적 효율성을 유지하는 저차원 근사해의 빠른 계산방법과 함께 저차원 근사해에 대한 베이즈 모델을 제시하였다. Kim (2005)은 가우시안 자료에 적용된 저차원 근사해를 비가우시안 자료에 확장하여 적용시켰다. 우리는 Bernoulli 자료 외의 다른 지수족 자료에 확장된 저차원 근사해에 대한 베이즈 모델을 제시하고 베이즈 추정치로서의 저차원 근사해의 성능을 베이저안 신뢰구간을 이용하여 확인하고자 한다. 구체적으로, 식(1.1)의 최소해에서의 로그우도함수의 이차근사를 이용하여 Kim and Gu (2004)의 베이즈 모델을 기초로 한 근사 베이저안 신뢰구간을 유도하고, 신뢰구간의 성질들을 확인하기 위하여 경험적 연구를 수행하고자 한다.

2. 별점우도회귀

이 장에서는 식(1.1)에서의 거친 정도에 대한 별점도 함수 $J(\eta)$ 에 대하여 알아본다. 식(1.1)의 최소해는 $H \subseteq \{\eta: J(\eta) < \infty\}$ 에서 찾게 되며 이 때, 함수공간 H 에서의 별점도 함수는 square seminorm이다. 식(1.1)의 로그우도함수에서 나타나는 평가범함수 (evaluation functional) $[x]\eta = \eta(x)$ 는 연속이라고 가정한다. 이러한 평가범함수가 연속인 함수공간 H 를 RKHS(Reproducing Kernel Hilbert Space)이라고 하며, H 에서의 내적 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 에 대하여 $\langle R(x, \cdot), f(\cdot) \rangle = f(x)$ 와 같은 성질을 만족하는 비음정치 함수인 $R(\cdot, \cdot) \in H$, $R_x(\cdot) = R(\cdot, \cdot)$, $\forall x$ 를 가진다. 이러한 비음정치 함수를 RK(Reproducing Kernel)라고 부른다. 내적은 $\langle \cdot, \cdot \rangle = \mathcal{J}(\cdot, \cdot) + \tilde{\mathcal{J}}(\cdot, \cdot)$ 이 되며 이 때 $\mathcal{J}(\cdot, \cdot)$ 은 $\mathcal{J}(\cdot)$ 의 반(semi) 내적이고 $\tilde{\mathcal{J}}(\cdot, \cdot)$ 은 별점도 함수 $J(\eta)$ 의 영공간 $N_J = \{\eta: J(\eta) = 0\}$ 의 내적이다. (Gu (2002))

Gu (1990, 1992), Xiang and Wahba (1996), Gu and Xiang (2001)은 이러한 별점우도회귀에서의 평활 모수의 선택방법과 최소해의 계산방법에 대하여 논하였다. 무한차원 공간 H 에서의 최소해 계산은 현실적으로 불가능하다. 이에 대한 잘 알려진 방안은 유한 차원 공간인 $H_n = N_J \oplus \text{span}\{R_J(x_i, \cdot), i = 1, \dots, n\}$ 에서의 최소해 계산이다. 적당한 조건들 하에서 H_n 에서의 식(1.1)의 최소해는 H 에서의 정확해와 같은 점근적 수렴률을 가진다는 것을 보일 수 있었다. 그러나 자료의 수만큼의 기저를 사용하는 방법은 대용량 자료에 대하여 계산의 현실적 어려움이 있다. 이보다 더 발전된 방안으로 Gu and Kim (2002)은 크기가 $q \leq n$ 인 랜덤 부분집합 $\{z_j, j = 1, \dots, q\} \subseteq \{x_i, i = 1, \dots, n\}$ 에 대하여 $H_q = N_J \oplus \text{span}\{R_J(z_j, \cdot), j = 1, \dots, q\}$ 으로의 근사해를 제시하였다. 그들은 q 의 오더는 $O(n^{2/(pr+1)+\epsilon})$, $p \in [1, 2]$, $r > 1$, $\forall \epsilon > 0$ 으로 조절되면 H_q 에서의 q -차원의 근사해도 정확해와 같은 점근적 수렴률을 보인다는 것을 밝혔다. $p \in [1, 2]$ 는

