Journal of the Korean
Data & Information Science Society
2006, Vol. 17, No. 3, pp. 805 ~809

Shrinkage Estimator of Dispersion of an Inverse Gaussian Distribution

In Suk Lee[1)] · Young Soo Park[2)]

Abstract

In this paper a shrinkage estimator for the measure of dispersion of the inverse Gaussian distribution with known mean is proposed. Also we compare the relative bias and relative efficiency of the proposed estimator with respect to minimum variance unbiased estimator.

Keywords : Inverse Gaussian distribution, Measure of dispersion, Minimum variance unbiased estimator, Relative efficiency, Shrinkage estimator

1. 서 론

역 가우스 분포는 Tweedie(1957)에 의하여 처음 사용되었고, 그 후 Wasan과 Roy(1967), Khatri(1962) 및 Chikkara와 Folk(1974, 1975, 1977)등이 역 가우스 분포에 대하여 연구를 하였다. 이와 같은 역 가우스 분포는 의약, 수명검정, 인구통계 및 재정학 등 여러 분야에서 유용하게 사용되고 있다. 지금 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x:\mu,\lambda)=(\frac{\lambda}{2\pi x^3})^{1/2}\exp[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}],\ (x>0,\lambda>0,\mu>0) \qquad (1)$$

일 때 X는 역 가우스 분포에 따른다고 말하고 $X\sim\in(\mu,\lambda)$로 표시한다. 식 (1)에서 μ는 평균이고 λ는 형상모수이며 λ^{-1}은 산포를 나타내는 측도이다.

Tweedie(1975)가 μ와 λ^{-1}의 최우추정통계량으로

$$\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \text{ 와} \qquad \widehat{\lambda^{-1}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{\overline{x}}\right)$$

1) 대구광역시 북구 산격동 1370 경북대학교 자연과학대학 통계학과 교수
E-mail : islee@knu.ac.kr
2) 대구광역시 북구 산격동 1370 경북대학교 대학원 통계학과

을 구하였고, 평균 $\mu=\mu_0$를 알고 있을 때 λ^{-1}의 최우추정통계량으로

$$\Lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{x_i\mu_0^2}$$

를 얻었다. 또한 Λ는 λ^{-1}의 균일최소분산비편향추정량도 된다.

한편 Schuster(1968)는 $X\sim\in(\mu,\lambda)$이면 $\lambda(X-\mu)^2(\mu^2X)^{-1}$은 자유도가 1인 카이제곱분포($\chi^2(1)$로 표시한다)에 따르고, $\left(\frac{\lambda}{\mu^2}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{X_i}\right]$은 $\chi^2(n)$에 따른다는 것을 보였다. 그러므로 $n\lambda\Lambda$는 $\chi^2(n)$에 따름을 쉽게 알 수 있다.

또한 Thompson(1968)은 통상적인 추정량의 평균제곱오차(MSE로 표시한다)를 개선하는 축소추정량의 방법을 보였다. 따라서 본 논문에서는 Thompson(1968)의 방법을 적용하여 MSE를 개선하는 축소추정량을 제시하고, 이 추정량과 균일최소분반비편향추정량(UMVUE)인 Λ와의 상대편향모수와 MSE 면에서의 상대효율성을 비교하고자 한다.

2. 본론

Thompson(1968)에서의 방법과 같이 알고 있는 평균 μ_0를 이용한 축소인자로서 $e^{-\mu_0}$($\mu>0$이므로 $0<e^{-\mu_0}<1$임을 알 수 있다.)를 선택하여

$$\Lambda_s=e^{-\mu_0}\left(\Lambda-\frac{1}{\lambda_0}\right)+\frac{1}{\lambda_0} \tag{2}$$

를 $\mu=\mu_0$를 알고 있을 때 λ^{-1}의 축소추정량으로 제안한다. 앞 절에서 우리는 $n\lambda\Lambda\sim\chi^2(n)$에 따른다는 것을 알기 때문에

$$E(\Lambda)=\frac{1}{\lambda},\qquad V(\Lambda)=\frac{2}{n\lambda^2}=MSE(\Lambda)$$

임을 쉽게 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}E(\Lambda_s)&=e^{-\mu_0}(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0})+\frac{1}{\lambda_0}\\&=e^{-\mu_0}(\frac{1-p}{\lambda})+\frac{1}{\lambda_0},\quad p=\frac{\lambda}{\lambda_0}\end{aligned}$$

이므로 Λ_s의 편향모수 $Bias(\Lambda_s)$는

$$Bias(\Lambda_s) = E(\Lambda_s) - \frac{1}{\lambda} = (\frac{1-p}{\lambda})(e^{-\mu_0} - 1) \tag{3}$$

이다. 그러므로 Λ에 대한 Λ_s의 상대편향모수는 다음 식 (4)와 같다.

$$RB(\Lambda_s) = \frac{Bias(\Lambda_s)}{1/\lambda} = (1-p)(e^{-\mu_0} - 1) \tag{4}$$

한편 Λ_s의 평균제곱오차는

$$\begin{aligned} MSE(\Lambda_s) &= E(\Lambda_s - \frac{1}{\lambda})^2 \\ &= \frac{1}{n\lambda^2}[n(1-p)^2(e^{-2\mu_0} - 1)^2 + 2e^{-2\mu_0}] \end{aligned} \tag{5}$$

이므로 Λ에 대한 상대효율은

$$\begin{aligned} REF(\Lambda_s, \Lambda) &= \frac{MSE(\Lambda)}{MSE(\Lambda_s)} \\ &= 2[n(1-p)^2(e^{-2\mu_0} - 1)^2 + 2e^{-2\mu_0}]^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

이다.

