Journal of the Korean
Data & Information Science Society
2006, Vol. 17, No. 3, pp. 707 ~ 716

Testing the Existence of a Discontinuity Point in the Variance Function[1)]

Jib Huh[2)]

Abstract

When the regression function is discontinuous at a point, the variance function is usually discontinuous at the point. In this case, we had better propose a test for the existence of a discontinuity point with the regression function rather than the variance function. In this paper we consider that the variance function only has a discontinuity point. We propose a nonparametric test for the existence of a discontinuity point with the second moment function since the variance function and the second moment function have the same location and jump size of the discontinuity point. The proposed method is based on the asymptotic distribution of the estimated jump size.

Keywords : Asymptotic distribution, Jump size, Kernel function, Uniform consistency

1. 서론

분산함수는 회귀모형에서 회귀함수(regression function)/평균함수(mean function)와 더불어 중요한 추정 대상이다. 그 이유는 커널형 함수 추정에서 평활량을 결정하는 띠폭의 선택(bandwidth selection), 가중최소제곱추정(weighted least square estimation), 회귀함수에 대한 신뢰구간(confidence interval) 혹은 예측구간(prediction interval) 추정, 품질관리(quality control) 등에서 분산함수는 중요한 역할을 하고 있기 때문이다. 이러한 관심의 대상인 회귀함수와 분산함수가 여러 가지 요인에 의해 불연속점(discontinuity point)을 가질 수가 있다. 이러한 불연속점을 고려하지 않고 회귀함수와 분산함수를 커널형으로 추정하는 경우 불연속점 주위에서 큰 편의(bias)를 제공하게 되어 이론적인 면에서 대역적(global)으로 일치추정량(consistent estimator)이 되지 않으며 실제 구현에서도 추정된 함수가 불연속이 아니라 연속이 되는 오류를 범하

1) 본 연구는 2005학년도 덕성여자대학교 연구비지원으로 이루어졌음.
2) 서울특별시 도봉구 쌍문동 419번지 덕성여자대학교 정보통계학전공 조교수
E-mail : jhuh@duksung.ac.kr

게 된다.

이러한 분산함수가 미지의 한 점에서 불연속점을 가질 때 그 불연속점의 위치(location)와 점프의 크기(jump size)에 대한 비모수적 추정법의 연구는 Delgado and Hidalgo (2000)에 의해 연구되었고, Perron (2001)은 Delgado and Hidalgo의 분산함수의 불연속점의 비모수적 추정을 개선하여 연구하였고 또한 점프의 크기에 대한 추정량도 제안하였다. 시계열 모형에서 Chen, Choi and Zhou (2004)는 최소제곱법으로 불연속점의 추정법을 제시한 바 있다. Kang and Huh (2006)는 Perron의 추정량이 가지는 수렴속도를 개선할 수 있는 추정량을 제시하였으며 이러한 분산함수의 불연속점의 추정은 잔차제곱(squared residual)들을 이용하고 있다.

한편, 분산함수의 불연속은 회귀함수에 기인한 것일 수도 있으며 회귀함수가 연속이고 분산함수 자체의 불연속에 기인 할 수도 있다. 전자의 경우 한 점에서 두 함수 모두 불연속이므로 분산함수의 불연속점의 위치추정량은 회귀함수의 불연속점의 위치추정량으로 사용하는 것이 타당하고 후자의 경우는 회귀함수가 연속이므로 분산함수의 불연속점의 위치는 이차적률함수(second moment function)의 불연속점의 추정량을 사용하는 것이 이론적으로나 실용적으로나 편리하다는 것을 Huh (2005)에 의해 연구되어졌다. 즉, 기존 연구들에서 이루어진 분산함수의 불연속점의 추정은 잔차제곱들의 커널추정량으로 제시되었기에 잔차제곱들을 구하기 위한 회귀함수의 추정이 선행되어야하는 번거러움이 있으며 그로 인해 불연속점의 추정의 정도(precision)가 떨어지는 현상이 생길 수 있으나, 이차적률함수의 불연속점의 추정은 반응변수의 표본의 제곱들을 이용하여 계산되어짐으로 회귀함수를 우선적으로 추정하지 않아도 되는 용이성이 있다.