η 의 평활도(smoothness)에 따라 결정되며, $\int (\eta^{(4)})^2 dx < \infty$ 이면 $p=2$ 로 둔다. 벌점도 함수가 $\int \ddot{\eta}^2 dx$ 이면 $r=4$ 이다. 여기서 $\ddot{\eta}$ 는 η 의 2번째 도함수이고 $\eta^{(k)}$ 는 η 의 k 번째 도함수이다. 이러한 q -차원 근사해의 계산은 $O(nq^2)$ 로 낮아진다. H_q 에서의 최소화하는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\eta(x) = \sum_{\nu=1}^m d_{\nu} \phi_{\nu}(x) + \sum_{j=1}^q c_j R_j(z_j; x_i). \tag{2.1}$$

여기서 $\{\phi_{\nu}\}$ 는 영공간 N_J 의 기저이고 $R_j(v_j, x) = \xi_j(x)$ 는 RK이다. 이 때 $q=n$ 일 때 식(2.1)은 식(1.1)의 정확해가 된다. Kim and Gu (2004)은 이러한 저차원 근사해를 이용한 빠른 계산방법을 가우시안 자료에 적용시켰다. Kim (2005)는 지수족 자료에 대하여 이러한 저차원 근사해를 이용한 계산방법을 적용시켰다.

지수족 자료 $Y_i \sim \exp\{(y\theta_i - b_i(\theta))/a(\phi) + c(y, \phi)\}$, $\theta = \theta(\eta)$ 에 대하여 $u(\eta; Y) = dl/d\eta$, $w(\eta; Y) = d^2l/d\eta^2$ 로 두자. 식(1.1)에 Newton iteration을 이용하면 $\tilde{\eta}$ 에서의 이차근사를 구하여 벌점가중최소제곱 범함수 형태의 표현식을 얻는다. 그 표현식에 식(2.1)의 표현식을 대입하면 다음과 같이 나타난다.

$$(\tilde{Y} - Sd - Rc)^T \tilde{W} (\tilde{Y} - Sd - Rc) + n\lambda c^T Qc. \tag{2.2}$$

여기서 $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n)^T$, $\tilde{W} = \text{diag}(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n)$ 이고, $\tilde{Y}_i = \tilde{\eta}(x_i) - \tilde{u}_i/\tilde{w}_i$, $\tilde{u}_i = u(\tilde{\eta}(x_i); Y_i)$, $\tilde{w}_i = w(\tilde{\eta}(x_i); Y_i)$ 이다. S 는 (i, ν) 번째 원소가 $\phi_{\nu}(x_i)$ 인 $n \times m$ 행렬이고, R 은 (i, j) 번째 원소가 $R(z_j, x_i)$ 인 $n \times q$ 행렬, 그리고 Q 는 (j, k) 번째 원소가 $R(z_j, z_k)$ 인 $q \times q$ 행렬이다. $Y_w = \tilde{W}^{1/2} \tilde{Y}$, $\hat{Y}_w = \tilde{W}^{1/2} (Sd + Rc)$ 로 두면, $\hat{Y}_w = A_w(\lambda) Y_w$ 가 되고 A_w 은 평활 행렬이다. 식(2.2)의 계산은 Kim and Gu (2004)의 최소제곱에서와 마찬가지로 Cholesky 분해와 전진/후방 대입에 의해 할 수 있다.

비모수적 추정법에서 가장 중요한 요소는 분산과 편의를 적당히 조절하는데 있다. 벌점회귀에서는 평활모수가 이러한 역할을 하고 있다. 즉, 평활모수가 너무 커지면 식(1.1)의 최소화는 $J(\eta)$ 의 영공간에서의 모수적 모델링의 해로 가까워지고 평활모수가 너무 작으면 최소화는 지나치게 거친 함수형태인 비모수 최대우도추정치(MLE)로 나타나게 된다. 벌점회귀에서 평활모수는 최소해의 성능을 결정하는 중요한 역할을 하는 것이다. Xiang and Wahba (1996)와 Gu and Xiang (2001) 등은 지수족 자료에 대한 벌점회귀에서의 평활모수의 선택 방법을 제시하였다. 최근에 Kim (2005)는 Bernoulli 자료에만 국한되었던 기존의 방법을 다른 지수족 자료로 확장시켜 좀 더 보완된 방법을 제시하였다. 우리는 Kim (2005)이 제시한 방법들을 이용하여 선택되는 평활모수를 가지고 지수족 자료의 저차원 근사해를 계산한다.

