

Approximation to GPH Distributions and Its Application¹⁾

Jang-Hyun Baek²⁾

Abstract

In this paper we consider GPH distribution that is defined as a distribution for sum of random number of random variables following exponential distribution. We establish approximation process of general distributions to GPH distributions and offer numerical results for various cases to show the accuracy of the approximation. We also propose analysis method of delay distribution of queueing systems using approximation to GPH distributions and offer numerical results for various queueing systems to show applicability of GPH approximation.

Keywords : GPH approximation, GPH distribution, GPH/GPH/1

1. 머리말

유한상태의 연속시간 마코프 체인이 흡수상태(absorbing state)에 빠질 때까지의 시간에 대한 분포로 정의되는 PH(PHase-type) 분포는 Neuts(1981)에 의해 제안된 이래 확률 모형의 계산적인 접근 방법에 많이 사용되어 왔다(Kim(2005)). 그러나 실제 적용에 있어서는 PH 분포를 표현하는 파라미터의 수가 너무 많아 파라미터 추정에 어려움이 따르고, 또한 정확한 근사화를 위해서는 마코프 체인의 상태 공간이 커야 하므로 계산상의 제약이 따른다. 또한 라플라스 변환이 유리함수가 아닌 분포는 PH 분포로 표현할 수 없어서 일반적인 근사화 방법으로 이용할 수가 없다. 이러한 단점을 극복하는 한 방법으로 Shanthikumar(1985)는 PH 분포를 일반화시킨 GPH(Generalized PHase type) 분포를 제안하였다.

지수분포를 따르는 무작위 갯수의 단위 확률변수들의 합에 대한 분포로 정의되는

1) This work was supported by the Korea Research Foundation Grant funded by the Korean Government (MOEHRD) (R05-2004-000-11569-0). This work was also supported by Grant No.R01-2006-000-10668-0 from the Basic Research Program of the Korea Science & Engineering Foundation.

2) 561-756 전북 전주시 덕진동 1가 664-14 전북대학교 산업정보시스템공학과 교수
E-mail : jbaek@chonbuk.ac.kr

GPH 분포는, PH 분포에 비해 일반적이며 표현에 있어서도 훨씬 간편하다는 잇점을 가지고 있다. 또한 GPH 분포는 연속함수 계산을 이산함수 계산으로 변환시켜줌으로써, 어려운 계산을 가능하게 해줄 수 있다. GPH 분포의 이러한 성질은 대기 시스템을 비롯한 여러 분야의 확률적 분석에 폭넓게 응용될 잠재성을 가지고 있으나 아직까지 충분히 응용되지 못하고 있고 근사화의 효율성 및 정확성에 대한 연구도 미흡한 실정이다. 본 연구에서는 우선 R^+ 에서 정의된 일반적인 분포를 GPH 분포로 근사화하는 과정을 확립하고 GPH 분포의 확률적 성질 및 계산상의 성질을 대기 시스템 분석에 효과적으로 이용하는 방법을 제시하고자 한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 2장에서는 GPH 분포의 정의와 PH 분포와의 관계 그리고 GPH 분포의 성질에 대하여 기술하고 3장에서는 일반 분포를 GPH 분포로 근사화하는 방법과 이에 대한 다양한 수리적 결과를 제시한다. 4장에서는 GPH 분포를 이용하여 대기 시스템의 지연시간 분포를 분석하는 방법과 수리적 결과를 제시하고 5장에서 결론 및 추후 연구방향을 기술한다.

2. GPH 분포

2.1 GPH 분포의 정의 및 PH 분포와의 관계

$(E_n)_0^\infty$ 을 평균이 $1/\lambda$ 인 지수분포를 따르는 확률변수열이라 하고(단, $E_0=0$, $w, p, 1$), L 을 분포함수 g 를 따르는 이산적인 확률변수라고 할 때,

$$X = \sum_{n=0}^L E_n \quad (1)$$

의 분포함수 F 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!}, \quad x > 0 \quad (2)$$

여기서,

$$G(n) = \sum_{k=0}^n g(k), \quad n=0, 1, 2, \dots,$$

은 L 의 누적 확률분포(cumulative probability distribution)이다. (2)로 주어진 확률분포 F_X 를 GPH 분포라 하며 $GPH(\lambda, g)$ 로 표시한다(Shanthikumar(1985)).