이 논문에서는 Huh (2005)의 연구의 연장선으로 분산함수의 불연속점의 존재 유무의 가설검정법을 제안하고자 한다. Huh의 이차적률함수의 점프의 크기의 커널형 추정량을 검정통계량으로 사용하는 방법으로 이 추정량의 점근분포를 이용하여 분산함수의 불연속점의 존재 유무에 대한 가설검정 방법을 제시하고자 한다.

어떤 함수에 대한 불연속점의 존재 유무의 가설검정의 연구들을 살펴보면 회귀함수가 불연속점을 가지는지의 유무에 대한 가설검정은 Müller (1992)와 Grégorie and Hamrouni (2004)에 의해 소개되었고, 확률밀도함수(probability density function)에 대한 불연속점의 존재 유무의 가설검정은 Huh (2002)에 의해 이루어졌다. 이러한 가설검정의 방법은 일반적인 가설검정 방법처럼 불연속점의 점프의 크기 추정량의 점근분포에 내포되어 있는 장애모수(nuisance parameter)의 일치추정량을 이용하여 검정통계량을 제시한 것이다.

다음 절에서는 Huh (2005)에 의해 연구된 불연속점의 커널추정량을 소개하고 점프의 크기 추정량의 점근분포과 점근분포에 내포되어 있는 장애모수의 커널추정량의 균일 일치성(uniform consistency)을 규명한 후 가설검정법을 소개할 것이다. 3절에서는 2절에서 소개된 불연속점의 존재 유무의 가설검정법에 대한 모의실험 모형의 결과를 제시할 것이다.

2. 점프의 크기 추정량의 점근성질과 검정법

표본 $\{(X_i, Y_i) : i = 1, \cdots, n\}$은 확률벡터 (X, Y)로부터의 표본이라 하고 $f_X(x)$를 토대(support)가 $[0, 1]$인 X의 확률밀도함수라 하자. 이때, 회귀모형은 다음과 같이

$$Y_i = m(X_i) + v^{1/2}(X_i)\epsilon_i,\ i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

제시된다. 여기서 $m(x) = E(Y|X = x)$는 회귀함수이고 $v(x) = Var(Y|X = x)$는 분산함수이다. 오차항 ϵ_i는 $X_1, \cdots, X_n$과 독립이며 평균과 분산은 각각 0과 1이다.

앞 절에서 언급한 것처럼, 분산함수의 한 점에서의 불연속은 회귀함수에 기인한 것일 수도 있으며 회귀함수는 연속이고 분산함수 자체가 불연속일 수도 있다. 전자는 회귀함수와 분산함수가 모두 같은 한 점에서 불연속이므로 분산함수의 불연속점의 위치추정량은 회귀함수의 위치추정량으로 사용하는 것이 편리하다. 이차적률함수를

$$s(x) = E(Y^2|X = x) \tag{2}$$

라 두면 후자의 경우는 회귀함수가 연속이므로 다음의 분산함수

$$v(x) = s(x) - \{m(x)\}^2 \tag{3}$$

에 의하면 분산함수의 한 점에서의 불연속점의 위치는 분산함수 뿐만 아니라 이차적률함수를 이용하여 추정할 수도 있다. 또한 분산함수의 불연속점의 점프의 크기의 추정에서도 회귀함수가 연속인 경우에 식 (3)에 의하면 분산함수와 이차적률함수의 점프의 크기는 같음으로 이차적률함수의 점프의 크기의 추정으로 분산함수의 점프의 크기의 추정이 가능하다. Kang and Huh (2006)는 회귀함수의 커널형 추정량으로 잔차제곱들을 구하고 이를 이용하여 분산함수 v의 불연속점의 위치와 점프의 크기를 추정하였으며, Huh (2005)는 반응변수의 표본들의 제곱으로 식 (2)의 이차적률함수 s를 추정한 후 분산함수의 불연속점의 위치와 크기를 추정하였다.