3. 베이즈 모델

벌점우도회귀에서 식(1.1)의 최소화는 베이즈 추정치로도 알려져 있다. 이러한 베이

즈 모델은 Wahba (1978, 1983), Gu (1992)에 의해서 제시되고 연구되었다. 특히 식 (2.1)과 같이 저차원 근사해에 대한 베이즈 모델은 Kim and Gu (2004)에 의해 가우시안 자료에 대하여 제시하였다. 지수족 자료에 대한 저차원 근사해에도 베이즈 모델을 확장시킬 수 있다. $\eta \in H_q$ 에 대하여 $\eta = \eta_0 + \eta_1$, η_0 과 η_1 은 서로 독립인 가우시안 과정을 가지며 η_0 은 N_J 에서 확산(diffuse) 사전분포를 가지고 η_1 은 평균이 0이고 공분산 함수가 $E[\eta_1(x)\eta_2(y)] = bR_J(x, z^T)Q^+R_J(z, y)$ 인 가우시안 과정 사전분포를 가진다고 두면, 가우시안 자료에 대하여 η 의 사후평균이 식(1.1)의 근사 최소해와 같아지는 것을 확인할 수 있었다. 여기서 Q^+ 는 $Q = R_J(z, z^T)$ 의 무어-펜로즈 역행렬(Moore-Penrose inverse)이고 $\eta_0(x) = \beta^T \phi(x)$, $\beta \sim N(0, \tau^2 I)$ 로 둔다.

이러한 베이즈 모델을 비가우시안 자료에 대한 벌점우도회귀모형에 적용해 보자. $\tau^2 \rightarrow \infty$ 로 두면, 주어진 Y 에 대하여 η 의 사후 우도함수는 아래와 같다.

$$p(\eta|Y) \propto p(Y|\eta)q(\eta) \propto \exp(Y\theta(\eta) - b(\theta(\eta)))/a(\phi) - \frac{1}{2b} \eta^T (M^{-1} - M^{-1}S(S^T M^{-1}S)^{-1}S^T M^{-1})\eta \quad (3.1)$$

여기서 $M = RQ^+R^T$, $\lim_{\tau^2 \rightarrow \infty} (M + \tau^2 SS^T)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}S(S^T M^{-1}S)^{-1}S^T M^{-1}$ 이고 $q(\eta)$ 는 η 에 대한 우도함수이다. $n\lambda = a(\phi)/b$ 로 두면 $\xi(x)$ 가 Q 의 열 공간에 속한다는 사실을 이용하여 식(1.1)를 최소화하는 $\eta_\lambda = Sd + Rc$ 가 사후 모드(posterior mode)가 되는 것을 쉽게 보일 수 있다.

사후모드 $\tilde{\eta} = \eta_\lambda$ 에서의 $p(Y|\eta)$ 의 이차근사(quadratic approximation)를 구하면 분산이 $a(\phi)\tilde{W}^{-1}$ 인 자료 \tilde{Y} 의 가우시안 우도함수가 나타난다. 여기서 \tilde{Y} 와 \tilde{W} 는 2장을 참조하라. 이렇게 근사된 가우시안 우도함수를 $\hat{p}(\tilde{Y}|\eta)$ 로 두면 $\hat{p}(\eta|\tilde{Y}) \propto \hat{p}(\tilde{Y}|\eta)q(\eta)$ 인 근사 사후(posterior)우도함수를 얻게 된다. 이것은 실제로 Kim and Gu (2004)의 베이즈 모델 유도과정에서 가중(weighted) 가우시안 자료를 생각하여 Kim and Gu (2004)의 베이즈 모델을 적용시키는 결과와 동일해지므로 간단한 계산으로 $\eta(x)$ 에 대한 근사 사후평균과 분산을 얻을 수 있다. 또한 Kim and Gu (2004)의 6절과 마찬가지로 근사 사후평균이 식(2.1)의 저차원 근사해 $\phi^T d + \xi^T c$ 와 같아지는 것도 쉽게 보일 수 있다.