만약 $g(0) > 0$ 이면, 분포함수 F_X 는 원점에서 $g(0)$ 의 점프(jump) 값을 갖는다. 그 밖의 다른 모든 확률값들은 다음 확률밀도함수에 따라 $(0, \infty)$ 에 분포한다.

$$f_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n+1) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!} \lambda, \quad x > 0. \quad (3)$$

X의 생존 함수(survival function) \bar{F}_X 는, 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{F}_X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{G}(n) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!}, \quad x > 0$$

단, $\bar{G}(n) = 1 - G(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$

위에서 F_X 를 (λ, g) 쌍으로 나타내고 있는데, 하나의 GPH 분포를 표시하는 (λ, g) 쌍은 유일하지 않다. 다음의 정리는 어떠한 조건하에서 (λ, g) 과 (λ', g') 이 동등(즉, $GPH(\lambda, g) \equiv GPH(\lambda', g')$)한지를 보여준다.

정리 1. $GPH(\lambda, g) \equiv GPH(\lambda', g')$ 이기 위한 필요충분조건은, $g'(0) = g(0)$ 이고

$$g'(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-\rho)^{n-k} g(k+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{단 } \rho = \frac{\lambda'}{\lambda}$$

증명. $[\frac{u}{1-u}]^{n+1} = \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} u^{m+1}$ 을 이용하면, $\bar{G}[\frac{\lambda'}{\lambda+\zeta}] = \bar{G}[\frac{\lambda}{\lambda+\zeta}]$ 를 보일 수 있으며 따라서 위 정리가 증명된다. ■

$GPH(\lambda, g)$ 에 대하여 $GPH(\lambda, g) \equiv GPH(\lambda', g')$ 를 만족하는 (λ', g') 은 무수히 많
이 존재할 수 있다. 그러나 $(g(n))_0^{\infty}$ 에 대한 확률적 해석은, $0 < \rho \leq 1$ 일 경우에만 의
미가 있다. $\rho > 1$ 은 $(g(n))_0^{\infty}$ 의 nonnegativity를 위반하기 때문이다.

GPH 분포는 PH 분포와 밀접한 관계가 있다. Neuts의 PH 분포는, 흡수 상태
(absorbing state)를 가지는 유한 상태공간(finite state) 연속시간 마코프 체인에서 흡
수 상태에 도달할 때까지 경과되는 시간의 분포로 정의된다(Neuts(1981)). PH 분포는
초기 상태(initial state)를 나타내는 벡터 α 와 infinitesimal generator A 로써 나타내
어지고, 이것의 쌍인 (α, A) 로 표시된다. 일반적으로, 임의의 분포를 α 와 A 를 이용
하여 PH 분포로 나타낼 수 있다. 즉, PH 분포는 다음과 같은 분포함수를 가진다.

$$F(t) = 1 - \alpha \exp(At) e, \tag{4}$$

여기서, $e = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^t$

그런데, 이 PH 분포는 uniformization(Ross(2003))을 이용하여 GPH 분포의 형태로
변형이 가능하다. 즉, 모든 PH 분포는 uniformization에 의해 GPH 분포로 변환될 수
있으므로 GPH 분포가 보다 일반적인 분포라 할 수 있다. 또한 (2)와 (4)의 표현을 비
교하면, (2)가 훨씬 간단하므로 GPH 분포가 PH 분포보다 편리하게 사용될 수 있다.

2.2 GPH 분포의 성질

GPH 분포는 뒤에서 설명되겠지만, 연속 함수의 연산을 이산 함수의 연산으로 변환시켜 주기 때문에 근사적 접근법에 편리하게 응용될 수 있다. GPH 분포의 다음과 같은 성질은 GPH 분포와 관련된 계산을 편리하게 해 주고, 또한 여러 응용을 가능하게 해 준다(Shanthikumar(1985)).

정리 2. 독립적인 GPH 분포의 합은 GPH 분포를 이룬다.