어떤 함수 g에 대하여 임의의 점 x로 접근할 때 우극한값과 좌극한값을 각각 $g_+(x) = \lim_{y \to x+} g(y)$, $g_+(x) = \lim_{y \to x-} g(y)$라 두면 분산함수와 이차적률함수가 한 점 τ에서 불연속이면 점프의 크기는

$$\Delta = v_+(\tau) - v_-(\tau) = s_+(\tau) - s_-(\tau) \tag{4}$$

가 된다. 불연속점이 존재한다면 $|\Delta| > 0$이고, 그렇지 않다면 $\Delta = 0$이다.

식 (4)의 관계로부터 Huh (2005)는 불연속점의 위치 τ와 점프의 크기 Δ를 추정하기 위하여 한쪽방향커널함수(one-sided kernel function)를 이용하여 추정량들을 제시하였다. 즉, 한쪽방향커널함수를 이용한 오른쪽과 왼쪽 이차적률함수의 커널추정량의 차를 가장 크게 하는 점을 불연속점의 위치 추정량으로 제안하였고, 그 위치추정량에서 오른쪽과 왼쪽 추정량의 차이를 점프의 크기 추정량으로 제안하였다. 즉, 어떤 점 x에서 $s(x)$의 왼쪽과 오른쪽 커널추정량들을 반응변수의 표본들의 제곱을 평활하

여 자연스럽게 각각 다음

$$\hat{s}_{+}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{X_i - x}{h}) Y_i^2 \Big/ \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{X_i - x}{h})$$
$$\hat{s}_{-}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{x - X_i}{h}) Y_i^2 \Big/ \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{x - X_i}{h}),$$

과 같이 제시할 수 있다. 여기서 K는 확률밀도함수로서 토대가 $[0,1]$인 한쪽방향커널함수이고 h는 띠폭이다. 불연속점의 위치 추정량을 제시하기 위하여

$$\widehat{\Delta}(x) = \hat{s}_{+}(x) - \hat{s}_{-}(x)$$

를 임의의 점 x에서의 이차적률함수와 분산함수의 점프의 크기의 추정량이라 정의할 수 있다. 그러므로 다음

$$\hat{\tau} = \inf\left\{z \in Q : |\widehat{\Delta}(z)| = \sup|\widehat{\Delta}(x)|\right\} \tag{5}$$

을 불연속점의 위치 τ의 추정량들로 제안될 수 있다. 여기서 구간 Q는 $Q \subset (0,1)$인 폐구간이며 실제 적용에서는 $[h, 1-h]$가 흔히 쓰인다. 위치 추정량 (5)의 극한분포와 수렴속도에 대한 결과는 Huh (2005)를 참조하기 바란다. 불연속점의 위치 τ에서 점프의 크기 Δ의 추정량들은

$$\widehat{\Delta}(\hat{\tau}) = \hat{s}_{+}(\hat{\tau}) - \hat{s}_{-}(\hat{\tau}) \tag{6}$$

으로 정의할 수 있다. 불연속점이 존재 유무에 대한 귀무가설과 대립가설로는 각각 다음

$$H_0 : \Delta = 0, \quad H_1 : \Delta \neq 0 \tag{7}$$

과 같이 설정하고 가설검정을 위하여 식 (6)을 검정통계량으로 활용할 수 있다. Huh (2005)는 커널함수 K와 띠폭 h의 적절한 조건하에서 점프의 크기 추정량 $\widehat{\Delta}(\hat{\tau})$의 점근분포가 다음

$$\sqrt{nh}\,(\widehat{\Delta}(\hat{\tau}) - \Delta) \xrightarrow{d} N(0, 2\frac{\kappa(\tau)}{f_X(\tau)}\int_0^1 \{K(u)\}^2 du) \tag{8}$$

과 같음을 보였다. 여기서 $\kappa(\tau) = E(Y^4 \mid X = \tau)$는 τ에서의 4차적률(fourth moment)이다.

