The Korean Communications in Statistics
Vol. 13 No. 1, 2006, pp. 135-140

Structure of the Concordance Matrix Related to Extended Group Divisible Designs

Jong-Sung Bae[1)] and Seo-Young Kim[2)]

Abstract

The paper by Paik (1985) introduced a structural property of the designs which was related to the concordance matrix NN^t of the design. This special property was termed Property-C. The designs which have Property-C need not calculation of the generalize inverse of C matrix for solution of reduced normal equation. Paik also mentioned that some block designs belong to Property-C. This paper show the Extended Group Divisible designs defined by Hinkelmann (1964) are included in Property-C.

Keywords : Extended Group Divisible Design; Property-A; Property-C.

1. 서론

처리 수 v, 블록 수 b, 반복수 r, 블록의 크기 k, 상반수 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 을 갖는 상반수가 m 인 부분적으로 균형된 불완비 블록계획(Partially Balanced Incomplete Block Design : $PBIBD(m)$)은 균형된 불완비 블록계획(Balanced Incomplete Block Design; BIBD)이 주어진 모수에서 실험규모가 커지는 경우 균형성을 포기한 대신 비교적 적은 수의 실험으로 블록설계를 하고자 하는 경우에 사용된다. $PBIBD(m)$ 설계 모형은 다음과 같다.

$$y_{ij} = u + \tau_i + \beta_j + e_{ij}, \quad (i = 1,2,\cdots,v) \ (j = 1,2,\cdots,b). \tag{1.1}$$

여기서, y_{ij} 는 측정치, u 는 평균, τ_i 는 i 번 처리 효과, β_j 는 j 번 블록효과, e_{ij} 는 오차항이다. (1.1) 모형에서 블록효과를 제거한 축소된 정규방정식과 해는 다음과 같다.

$$C = rI_v - (1/k)\, NN^t, \ \hat{\tau} = \Omega Q \ (\text{단}, \ Q = T - (1/v)NB).$$

여기서, I_v 는 크기 $v \times v$ 인 단위행렬, N 은 크기 $v \times b$ 인 빈도행렬(incidence matrix), N^t 는 N 의 전치행렬, $\hat{\tau}$ 는 크기 $v \times 1$ 인 해 벡터, Ω 는 C 의 일반화된 역행렬(generalized inverse matrix)로 $(C + aJ_v)^{-1}$ 와 같다. 여기서 a 는 $a \neq 0$ 인 상수,

1) Professor, Department of Statistics, Chonnam National University, Gwangju 500-757, Korea. Correspondence : jsbae@chonnam.ac.kr
2) Post doctoral fellowship, Biomedical Statistics, Osaka University, Osaka 565-0871, Japan.

J_v 는 $v \times v$ 인 모든 원소가 1인 행렬을 나타낸다, $T=(T_1, T_2, \cdots, T_v)$ 에서 T_i 는 i 번째 처리 합, $B=(B_1, B_2, \cdots, B_j)$ 에서 B_j 는 j 번째 블록의 합이다. $\hat{\tau}$ 는 Ω 에 의해 결정되고, Ω 과 C 행렬은 구조적으로 동일하다. 따라서 해는 C 행렬에 의해 결정되고, C 행렬은 NN^t 에 좌우되며 NN^t 는 자료의 배치행렬 N 에 의해 좌우된다. 따라서 블록계획 특히 $PBIBD(m)$ 설계에서 배치를 적당히 안배하면 역행렬 Ω 을 구하지 않고 해를 쉽게 얻을 수 있다. 이러한 연구는 컴퓨터가 대중화되기 전인 1960년대 Kurkjian and Zelen (1963)에 의해 블록계획의 해를 쉽게 구하기 위한 시도로 연구되었다.

Paik (1985)은 구조행렬(concordance matrix : NN^t)이 다중순환형태를 취하면 Property-C에 속한다고 하고, 그룹 분해 가능계획(Group Divisible Design), 직사각형계획(Rectangular Design), 계보적 분해가능계획(Hierarchical Group Divisible Design), 직접 곱 계획(Direct Product Design)이 Property-C에 속한다고 했다. 본 논문에서는 확장된 그룹 분해 가능계획(Extended Group Divisible Design : EGDD)이 Property-C 에 속하는 설계임을 보이고자 한다.