증명. X_1 을 $\text{GPH}(\lambda, g_1)$, X_2 를 $\text{GPH}(\lambda, g_2)$ 분포를 따르는 확률변수라고 하고, 확률변수 $L_1 \sim g_1(n)$, $L_2 \sim g_2(n)$ 을 정의하자. $X = X_1 + X_2$ 라 하면, $X_1 = \sum_{n=0}^{L_1} E_n$ 이고, $X_2 = \sum_{n=0}^{L_2} E_n$ 이기 때문에, 통계적으로 $X = \sum_{n=0}^{L_1+L_2} E_n$ 가 된다. 결국, X 는 $\text{GPH}(\lambda, g(n))$ 분포를 따르게 된다. (단, $g(n) = (g_1 * g_2)(n)$, $(g_1 * g_2)(n) = \sum_{k=0}^n g_1(k)g_2(n-k)$) ■

여기서 보듯이 연속함수의 변수인 X_1 과 X_2 을 convolution할 때, 연속 함수 적분식이 이산 함수의 합의 식으로 바뀌게 된다. 이 성질이 GPH 분포의 다양한 응용을 가능하게 하는 가장 중요한 성질이 된다.

그런데, 이와 같은 연산이 가능하기 위해서는, 위 증명과정에서 보듯이 두 GPH 분포의 λ 값이 같아야 한다. 하나의 GPH 분포는 λ 값에 따라 많은 표현 쌍들이 존재하는데, λ 를 하나로 통일시켜야만 위의 성질에 의한 계산상의 편의성을 가지게 된다. 물론 앞서의 정리에 의해 λ 를 임의로 통일시켜도 분포의 일반성은 계속 유지된다.

정리 3. X_1 과 X_2 는 각각 $\text{GPH}(\lambda, g_1)$, 와 $\text{GPH}(\lambda, g_2)$ 분포를 따르는 확률변수라고 하자. 이 때, $X = X_1 - X_2$ 는 (λ, g) 의 BPH(Bilateral PHase Type) 확률변수가 된다. 단, $(g(n))_{-\infty}^{\infty}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$g(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g_1(k+n)g_2^*(k), & n=1, 2, \dots \\ g_1(0)g_2(0), & n=0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} g_2(k-n)g_1^*(k), & n=-1, -2, \dots \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } g_i^*(n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k+1} g_i(k+1), \\ g_i^*(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} g_i(k+1) + g_i(0) \end{aligned} \tag{6}$$

정리 4. X_1 과 X_2 는 각각 $\text{GPH}(\lambda, g_1)$, $\text{GPH}(\lambda, g_2)$ 분포를 따르는 확률변수라고 하자. 그러면, $X = \max(X_1 - X_2, 0)$ 는 $\text{GPH}(\lambda, g)$ 분포를 따르는 확률변수가 된다.

$$\text{단, } g(n) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g_1(k) \sum_{r=k}^{\infty} g_2^*(r) & n=0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} g_1(k+n) g_2^*(k) & n=1,2,\dots \end{cases} \tag{7}$$

g_2^* 는 (6)과 같이 정의된다.

위 정리에서 보면, g 는 g_1 과 g_2^* 의 negative convolution 결과임을 알 수 있다.

위의 (5)와 (7)은 대기 시스템의 대기시간 계산에 있어서, GPH 분포의 응용을 가능하게 하는 의미있는 성질이다(Shanthikumar(1985)). 이러한 성질을 이용하여 M/GPH/1 큐와 GPH/GPH/1 큐에서의 지연시간 분포에 대한 결과를 GPH 형태로 구할 수 있다.

3. GPH 분포 근사화

3.1 일반 분포의 GPH 근사화

GPH 분포와 관련하여 중요한 성질 중 하나는 일반 함수를 GPH 분포로 근사화할 수 있다는 것이다. 이 성질을 이용하면 다루기 어려운 일반 분포를 GPH 분포로 변환하여 원하는 계산 결과를 얻을 수가 있다. 다음 정리에 의하면 $[0, \infty)$ 에서 정의된 임의의 분포를 GPH 분포로 근사화할 수 있다.