위 결과에서 점근분포의 분산에 포함되어 있는 장애모수(nuisance parameter)인 $f_X(\tau)$와 $\kappa(\tau)$의 추정량들을 제시함으로써 가설 (7)의 가설검정법을 제시할 수 있다. 먼저, 귀무가설이 참이라면 연속인 확률밀도함수와 4차적률함수를 다음

$$\hat{f}_X(x) = \frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \tag{9}$$

$$\hat{\kappa}(x) = \frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) Y_i^4 \Big/ \frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \tag{10}$$

과 같이 커널형 추정량으로 제시하자. 여기서 L은 확률밀도함수로 토대가 [-1,1]을 가지는 커널함수이고 b는 띠폭이다. 식 (9)는 커널형 확률밀도함수이며 식 (10)은 4차적률함수의 Nadaraya-Watson 커널추정량이다. 아래 Theorem 1은 추정량 (9)과 (10)의 균일 일치성을 보여주고 있으며 이 Theorem이 성립하기 위한 조건들은 다음과 같다.

(A1) κ는 Lipschitz 1차 조건(Lipschitz condition of order 1)을 만족한다.
(A2) f_X는 $\inf_{x\in[0,1]} f_X(x) > 0$를 만족하고 Lipschitz 1차 조건을 만족한다.
(A3) $E(Y^8 \mid X = x) < \infty$ 을 만족한다.
(A4) $n\to\infty$일 때 $b\to 0$, $nb/\log n \to \infty$를 만족한다.
(A5) L은 Lipschitz 1차 조건을 만족한다.

위 조건들에서 어떤 함수 g가 Lipschitz 1차 조건을 만족한다는 것은, 모든 x와 y에 대하여 다음

$$|g(x) - g(y)| \le C_g |x - y|$$

을 만족하는 양의 상수 C_g가 존재한다는 것이다.

Theorem 1. 조건 (A1)-(A5)을 만족하면

$$\sup_{x\in[0,1]} |\hat{f}_X(x) - f_X(x)| = o_P(1) \tag{11}$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |\hat{\kappa}(x) - \kappa(x)| = o_P(1) \tag{12}$$

이 성립한다.

증명 Stute (1982)의 Theorem 1.2의 결과에 의하여 다음

$$\sup_x \left| \frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) - \mu_{L,x} f_X(x) \right| = O_P(\sqrt{\log n/nb} + b) \tag{13}$$

이 성립된다. 여기서

$$\mu_{L,x} = \begin{cases} \int_{-c}^{1} L(u)\,du, & 0 \le x < cb \\ \int_{-1}^{1} L(u)\,du, & cb \le x \le 1 - cb \\ \int_{-1}^{c} L(u)\,du, & 1 - cb < x \le 1 \end{cases} \tag{14}$$

이고 $0 \le c < 1$ 이다. 식 (13)에 의해 (11)의 결과를 얻을 수 있다. 식 (12)에 관하여 알아보기 위해 다음의 관계를 생각하자.

$$
\begin{aligned}
&\sup_x \left| \frac{1}{nb\hat{f}_X(x)} \sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) Y_i^4 - \kappa(x) \right| \\
&\le \sup_x \left| \frac{1}{nb\hat{f}_X(x)} \sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \{ Y_i^4 - \kappa(X_i) \} \right| \\
&+ \sup_x \left| \frac{1}{nb\hat{f}_X(x)} \sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \kappa(X_i) - \kappa(x) \right|.
\end{aligned} \tag{15}
$$

식 (15)의 첫 번째 항에서 $Y_i^4 - \kappa(X_i)$들은 서로독립이고 평균이 0이고 조건 (A3)에 의해 분산이 유한하여 Kang and Huh (2006)의 Lemma 5.1에 의해서 $O_P(\sqrt{\log n / nb})$가 된다. 식 (15)의 두 번째 항에 관해서 알아보자. 먼저, 식 (13)의 결과는 커널 L의 토대에 의존하지 않기에 모든 i에 대하여 다음

$$
\sup_x \left| \frac{1}{\hat{f}_X(x)} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) - \frac{1}{\mu_{L,x} f_X(x)} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \right| = o_P(1) \tag{16}
$$