4. 베이시안 신뢰구간의 포함 성질

이제 우리는 베이즈 추정치로서의 저차원 근사최소해의 성능을 베이시안 신뢰구간의 성질을 이용하여 확인하고자 한다. Wahba (1983)의 베이시안 신뢰구간의 경험적 포함성질은 95% 신뢰구간이 전체의 95% 정도로 참해를 커버한다는 빈도론적 신뢰구간의 해석법이다.

식(1.1)의 최소해에 대한 베이시안 신뢰구간은 Wahba (1983), Gu (1992)에 의하여 연구되었는데, 특히 Gu (1992)는 Bernoulli 자료에 대하여 $q = n$ 인 최소해 식(2.1)의

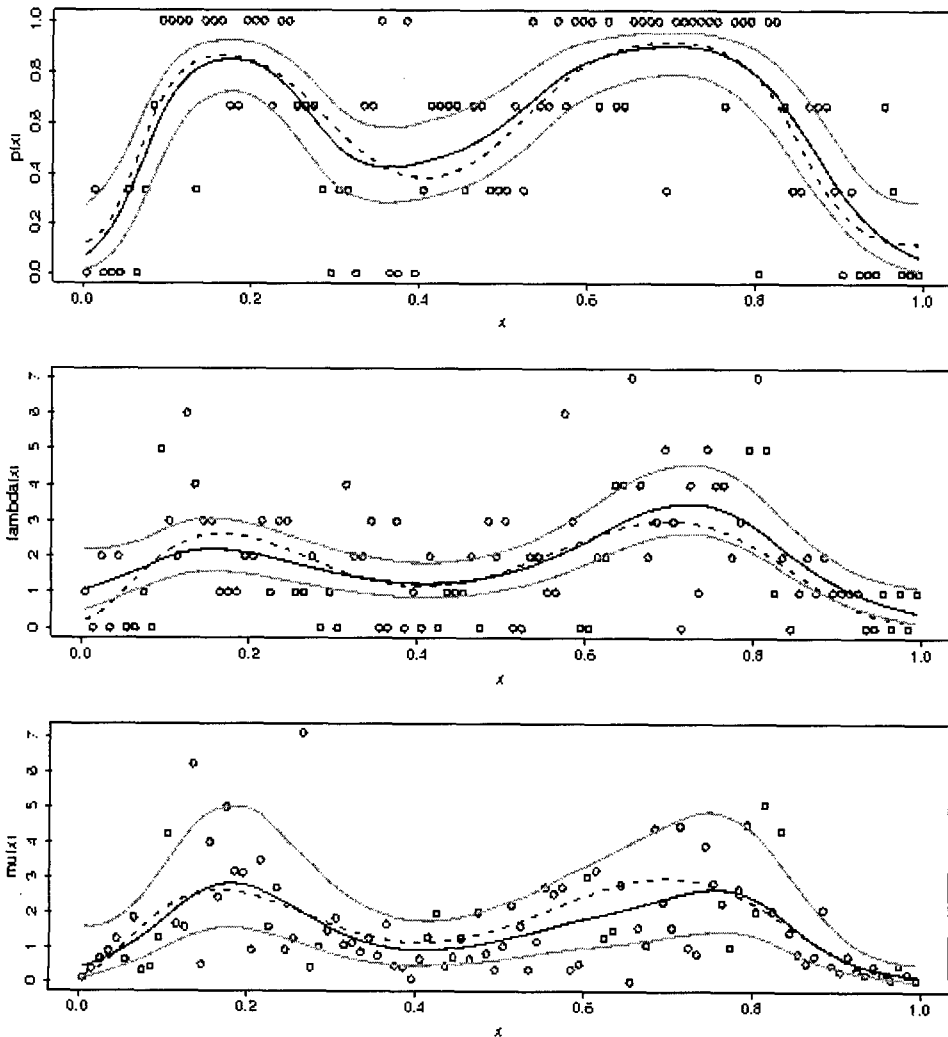
베이지안 신뢰구간의 포함 성질을 보였다. 그는 η 의 곡률(curvature)에 따라 포함률이 달라지는 것을 보였는데, 특히 굴곡성이 높은 지점에서 상대적으로 낮은 포함률을 나타내었다.