정리 5. F 를 (Shanthikumar(1985)) $[0, \infty]$ 에서 정의된 유계함수(Bounded function)이라 할 때,

$$F_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \tag{8}$$

라고 정의하면,

$$F_\lambda(t) \rightarrow F(t) \text{ as } \lambda \rightarrow \infty.$$

증명. $F_\lambda(t)$ 는 $F_\lambda(t) = E[F(\frac{N}{\lambda})]$ (단, N 은 평균이 λt 인 포아송 분포를 따른다.)

으로 다시 표현될 수 있다. 그런데, $\frac{N}{\lambda} \rightarrow t$ 이므로 정리가 증명된다. ■

3.2 데이터를 이용한 GPH 근사화

실제 환경에서는 구체적인 분포함수에 대한 정보가 주어지기보다는 측정된 데이터만이 주어지는 경우가 많다. 이와 같이 데이터만 주어지는 경우에도 원래의 분포를 데이터로 추정할 수 있으므로 GPH 분포로의 근사화가 가능하다.

알려지지 않은 분포 $F(x)$ 로부터 표본의 크기가 m 인 데이터 $U_i (i=1,2,\dots,m)$ 를 얻었다고 하자. 이 때, F 의 분포에 대한 경험적인 추정을 다음과 같이 할 수 있다.

$$F_m(x) = \frac{\sum_{i=1}^m I(U_i \leq x)}{m} \quad (9)$$

$$\text{여기서, } I(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } A \text{ is true} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

강대수의 법칙(strong law of large number)을 이용하면

$$F_m(x) \rightarrow F(x) \quad w.p. 1 \quad \text{as } m \rightarrow \infty$$

이 성립하므로 데이터의 수가 충분히 클 경우 분포를 추정할 수 있다.

그런데, $F_m(x)$ 는 x 에 대해 연속이 아니다. 이것을 보정하기 위해, (8)을 이용하면, $F_{m,\lambda}(x)$ 를

$$F_{m,\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_m\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^n}{n!} \quad (10)$$

로 쓸 수 있고, 정리 5에 의해

$$F_{m,\lambda}(x) \rightarrow F_m(x) \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty \quad \text{for fixed } m. \quad (11)$$

의 결과가 나온다. 그러면, 이 $F_m(x)$ 는 x 에 대해 연속이 된다.

이상의 과정에 의하여 임의의 일반 분포를 GPH 분포로 근사화할 수가 있다. 만약 구체적인 분포함수가 주어지면, (8)에서 F 가 주어지는 경우이므로 정리 5의 근사화 방법을 이용하여 GPH 분포를 구한다. 만약, F 가 구체적으로 주어지지 않는 경우라도 데이터가 주어지기만 하면 (9), (10)을 이용하여 GPH 분포로 근사화시킬 수 있다.

3.3 GPH 분포로의 효과적인 근사화 방법

식 (8), (10)을 보면 무한 개의 항을 더하는 경우가 발생한다. 실제 계산에서는 오차의 한계 ε 을 설정하여 더하는 항의 갯수를 구하고, 그 합을 구한 후 truncation시켜서 원하는 값을 구한다.

오차의 한계가 ε 이라 하자. 우선, $\sum_{n=0}^K \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} > 1 - \varepsilon$ 인 K 를 계산한다. 그러면,

$$\sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} < \varepsilon \text{ 이 되고, 다음 보조정리에 의하여 } \sum_{n=K+1}^{\infty} F\left(\frac{\lambda}{n}\right) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} < \varepsilon \text{ 이}$$

된다.

보조정리 1. 포아송 분포에 대하여 오차 한계를 만족하는 항의 수가 K 이면, K 항까지의 GPH 분포 근사화 식도 오차의 한계를 만족한다.

증명. 오차의 한계를 ε 이라 하자. 분포함수 $F(x)$ 는

$$F(x) \leq 1, \forall x$$

가 성립하므로

$$\sum_{n=K+1}^{\infty} F\left(\frac{\lambda}{n}\right) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \leq \sum_{n=K+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} < \varepsilon$$

이 성립한다. ■

따라서 식 (8) 대신에

$$F_{\lambda}(t) = \sum_{n=0}^K F\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{12}$$

을 계산하면 된다. 그런데 실제로 포아송 분포에 대하여 오차 한계를 만족하는 항의 수 K 를 구하는 경우, 포아송 분포에 포함되어 있는 factorial 계산 때문에 정확한 계산이 어렵다. 포아송 분포에 대하여 오차 한계를 만족하는 항의 수 K 를 구하는 과정을 효과적으로 수행하기 위하여 다음 보조정리를 이용한다.