이 성립한다. 또한, 식 (15)의 두 번째 항은 다음

$$
\begin{aligned}
&\sup_x \left| \frac{1}{nb\hat{f}_X(x)} \sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \kappa(X_i) - E\left\{ \frac{1}{nb\hat{f}_X(x)} \sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \kappa(X_i) \right\} \right| \\
&+ \sup_x \left| E\left\{ \frac{1}{nb\hat{f}_X(x)} \sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \kappa(X_i) \right\} - \kappa(x) \right|
\end{aligned} \tag{17}
$$

에 의해 유계(bounded)된다. 식 (17)의 첫 번째 항은 Kang and Huh의 Lemma 5.1에 의해 $O_P(\sqrt{\log n / nb})$가 되며, 식 (17)의 두 번째 항은 식 (16)과 조건 (A1), (A2)에 의해

$$
\begin{aligned}
&E\left\{ \frac{1}{nb\hat{f}(x)} \sum_{i=1}^{n} L\left(\frac{X_i - x}{b}\right) \kappa(X_i) \right\} - \kappa(x) \\
&= \int \frac{1}{\mu_{L,x} f_X(x)} L(u) \kappa(x + bu) f_X(x + bu) \, du (1 + o(1)) - \kappa(x) \\
&= O(b)
\end{aligned} \tag{18}
$$

이 x에 대해 균일(uniform)하게 성립된다. 여기서 x에 따라 달라지는 적분구간은 $\mu_{L,x}$와 관련된 식 (14)의 각 경우의 적분구간에 해당된다. 따라서, 식 (17)의 첫 번째 항의 결과와 (18)에 의하여 식 (15)의 두 번째 항은 $O_P(\sqrt{\log n / nb} + b)$가 된다. 그러므로 식 (12)의 결론을 얻는다. ∎

위 Theorem 1과 (8)에 의하여 (7)의 귀무가설 $H_0:\Delta=0$ 하에서 다음

$$\sqrt{nh}\frac{\sqrt{\hat{f}(\hat{\tau})}\hat{\Delta}(\hat{\tau})}{\sqrt{2\hat{\kappa}(\hat{\tau})\int_0^1\{K(u)\}^2du}}\overset{d}{\rightarrow}N(0,1) \tag{19}$$

이 성립함을 알 수 있다. 여기서

$$\hat{f}_X(\hat{\tau})=\frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n}L(\frac{X_i-\hat{\tau}}{b})$$
$$\hat{\kappa}(\hat{\tau})=\frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n}L(\frac{X_i-\hat{\tau}}{b})Y_i^4/\frac{1}{nb}\sum_{i=1}^{n}L(\frac{X_i-\hat{\tau}}{b})$$

는 불연속점의 위치추정량 $\hat{\tau}$에서의 확률밀도함수의 커널추정량과 4차적률함수의 커널추정량이다. 따라서, 식 (19)의 왼쪽을 귀무가설 $H_0:\Delta=0$의 검정통계량으로 활용하고 이 검정통계량의 점근분포인 표준정규분포를 이용하여 가설검정을 할 수 있다.

4. 모의실험

이 절에서는 앞 절에서 제안한 가설검정법에 대한 모의실험 결과를 알아 보고자 한다. 모의실험을 위하여 설명변수 X는 절단정규분포(truncated normal distribution)로서 다음

$$f_X(x)=p\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-(x-0.5)^2/2\sigma^2\}\times \mathrm{I}[0\le x\le 1]$$

과 같이 생각하였다. 여기서 I는 표시함수(indicator function)이고 p는 위의 절단정규분포가 확률밀도함수가 되도록 하는 양의 상수이다. 또한 이 모의실험에서 설명변수의 표준편차 σ는 0.15로 설정하였다.