우리는 Bernoulli 외의 다른 지수족 자료에 대하여 $q < n$ 인 저차원 근사해에 대한 베이지안 신뢰구간의 포함성질을 알아보고자 한다. Kim (2005)에서와 마찬가지로 다음과 같은 모의실험을 수행하였다. 다음과 같은 세 개의 테스트 함수들에 대하여 각 표본의 크기 $n=100,500$ 에 대하여 $x_i = (i-0.5)/n$ 를 사용하였다.

(Test 1) $\eta(x) = 1980x^7(1-x)^3 + 858x^2(1-x)^{10} - 2$

(Test 2) $\eta(x) = 2 \sin(2\pi x) + 0.1$

(Test 3) $\eta(x) = e^{-(x-0.5)^2}$



<그림 1> 각 분포에 대하여 (Test 1)에 대한 95% 베이지안 신뢰구간

Binomial인 경우, $p \in [0.03, 0.97]$ 이 되도록 각 테스트 함수들을 조절하고 각 $m_i = 3, 5, 7$ 인 Binomial 분포에서 자료를 생성하였다. Poisson인 경우, $\lambda_i \in [0.2, l]$ 이고 l 은 3, 6, 9 중 하나가 되게 하였다. Gamma인 경우 형태모수(shape parameter) $\nu = 2, 3, 4$ 에 대하여 평균 $\mu \in [0.2, 3]$ 으로 조절하였다. 서로 다른 분포, n 의 크기와 SNR(signal to noise ratio)를 가진 각 테스트 함수에 대하여 각각 100개의 반복표본(replicates)을 생성하였다. Kim (2005)의 평활모수의 선택방법들을 이용하여 $q = 10n^{2/9} \approx 28$, 40인 식(2.2)의 근사 최소해를 계산하고 근사 사후평균과 분산으로 각각 90%와 95% 점마다(pointwise) 베이지안 신뢰구간을 구하였다. <그림 1>의 그래프는 각 분포에 대하여 함수 (Test 1)과 $n=100$ 에 대하여 하나의 SNR을 이용하여 100개의 반복표본 중 임의로 추출한 하나의 표본으로 계산한 저차원 근사 최소해와 95% 베이지안 신뢰구간을 나타낸다. 점선은 참함수를 나타내고, 굵은 실선은 근사 최소해, 그리고 얇은 실선은 각각 95% 베이지안 신뢰구간을 나타낸다. 위에서부터 각각 Binomial, Poisson, Gamma 분포 자료에 대한 베이지안 신뢰구간을 나타낸다.

<표 1> ~ <표 3>은 각 분포에 대하여 서로 다른 SNR을 가지고 추출한 100개의 서로 다른 표본들에 대하여 각각 90%와 95% 베이지안 신뢰구간들의 경험적 포함률을 요약하였다. 각 분포마다 n 이 클수록 신뢰구간의 경험적 포함률은 전반적으로 높아지는 것을 확인할 수 있다. Binomial 자료의 경우 (Test 3)에 대한 포함률이 상대적

<표 1> Binomial 자료에 대한 90%/95% coverage

Test1	$m_i = 3$	$m_i = 5$	$m_i = 7$
$n=100$	88.8/93.8	88.6/94.0	88.2/93.9
$n=500$	89.9/94.8	90.3/95.2	89.8/94.6
Test2	$m_i = 3$	$m_i = 5$	$m_i = 7$
$n=100$	91.1/95.5	92.2/95.9	92.1/95.9
$n=500$	91.9/96.4	91.8/96.3	91.9/96.3
Test3	$m_i = 3$	$m_i = 5$	$m_i = 7$
$n=100$	76.9/82.8	76.1/82.0	76.4/82.4
$n=500$	76.5/83.3	80.2/86.6	82.3/88.2