보조정리 2. $\varepsilon = 10^{-6}$ 이면 $K \approx \lambda t + 4.7\sqrt{\lambda t}$ 이면 된다.

증명. 주어진 포아송 분포의 파라미터는 λt 이다. 일반적으로 λ 가 충분히 크므로 주어진 포아송 분포를 표준정규 분포로 근사화시킬 수 있다. 표준정규 분포의 분포함수를 $N(x)$ 라 하면 $N(x) = 1 - 10^{-6}$ 으로부터 $x = 4.7$ 이 구해진다. 따라서 포아송 분포의 해당되는 값은 $\lambda t + 4.7\sqrt{\lambda t}$ 이 된다. ■

보조정리 3. $\varepsilon=10^{-5}$ 일 경우 $K \approx \lambda t + 4.5\sqrt{\lambda t}$, $\varepsilon=10^{-4}$ 일 경우 $K \approx \lambda t + 3.8\sqrt{\lambda t}$, $\varepsilon=10^{-3}$ 일 경우 $K \approx \lambda t + 3.1\sqrt{\lambda t}$ 이면 된다.

그런데 위의 보조정리에 의해서 오차의 한계를 만족하는 신뢰구간은

$$(\lambda t - c\sqrt{\lambda t}, \lambda t + c\sqrt{\lambda t}) \quad \text{단, } c \text{은 주어진 } \varepsilon \text{을 만족시키는 상수}$$

로 주어지므로 식 (12) 대신에

$$F_{\lambda}(t) = \sum_{n=K_0}^K F\left(\frac{n}{\lambda}\right) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{단, } K_0 &= \lambda t - c\sqrt{\lambda t} \\ K &= \lambda t + c\sqrt{\lambda t} \end{aligned}$$

을 구하면 오차의 한계를 만족한다.

위 식을 이용하면 경우에 따라서는 많은 계산량을 줄일 수 있다. 예를 들어 $\varepsilon=10^{-6}$, $\lambda=100$, $t=100$ 인 경우, 식 (12)를 이용하면 0부터 $K=10470$ 까지 계산해야 하나 위 식을 이용하면 $K_0=9530$ 부터 $K=10470$ 까지 계산하게 되어 결국 940개의 항만 더하면 되므로 9530개의 항을 덜 계산해도 된다. t 가 클수록 이러한 계산량의 감소가 현저하다.

또한 위 식을 계산함에 있어 $n=\lambda t$ 일 때의

$$P_n = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^{\lambda t}}{(\lambda t)!} \quad (14)$$

을 먼저 계산하고 관계식

$$P_{n+1} = \frac{\lambda t}{n+1} P_n \quad (15)$$

$$P_{n-1} = \frac{n}{\lambda t} P_n \quad (16)$$

을 이용하여 (15)로부터

$$P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_K$$

을 차례로 구하고 (16)으로부터

$$P_{n-1}, P_{n-2}, \dots, P_{K_0}$$

을 차례로 구하면 계산이 용이하다.

최종적으로 계산된 값을 이용하여 truncation을 시켜주면, 오차 한계 ε 을 만족하는 GPH 분포로의 근사화가 수행된다.

3.4 GPH 분포 근사화에 대한 수리적 결과

본 절에서는 위의 2가지 근사화의 정확성을 실험해보자. 임의의 함수를 GPH 함수의 형태로 바꾸어 보고, 그 결과를 원래의 함수와 비교해 보면 다음과 같다.

3.4.1 알려진 분포로부터의 근사화

근사화의 정확도를 실험하기 위하여 다음 3가지 분포를 선택한다.