2. 구조행렬의 특수한 형태

구조행렬의 특수한 형태로 역행렬을 구하지 않고, 블록계획의 해를 얻고자하는 시도의 연구로는 Kurkjian and Zelen (1963)의 Property-A and Paik (1985)의 Property-C 가 있다.

2.1 Property-A

Kurkjian and Zelen (1963)은 $v=m_1, m_2, \cdots, m_n$ 인 NN^t 가 다음과 같이 표시되면 Property-A를 갖는다고 했다.

$$NN^t = \sum_{s=0}^{n}\left(\sum_{\sigma_1+\cdots+\sigma_n=s} = h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)(\Pi \otimes D_i^{\sigma_i})\right). \tag{2.1}$$

단, 여기서 $D_i^{\sigma_i} = I_{m_i}$: $\sigma_i = 0$ 이면 : $I_{mi} = m_i * m_i$ 인 단위 행렬,

J_{m_i}: $\sigma_i = 1$ 이면 : $J_{mi} = m_i * m_i$ 인 모든 원소가 1인 행렬이고,

$\otimes$ 는 직접 곱(kronecker product), $h(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ 는 상수를 나타낸다. 블록설계가 Property- A에 속하면 Ω 는 다음과 같이 구해진다.

$$\Omega = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{x_1+x_2+\cdots+x_n=s} (\Pi \otimes I_i^{x_i} M_i^{x_i}) / (rv\,\theta(x_1, x_2, \cdots, x_n))\right).$$

여기서,

$$r\Theta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\sum_{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n=0} g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)\,\Pi\,(n_i^{(1-n_i)\sigma_i(1-x_i)\sigma_i})\right)$$

이고, $g(0,0,\cdots,0) = r - k^{-1}h(0,0,\cdots,0)$, $g(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n) = -k^{-1}h(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 을 나타낸다.

2.2 Property-C

$v = m_1, m_2, \cdots, m_n$ 인 블록계획의 NN^t 가 크기 $m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n$ 인 m_1^2 개로 분할되고 m_1^2 개의 분할된 행렬이 다시 크기 $m_3 \times m_4 \times \cdots \times m_n$ 인 m_2^2 개로 분할되는 형식이 $n-1$ 번 계속되는 다중 순환행렬(Multi-Nested Block Circulant Matrix)이라 한다면 (2.1)식과 같이 표현되고, 이러한 계획을 Property-C에 속한다고 한다 (Paik, 1985).

Property-C에 속하는 블록계획의 NN^t 와 C 의 일반화 역행렬 Ω 는 다음과 같다.

$$NN^t = \sum_{i_1=0}^{m_1-1} \sum_{i_2=0}^{m_2-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n-1} h(i_1, i_2, \cdots, i_n)(\Pi \otimes R_{m_j}^{ij}). \tag{2.2}$$

여기서 $h(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 는 NN^t 의 첫 번째 열의 원소이고, $\Pi \otimes R_{m_j}^{ij} = R_{m_1}^{i_1} \otimes R_{m_2}^{i_2} \otimes \cdots \otimes R_{m_n}^{i_n}$, $R_{m_i}^{i_i}$ 는 크기 $m_i \times m_i$ 인 순환행렬로, 제 1열의 (i_i+1) 번째 행의 원소는 1, 나머지는 0이다. 일반화 역행렬은

$$\Omega = (\Pi\, m_i)^{-1} \sum_{i_1}\sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} \theta^{-1}(i_1, i_2, \cdots, i_n)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos\left(2 i_k j_k \pi / m_k\right)\right)$$

이다. 여기서, $\theta(j_1, j_2, \cdots, j_n) = \sum_{i_1}\sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} a(i_1, i_2, \cdots, i_n)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos\left(2 i_k j_k \pi / m_k\right)\right)$,

$a(i_1, i_{2,}, \cdots, i_n)$ 는 블록행렬인 $(NN^t + aJ)$ 의 첫 열에 해당하는 원소를 나타낸다.

(2.1)식과 (2.2)식에서 $D_i^0 = R_{m_i}^0$, $D_i^1 = R_{m_i}^0 + R_{m_i}^1 + \cdots + R_{m_i}^{m_{i-1}}$ 이므로 이와 같은 관계를 (2.1)식에 대입하면 (2.2)식과 같이 표현할 수 있기 때문에 Property-A는 Property-C의 특수한 경우임을 알 수 있다.