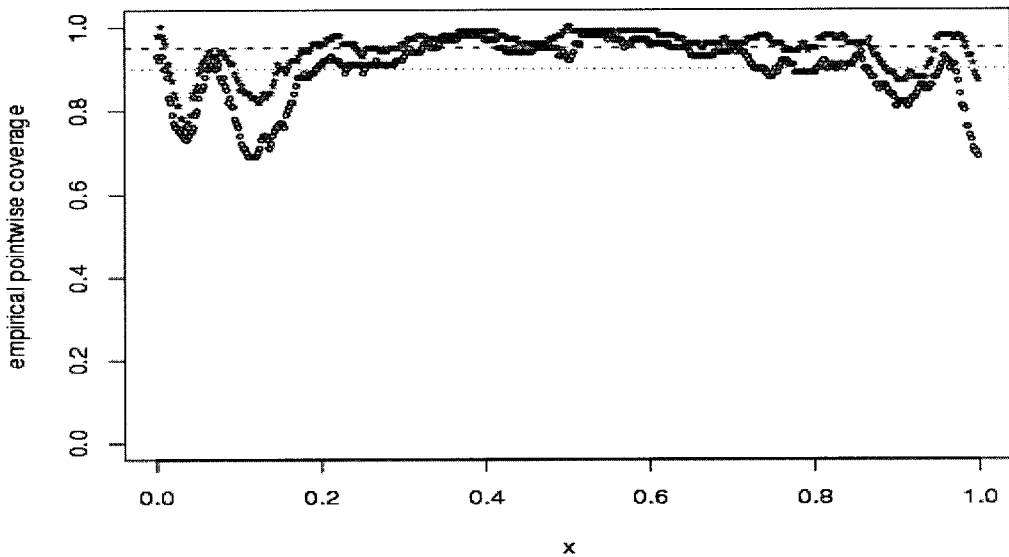
<표 2> Poisson 자료에 대한 90%/95% coverage

Test1	$l = 3$	$l = 6$	$l = 9$
$n=100$	87.3/91.9	88.4/92.6	88.1/92.7
$n=500$	87.7/92.8	88.1/92.8	88.1/92.8
Test2	$l = 3$	$l = 6$	$l = 9$
$n=100$	81.3/87.9	80.9/86.3	80.9/86.1
$n=500$	83.6/89.5	82.7/88.3	82.5/88.0
Test3	$l = 3$	$l = 6$	$l = 9$
$n=100$	86.1/91.5	85.5/91.4	85.7/91.0
$n=500$	84.0/90.2	85.6/91.0	86.9/91.8

<표 3> Gamma 자료에 대한 90%/95% coverage

Test1	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$n=100$	96.0/98.4	94.7/97.6	92.6/96.7
$n=500$	96.5/98.3	94.0/97.0	92.4/95.9
Test2	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$n=100$	93.7/96.7	92.2/96.1	89.7/94.0
$n=500$	96.6/98.6	94.1/97.4	92.1/96.0
Test3	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$
$n=100$	94.7/97.2	92.8/96.3	91.8/96.0
$n=500$	96.7/98.4	94.3/97.3	92.2/95.9