- (1) $E2(\mu=2)$
이 경우 분포함수는 다음과 같다.

$$F(x) = 1 - e^{-4t} - 4te^{-4t}$$

- (2) $HE(\lambda_1=1, \lambda_2=2, p=0.6)$
이 경우 분포함수는 다음과 같다.

$$F(x) = 0.6(1 - e^{-t}) + 0.4(1 - e^{-2t})$$

- (3) 다음과 같은 확률밀도함수를 갖는 분포를 고려하자.

$$f(x) = \frac{1}{3} \quad x=0.5, 1, 1.5$$

이 경우 분포함수는 다음과 같다.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x < 0.5 \\ \frac{2}{3} & 0.5 \leq x < 1.0 \\ 1 & x \geq 1.5 \end{cases} \quad (17)$$

3가지 경우에 대하여 λ 값이 근사화의 정확성에 영향을 미치는 정도를 알아보기 위해 λ 값을 변화시키면서 근사화의 정확성을 살펴보았다.

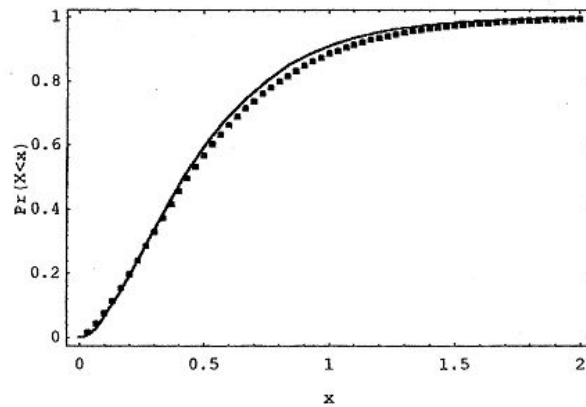
<그림 1>은 E2 함수를 근사화시키면서 각각 $\lambda=20, 50$ 으로 변화시켜, 근사화의 정확성을 비교한 것이다. 또한 <그림 2>는 HE 함수를 GPH로 근사화시키면서, λ 값의 변화에 따른 근사화의 정확성을 비교한 것이다. 위의 2가지 분포에 대한 GPH 분포의 근사화 결과를 보면, $\lambda=20$ 만 되어도 좋은 근사화 결과를 제시하는 것을 알 수 있다. 또한 미세하나마 λ 가 커짐에 따라 근사화의 정확도가 증가하는 것을 알 수 있다.

<그림 3>은 (17)로 주어지는 분포함수를 GPH로 근사화시키면서, 역시 λ 값의 변화에 따른 근사화의 정확성을 비교한 것이다. 이 경우에는 λ 값의 크기가 근사화에 큰 영향을 미치고 있음을 알 수 있다. $\lambda=50$ 인 경우에는 근사화에 의한 분포함수가 선형에 가깝게 나타나, 계단형인 본래 분포함수와 상당한 오차를 보이고 있다. 그러나

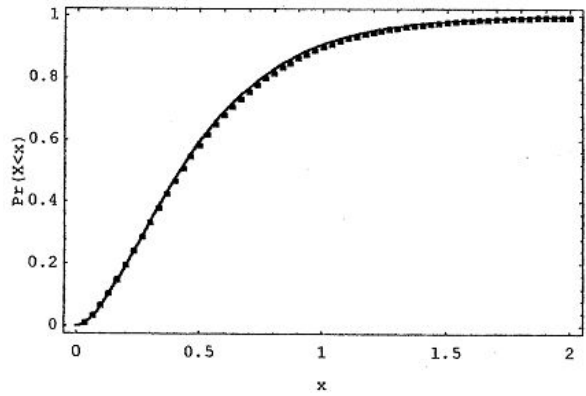
λ 가 100, 150, 200으로 증가함에 따라 본래 분포함수에 상당히 근접함을 알 수 있다.

(17)과 같은 형태를 갖는 분포함수는 특정값(0.5, 1.0, 1.5)에서만 사건이 집중적으로 발생하기 때문에 GPH 근사화에 따른 오차가 크게 나타나게 되며 따라서 λ 를 매우 크게 잡아야만 한다는 것을 위 결과로부터 알 수 있다.

위의 예제 결과들을 종합해보면, λ 값을 충분히 크게 주면 큰 오차없이 임의의 분포를 GPH 분포로 근사화할 수 있음을 알 수 있다.