분산함수와 이차적률함수가 하나의 불연속점을 가지는 모형을 아래

$$m(x)=x(2x^2-3x+1),\ v^{1/2}(x)=0.03+\delta\times \mathrm{I}[x\ge 0.5].$$

와 같이 선택하였다. 위 모형을 살펴보면 회귀함수 m은 연속이고 분산함수는 불연속이며 불연속점의 위치는 $\tau=0.5$이고 이 점에서 분산함수와 이차적률함수가 가지는 불연속점의 점프의 크기는 $\Delta=0.06\delta+\delta^2$이다. 검정의 크기(size of a test)과 검정력(power of test)을 조사하기 위하여 다양한 δ를 고려하고 표본의 수는 $n=500$으로 반복은 1000회를 실시하였다. 식 (1)에서 오차의 분포는 $\varepsilon\sim N(0,1)$을 선택하였다.

확률밀도함수와 4차적률함수의 추정량인 식 (9)와 (10)에 사용된 커널 L은 biweight 커널로서 다음

$$L(x) = \frac{15}{16}(1-x^2)^2 \times \mathrm{I}\,[-1 < x < 1] \tag{20}$$

이 선택되었다. 불연속점의 위치추정량을 구하기 위하여 2절에서 언급하였듯이 구간 $Q = [h, 1-h]$으로 선택하였고, 불연속점의 위치를 추정하기 위하여 구간 $[0,1]$을 100등분한 $t_i = i/100,\, i = 1, \cdots, 100$에서 각각 이차적률함수의 오른쪽과 왼쪽 추정량의 차이인 점프의 크기를 구하고 그 절대값을 최대로 하는 점을 불연속점의 위치로 추정하였다. 이때 사용된 한쪽방향커널은 식 (20)의 biweight 커널을 토대가 $[0,1]$이고 확률밀도함수가 될 수 있도록 다음

$$K(x) = \frac{15}{8}(1-x^2)^2 \times \mathrm{I}\,[0 < x < 1]$$

과 같이 선택하였다.

본 연구에 이용된 띠폭은 불연속점의 추정에 이용된 h와 가설검정에서 장애모수의 추정에 필요한 b이다. 아래 <표 1>은 b가 다음과 같이 세가지 값 0.05, 0.10, 0.15에서 귀무가설($\Delta = 0$)이 참일 때 유의수준 $\alpha = 0.05$를 주고 다양한 h의 변화에 따라 검정의 크기를 추정한 결과를 보여주고 있다. 이 결과에서 h가 커짐에 따라 검정의 크기가 커짐을 알 수 있다. 하지만, b=0.05인 경우는 주어진 다양한 h에서도 유의수준보다 추정된 검정의 크기가 항상 큼을 알 수 있고, b가 0.10과 0.15인 경우에는 h가 각각 0.090과 0.075에서 추정된 검정의 크기가 유의수준과 유사함을 보여주고 있지만 b가 0.15인 경우에는 0.10인 경우에 비해 다른 여러 h에서 기각 가능성이 모두 큰 현상을 보이고 있다. 따라서, 검정력을 조사하기 위하여 장애모수 추정에 필요한 띠폭 b는 0.10으로 선택하였다.

<표 1> $\Delta = 0\,(\delta = 0)$이고 $\alpha = 0.05$인 경우 띠폭 b와 h의 변화에 따른 검정의 크기의 추정치.

h \ b	0.05	0.10	0.15
0.070	0.067	0.025	0.041
0.075	0.067	0.028	0.049
0.080	0.065	0.033	0.052
0.085	0.073	0.040	0.054
0.090	0.079	0.054	0.071
0.095	0.085	0.055	0.068
0.100	0.102	0.078	0.091
0.105	0.119	0.081	0.094
0.110	0.155	0.122	0.138
0.115	0.177	0.131	0.152
0.120	0.229	0.200	0.227

아래의 <표 2>는 <표 1>의 결과로부터 $b=0.05$를 선택한 후 다양한 점프의 크기 δ와 띠폭 h에 따른 검정의 크기와 검정력의 추정치를 보여주고 있다. 이 결과로부터 불연속점의 추정을 위한 띠폭 h의 변화에 따라 검정력의 차이가 큼을 알 수 있다. 이러한 띠폭의 선택에 대한 연구가 필요하다고 생각한다.