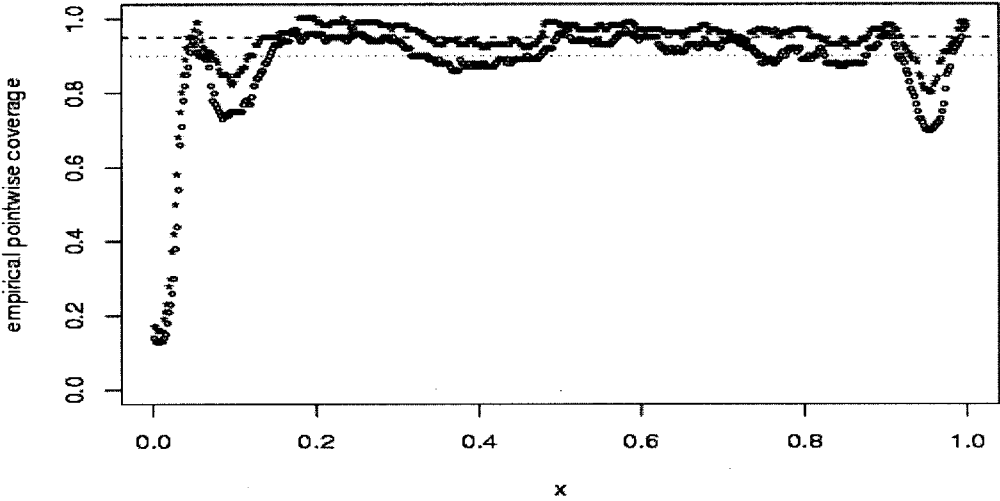
으로 낮은데, 이것은 변환된 함수의 굴곡성이 심하게 나타났기 때문으로 추측된다. Poisson 자료인 경우 세 함수에 대하여 포함률이 모두 낮게 나타났다. 이것은 함수의 굴곡성 외에도 저차원 근사해의 베이저안 신뢰구간을 결정하는 베이스 모델이 반복표본마다 다르다는 사실과 사후 분산이 근사적으로 계산되므로 상대적으로 “나쁜” 랜덤 표본 $\{z_j, j = 1, \dots, q\}$ 이 선택되어진 베이스 모델에서는 사후분산이 낮게 추정되어 포함률이 낮아지는 것을 볼 수 있다. 사후분산이 낮게 추정되어진 반복표본들을 전체의 약 10% 정도 제거하고 난 후 포함률을 다시 계산하면 95% 신뢰구간은 포함률이 90.38%~94.56%로, 90% 신뢰구간은 85.91%~90.07%까지 포함률이 상승하였다.



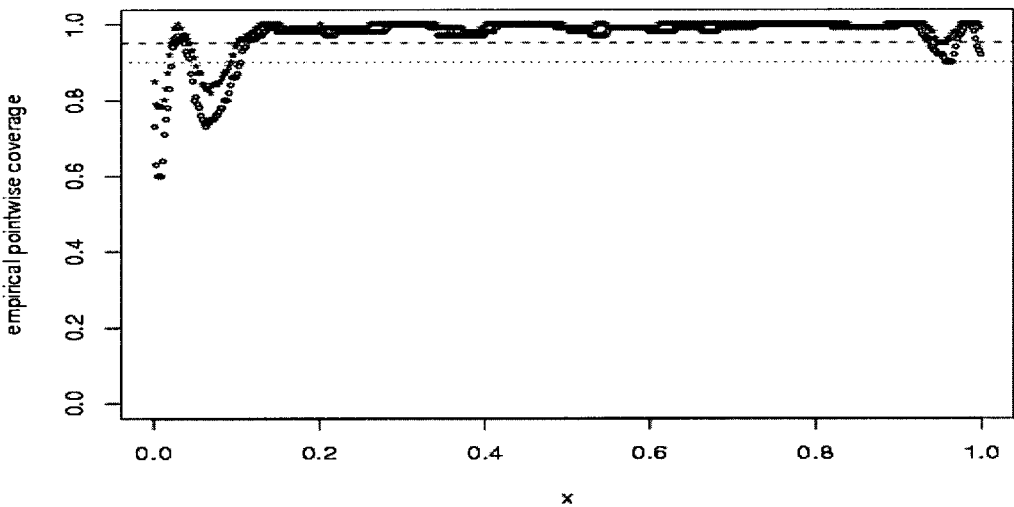
<그림 2> Binomial 자료 with (Test 1)의 90%/95% 포함률

<그림 2>~<그림 4>는 <표1>~<표3>에 요약된 포함률을 그래프로 나타낸 것이다. 각 지수족에 대하여 $n=500$ 인 반복표본을 이용하여 위에서 고려한 세 함수들 중 하나인 (Test 1)과 세 가지 SNRs 중 하나를 임의로 택하여 90%와 95% 점마다

(pointwise) 베이저안 신뢰구간의 포함률을 나타내었다. 두 개의 평행 점선들은 각각 90%와 95% 포함률을 표시한다. 다른 함수들에 대하여 $n=100$ 일 때와 다른 두 가지 SNRs에 대하여도 비슷한 포함률의 그래프를 나타내므로 여기서는 생략하였다.