2.3 확장된 그룹분해 가능계획

Hinkelmann (1964)은 $v = N_1, N_2, \cdots, N_n$ ($N_1 = 1, \cdots, n_1$, $N_2 = 1, \cdots, n_2$, $\cdots$, $N_n = 1, \cdots, n_n$) 일 때, N_i 의 k 번째 원소를 i_k 라고 하면, 이를 i_k 성분(component)이라 한다. $\lambda(i_1,\cdots,i_k,\cdots,i_n)$ 의 정의를 임의의 두 처리에서 i_k 의 성분이 같으면 0, 다르면 1이라고 할 때, $\lambda(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 의 수를 $n(i_1, i_2, \cdots, i_i, \cdots, i_n)$ 이라고 하면 $n(1,0,\cdots,0) = N_1 - 1$, $n(0,1,\cdots,0) = N_2 - 1, \cdots$, $n(1,1,\cdots,1) = (N_1-1)(N_2-1) \cdots (N_n-1)$ 인 상반관계가 존재하는 $PBIBD(m : m \geq 3)$ 인 계획을 확장된 그룹 분해 가능계획(Extended Group Divisible Design : EGDD)이라 한다.

(정리) $v = m_1, m_2, \cdots, m_n$ 인 EGDD는 Property-C 에 속한다.

(증명) $v = m_1, m_2, \cdots, m_n$ 인 처리를 다음과 같이 나열하면

$$\begin{array}{l} (0,0,0,\cdots,0,1),\ (0,0,0,\cdots,0,2),\ \cdots,\ (0,0,0,\cdots,0,m_1-1), \\ (0,0,0,\cdots,1,1),\ (0,0,0,\cdots,1,2),\ \cdots,\ (0,0,0,\cdots,1,m_n-1), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \cdots,\qquad (m_1-1, m_2-1, m_3-1, \cdots, m_{n-1}-1, m_n-1). \end{array}$$

EGDD는 NN^t 를 크기 $m_n \times m_n$ 인 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_{n-1}$ 개의 분할 행렬로 아래와 같이 분할 할 수 있다.

$$NN^t = \begin{pmatrix} A_{11}, A_{12}, A_{13}, \cdots, A_{1b} \\ A_{21}, A_{22}, A_{23}, \cdots, A_{2b} \\ \vdots,\ \vdots,\ \vdots,\ \ ,\vdots \\ A_{b1}, A_{b2}, A_{b3}, \cdots, A_{bb} \end{pmatrix}, \quad b = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_{n-1}.$$

크기 $m_n \times m_n$ 인 A_{11} 는 처리 $(0,0,0,\cdots,1)$ $(0,0,0,\cdots,2)$ $(0,0,0,\cdots,m_1-1)$ 끼리의 상반이다. A_{11} 의 대각선 원소는 자신과의 상반이므로 $\lambda(0,0,\cdots,0)$ 이고 비대각선의 원소는 비교하려는 두 처리의 마지막의 성분만 다른 상반이므로 $\lambda(0,0,\cdots,1)$ 이 된다. 처리 $[(i_1, i_2, \cdots, i_i, \cdots, i_n), (i'^1, i'^2, \cdots, i'^k, \cdots, i'^n)]$와 처리$[(i'^1, i'^2, \cdots, i'^k, \cdots, i'^n),$ $(i_1, i_2, \cdots, i_i, \cdots, i_n)]$의 상반은 동일하고 순환하는 대칭행렬이 된다. 같은 방법으로 $A_{ii}(i \geq 2)$ 의 원소는 A_{11} 에 비해 i_1 성분만 i_i 로 이동한 처리 $(i_1, i_2, \cdots, i_i, \cdots, i_n)$ 끼리의 상반이므로 대각선 행렬 A_{ii} 는 모두 같은 상반을 갖는 행렬이 된다. $A_{ij}(i > j)$ 의 원소는 i 번째 행과 j 번째 열이 변하는 처리의 상반이다. $\lambda(i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots, i_j, \cdots, i_n)$ 에서 i_k 부터 i_j 번째 성분만 변한다. 따라서 블록행렬 A_{ij} 는 순환행렬이다.