<표 2> b=0.10이며 $\alpha=0.05$인 경우 h와 δ의 변화에 따른 검정의 크기와 검정력의 추정치.

h \ δ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40
0.070	0.025	0.213	0.302	0.348	0.372
0.075	0.028	0.208	0.316	0.360	0.382
0.080	0.033	0.228	0.335	0.383	0.398
0.085	0.040	0.235	0.359	0.403	0.418
0.090	0.054	0.258	0.393	0.431	0.454
0.095	0.055	0.266	0.402	0.450	0.473
0.100	0.078	0.276	0.429	0.484	0.507
0.105	0.081	0.288	0.445	0.502	0.531
0.110	0.122	0.313	0.480	0.548	0.559
0.115	0.131	0.323	0.493	0.559	0.584
0.120	0.200	0.364	0.539	0.609	0.622

5. 요약

분산함수는 회귀함수와 더불어 회귀모형의 연구에 매우 중요한 함수이며 이 함수가 불연속일 때의 연구는 Delgado and Hidalgo (2000)와 Perron (2001)은 시계열모형에서는 비모수적 추정법에 의해 분산함수의 추정을 연구하였으며 Kang and Huh (2006)은 Perron의 추정법을 회귀모형에 적용하여 분산함수의 불연속점의 추정에 대하여 연구하였고, Huh (2005)는 Kang and Huh의 잔차제곱들을 이용한 분산함수의 불연속점의 추정 대신 이차적률함수를 이용하여 분산함수의 불연속점을 추정하였다. 이는 Kang and Huh의 연구에서 잔차제곱들을 구하기 위하여 회귀함수의 추정이 우선되어야 하기에 전체적인 계산량이 늘어나게 되고, 늘어난 만큼 불연속점 추정의 정도가 떨어지게 됨으로 반응변수의 표본의 제곱을 이용하여 이차적률함수의 추정으로 불연속점을 추정하는 것이 더 용이하기 때문이다. 이러한 연구를 바탕으로 본 연구에서는 Huh의 점프의 크기 추정량의 점근분포를 이용하여 불연속점의 존재 유무에 대한 가설검정법을 제안하였다. 즉, 점프의 크기 추정량의 귀무가설 하의 점근분포가 가지고 있는 장애모수인 불연속점의 위치에서 확률밀도함수와 4차적률함수를 비모수적 방법으로 추정하는 방법을 제안하고 이들의 균일 일치성을 보여 가설검정법을 제안하

였다. 불연속점의 추정에 앞서 불연속점의 존재 여부의 가설검정이 우선되어야 하기에 다른 통계적 함수에 대한 불연속점의 연구에서도 이러한 본 논문에서 연구한 방법으로 불연속점의 존재 유무에 대한 가설검정법을 제안 할 수 있을 것이다.

참고문헌

1. Chen, G., Choi, Y. K. and Zhou, Y. (2004). Nonparametric estimation of structural change points in volatility models for time series, *J. Econometrics*, forthcoming.
2. Delgado, M. A. and Hidalgo, J. (2000). Nonparametric inference on structural breaks, *J. Econometrics*, 96, 113-144.
3. Grégoire, G. and Hamrouni, Z. (2002). Change point estimation by local linear smoothing, *J. Multivariate. Analy.*, 83, 56-83.
4. Huh J. (2002). Nonparametric discontinuity point estimation in density or density derivatives, *J. Korean Statist. Soc.,* 31, 261-276.
5. Huh J. (2005). Nonparametric detection of a discontinuity point in the variance function with the second moment function, *J. Korean Data & Inform. Scien. Soc.*, 16, 591-601.
6. Kang K. C. and Huh J. (2006). Nonparametric estimation of the variance function with a change point, *J. Korean Statist. Soc.,* 35, 1-24.
7. Müller, H G. (1992). Change-points in nonparametric regression analysis, *Ann. Statist.*, 20, 737-761.
8. Perron, B. (2001). Jumps in the volatility of financial markets, *Mimeo*, available at http://mapageweb.umontreal.ca/perrob.
9. Stute, W. (1982). A law of the logarithm for kernel density estimators, *Ann. Probab.,* 10, 414-422.

[2006년 5월 접수, 2006년 7월 채택]