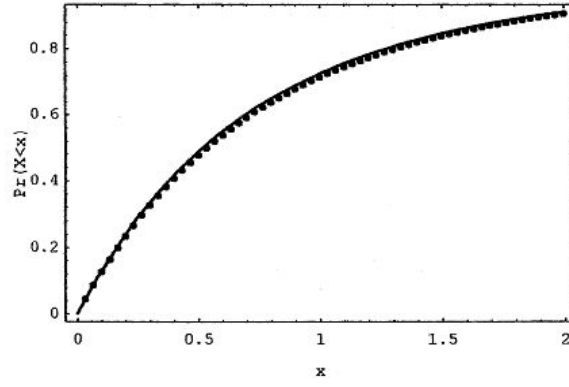


(a) GPH($\lambda=20, g$)

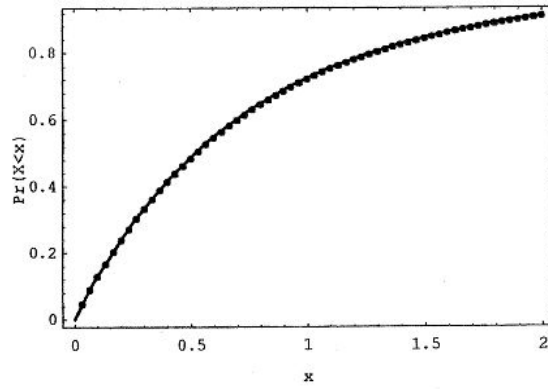


(b) GPH($\lambda=40, g$)

<그림 1> E2 분포의 GPH로의 근사화: E2($\mu=2$), GPH(λ, g)

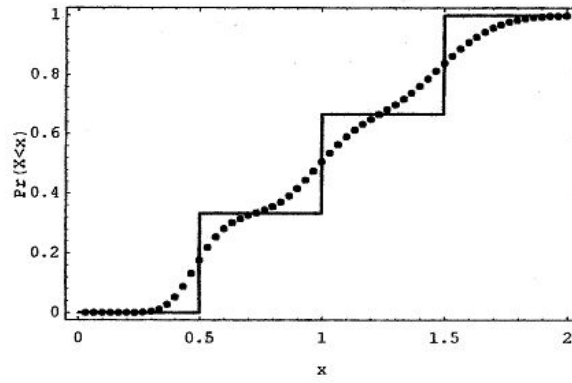
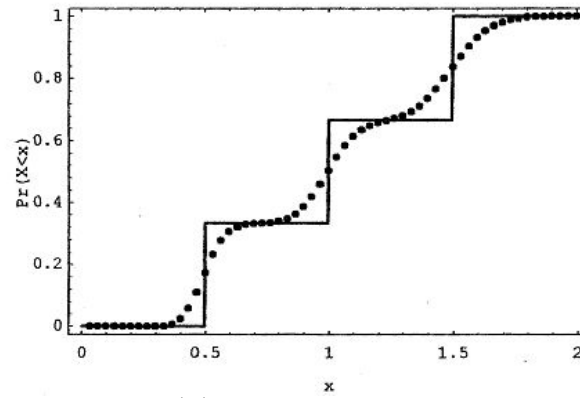
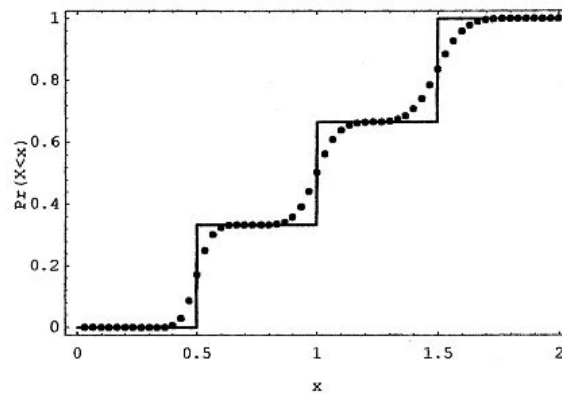


(a) GPH($\lambda=20, g$)



(b) GPH($\lambda=50, g$)