<그림 3> Poisson 자료 with (Test 1)의 90%/95% 포함률



<그림 4> Gamma 자료 with (Test 1)의 90%/95% 포함률

5. 결론

Kim and Gu (2004)는 가우시안 자료에 대하여 점근적 효율성을 유지하는 저차원 근사해에 대한 베이즈 모델을 제시하였다. 우리는 Kim (2005)에서 고려된 비가우시안 자료, 특히 지수족 분포 자료에 대한 저차원의 근사해에 대하여 베이즈 모델을 제시

하였다. 이러한 베이지 모델 기반의 계산되는 베이지안 신뢰구간의 Wahba의 Across-the-function coverage 성질을 통하여 지수족 자료에 대한 저차원 근사해의 성능을 확인하였다. 실제로 저차원 근사해의 베이지 모델은 랜덤 부분표본인 $\{z_j, j = 1, \dots, q\}$ 에 따라 달라지며 정확해에 대한 베이지 모델과도 아주 다를 수 있다. 그러므로 베이지안 신뢰구간의 경험적 포함률이 기대했던 것과 약간씩 다르게 나타나는 것은 아주 놀라운 일이 아니다. 참해의 굴곡성에 따라 베이지안 신뢰구간의 경험적 포함률이 달라지며, 전반적으로 세 분포 자료들에 대하여 저차원 근사해에 대한 베이지안 신뢰구간의 빈도론적 성질을 유지하며 Poisson 자료에 대하여는 상대적으로 약간 낮은 포함률을 나타내었다.

참고문헌

- [1] Gu, C. (1990). Adaptive spline smoothing in non Gaussian regression models. *Journal of American Statistical Association*, Vol. 85, 801-807.
- [2] Gu, C. (1992). Cross-validating non-Gaussian data. *Journal of Computational Graphics and Statistics*, Vol. 1, 169-179.
- [3] Gu, C. (2002). *Smoothing Spline ANOVA Models*. New York: Springer-Verlag.
- [4] Gu, C. and Kim, Y.J. (2002). Penalized likelihood regression: General formulation and efficient approximation. *Canadian Journal of Statistics*, Vol. 30, 619-628.
- [5] Gu, C. and Xiang, D. (2001). Cross-validating non-Gaussian data: Generalized approximate cross-validation revisited. *Journal of Computational Graphics and Statistics*, Vol. 10, 581-591.
- [6] Kim, Y.J. (2005). Computation and Smoothing parameter selection in Penalized likelihood regression. *The Korean Communications in Statistics*, Vol. 12, 743-758.
- [7] Kim, Y.J. and Gu, G. (2004). Smoothing spline Gaussian regression: More scalable computation via efficient approximation. *Journal of Royal Statistical Society Series B*, Vol. 66, 337-356.
- [8] Wahba, G. (1978). Improper priors, spline smoothing and the problem of guarding against model errors in regression. *Journal of Royal Statistical Society Series B*, Vol. 40, 364-372.
- [9] Wahba, G. (1983). Bayesian "confidence intervals" for the cross-validated smoothing spline. *Journal of Royal Statistical Society Series B*, Vol. 45, 133-150.
- [10] Wahba, G. (1990). *Spline Models for Observational Data*, Vol 59 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Philadelphia: SIAM.
- [11] Xiang, D. and Wahba, G. (1996). A generalized approximate cross validation

for smoothing splines with non-Gaussian data. *Statistical Sinica*, Vol. 6
675-692.

[Received November 2005, Accepted February 2006]