다음으로 블록순환임을 보이자. $v = m_1, m_2, \cdots, m_n$ 인 처리를 크기 m_n 인 $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1})^2$ 개의 블록 행렬로 분할할 수 있다. 이 행렬은 A_{ij} 에 필요한 처리는 m_n 개의 원소가 변한 후에 A_{i+1j} 의 처리가 된다. 따라서 이러한 방법을 반복하면 $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-1})^2$ 개의 블록행렬은 $m_n - 1$ 개의 $(m_1, m_2, \cdots, m_{n-2})^2$ 개의 블록 행렬로 분할할 수 있다. 이와 같은 방법을 계속하면 m_1^2개의 블록 행렬로 분할할 수 있고 $A_{ij} = A_{ji}$ 이다. 블록 행렬은 A_{ij} 와 같은 방법으로 EGDD의 처리배열이 블록으로 변하는 상반관계의 특징 때문에 순환한다.

(예제) $v = 2, 2, 3$, $b = 12$, $k = 4$, $r = 4$인 EGDD 설계는 다음과 같다.

(1 5 8 12) (2 6 9 10) (3 4 7 11) (2 4 9 11) (3 5 7 12) (1 6 8 10)
(2 6 7 11) (3 4 8 12) (1 5 9 10) (3 5 8 10) (1 6 9 11) (2 4 7 12)

처리를 자연수 순으로(000) (001) (002) (010) (011) (012) (100) (101) (102) (110) (111) (112) 순서로 나열하면 NN^t 는 아래와 같은 형태를 갖는다.

$$NN^t = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}.$$

여기서, $A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} A_{13} & A_{14} \\ A_{23} & A_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}$.

A_{ij} 는 크기 3×3인 순환행렬로,

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ A_{12} = A_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ A_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

이다.

$$NN^t = \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{i_3=0}^{2} h(i_1 i_2 i_3)(R_2^{i_1} \otimes R_2^{i_2} \otimes R_3^{i_3}).$$

단, $r = h(0,0,0) = 4$, $h(0,0,1) = h(0,0,2) = 0, h(0,1,0) = 0$, $h(0,1,1) = h(0,1,2) = 2$, $h(1,0,0) = 0$, $h(1,0,1) = h(1,0,2) = 2$, $h(1,1,1) = h(1,1,2) = 1$.

예제의 EGDD는 $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44}$, $A_{12} = A_{21} = A_{34} = A_{43}, A_{13} = A_{24} = A_{31} = A_{42}$ 인 2중 블록순환행렬로 Property-C에 속하는 $PBIBD(3)$ 이다.

3. 결론

블록실험에서 배치를 잘하면 역행렬을 구하지 않고 축소된 정규방정식의 해를 구할 수 있는 특수한 형태의 구조행렬을 얻을 수 있다. 이러한 측면에서 Kurkjian, Zelen and Paik은 각각 구조행렬이 (2.1)식으로 표시되는 Property-A와 (2.2)식으로 표현되는 Property-C를 제시했다. 하지만 (2.1)식이나(2.2)식으로 구조행렬을 나타내기는 쉬운 작업이 아니다. 특히 $v = m_1, m_2, \cdots, m_n$ $(n \geq 3)$ 인 경우는 역행렬을 계산하는 작업만큼 복잡할 수도 있다. 그러나 Property-A, Property-C의 연구 초점은 단지 역행렬에만 초점이 주어지지는 않는다. Kshirsager (1966)는 Property-A 에 속하는 계획은 균형요인계획(Balanced Factorial design)이고 Cotter 등 (1973)은 Property-C 계획에 속하는 계획은 균형요인계획임을 보였다.

참고문헌

[1] Cotter, S.C., John, J.A. and Smith, T.M.F. (1973). Multi-factor experiments in non-orthogonal designs. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol. 35, 361-367.

[2] Hinkelmann, K. (1964). Extended group divisible partially balanced incomplete block designs. *Annual of Mathematical Statistics*, Vol. 35, 681-695.

[3] Kshirsager, A.M. (1966). Balanced factorial designs. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, Vol. 28, 559-567.

[4] Kurkjian, B. and Zelen, M. (1963). Applications of the calculus for factorial arrangements, I. b Block and direct product designs. *Biometrika*, Vol. 50. 63-73.

[5] Paik, U.B. (1985). Cyclic factorial association scheme partially balanced incomplete block designs. *Journal of the Korean Statistical Society*. Vol. XIV, 29-38.

[Received November 2005, Accepted February 2006]