3. 결론

식 (4)와 (6)에서 $p=1$이면 $RB(\Lambda_s)=0$이고 $REF(\Lambda_s, \Lambda) = e^{2\mu_0} > 1$이므로 제안된 축소추정량 Λ_s가 Λ보다 평균제곱오차 면에서 항상 더 좋다는 것을 알 수 있고, 식 (4)와 (6)에서 $RB(\Lambda_s)$는 p와 μ_0에만 관계가 있고 $REF(\Lambda_s, \Lambda)$는 n와 p 및 μ_0에만 관계가 있으므로 이들 값이 변할 때 $RB(\Lambda_s)$와 $REF(\Lambda_s, \Lambda)$의 값을 계산하면 다음의 <표 1>과 <표 2>와 같다.

<표 1> 상대편향모수 $RB(\Lambda_s)$

μ_0 \ p	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
2	-0.69173	-0.34587	0	0.34587	0.69173
4	-0.78535	-0.39267	0	0.39267	0.78535
6	-0.79802	-0.39901	0	0.39901	0.79802
8	-0.79973	-0.39987	0	0.39987	0.79973

<표 2> 상대효율 $REF(\Lambda_s, \Lambda)$

μ_0	n \ p	0.2	0.6	1.0	1.4	1.8
2	5	0.64093	2.47649	54.59815	2.47649	0.64093
	10	0.32236	1.26698	54.59815	1.26698	0.32236
	15	0.21533	0.85124	54.59815	0.85124	0.21533
	20	0.16165	0.64093	54.59815	0.64093	0.16165
4	5	0.62529	2.49958	2980.95799	2.49958	0.62529
	10	0.31268	1.25031	2980.95799	1.25031	0.31268
	15	0.20846	0.83366	2980.95799	0.83366	0.20846
	20	0.15635	0.62529	2980.95799	0.62529	0.15635
6	5	0.62501	2.49999	162754.79142	2.49999	0.62501
	10	0.31250	1.25001	162754.79142	1.25001	0.31250
	15	0.20834	0.83334	162754.79142	0.83334	0.20834
	20	0.15625	0.62501	162754.79142	0.62501	0.15625
8	5	0.62500	2.50000	886110.52051	2.50000	0.62500
	10	0.31250	1.25000	886110.52051	1.25000	0.31250
	15	0.20833	0.83333	886110.52051	0.83333	0.20833
	20	0.15625	0.62500	886110.52051	0.62500	0.15625

<표 1>과 <표 2>에서 다음과 같은 결과를 얻었다.

① 모든 μ_0에 대하여 p가 증가하면 $RB(\Lambda_s)$가 증가한다.

② 모든 μ_0에 대하여 $p > 1$이면 $RB(\Lambda_s) > 0$이고, $p = 1$이면 $RB(\Lambda_s) = 0$이며, $p < 1$이면 $RB(\Lambda_s) < 0$이다.

③ 주어진 n에 대하여 $REF(\Lambda_s, \Lambda)$는 p가 1까지 증가할 때는 증가하여 $p = 1$ 에서 최대값을 가지다가 p가 1보다 큰 값으로 증가할 때는 감소한다.

④ 1이 아닌 주어진 p에 대하여 n이 증가하면 $REF(\Lambda_s, \Lambda)$는 감소한다.

⑤ μ_0의 모든 값에 대하여 $REF(\Lambda_s, \Lambda)$ 위의 ①과 ②를 만족한다.

따라서 주어진 축소추정량은 $0.6 \leqq p \leqq 1.4$와 $n \leqq 15$에 대해서는 UMVUE보다 더 좋다는 것을 보였다.

참고문헌

1. Chhikkara, R.S. and Folks, J.L.(1974), Estimation of inverse Gaussian distribution function, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 69, 250-254.
2. Chhikkara, R.S. and Folks, J.L.(1975). Statistical distribution related to the inverse Gaussian, *Communications in Statistics-Theory and Method,* Vol. 4, 1081-1091.
3. Chhikkara, R.S. and Folks, J.L.(1977). The inverse Gaussian distribution as a life time model, *Technometrics*, Vol 19, 461-468.
4. Khatri, C.G.(1962). A characterization of the inverse Gaussian distribution. *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 33, 800-803.
5. Schuster, J.(1968). On the inverse Gaussian distribution, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 63, 1514-1516.
6. Thompson, J.R.(1968). Some shrinkage techniques for estimation of the mean, *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 63, 113-122.
7. Tweedie, M.C.K.(1957). Statistical properties of inverse Gaussian distributions Ⅰ, *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 28, 362-377.
8. Wasan, M.T. and Roy, L.K.(1967). Tables of inverse Gaussian probabilities (Abstract), *Annals of Mathematical Statistics,* Vol. 38, 299.

[2006년 6월 접수, 2006년 8월 채택]