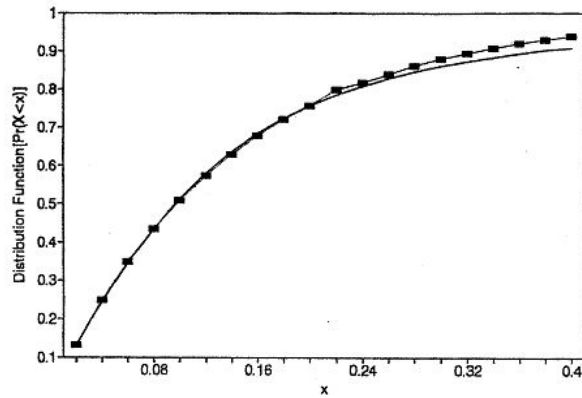
<그림 2> HE 분포의 GPH로의 근사화: HE($\lambda_1=1, \lambda_2=2, p=0.6$), GPH(λ, g)

(a) $\text{GPH}(\lambda=50, g)$ (b) $\text{GPH}(\lambda=100, g)$ (c) $\text{GPH}(\lambda=200, g)$

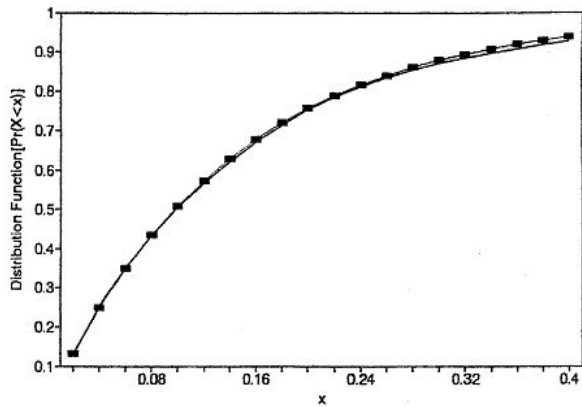
<그림 3> $F(x)$ 의 GPH로의 근사화

3.4.2 데이터 추출에 의한 근사화

근사화 실험 예제 함수로써 $HE(\lambda_1=6, \lambda_2=8, p_1=0.4)$ 함수를 선택한다. 주어진 데이터의 갯수에 따른 근사화의 정확도를 실험하기 위해 HE 분포를 따르는 데이터를 시뮬레이션을 통해 각각 100개, 1000개씩 추출한다. 그 다음, 이 데이터를 가지고 (10)와 (11)을 이용하여 GPH 분포로 근사화시켰을 때의 분포함수와 원래의 분포함수를 비교하면, <그림 4>와 같은 결과가 나온다. 그림에서 실선은 실제 분포함수를 나타내고 점선으로 이어진 값들은 GPH 분포로 근사화시켰을 때의 분포함수를 나타낸다. 그림에서 보듯이 데이터의 갯수가 커질수록 좀 더 정확한 근사화가 이루어진다. 따라서, 데이터의 갯수만 충분히 크면, 미지의 분포도 GPH 분포로 근사화시킬 수 있다.



(a) 데이터 수 = 100



(b) 데이터 수 = 1000

<그림 4> HE 분포로부터 데이터 추출에 의한 GPH로의 근사화

: HE($\lambda_1=6, \lambda_2=8, p=0.4$), GPH($\lambda=100, g$)

4. 대기 시스템에 있어서 GPH 분포의 응용

4.1 GPH/GPH/1 큐로의 변환을 이용한 GI/G/1 큐 대기시간 분석

$A_n, n=1, 2, \dots$ 과 $B_n, n=1, 2, \dots$ 을 각각 n 과 $(n+1)$ 번째 고객의 도착간격 시간, n 번째 고객의 서비스 시간에 대한 iid 확률변수라고 하자. 그리고, W^n 과 W_q^n 은 각각 시스템과 대기행렬에서의 대기시간이라고 하자. 이 시스템에서 안정상태에서의 대기시간 분포는 복잡한 적분식으로 표현되므로 대기시간 분포를 계산하기가 매우 힘들다(Kleinrock(1976)).

그러나, 위와 같은 GI/G/1 큐에서 도착간격 시간과 서비스 시간의 분포를 각각 GPH 분포로 변환시킨 GPH/GPH/1 큐에서는 대기시간의 계산이 가능하다. A_n 과 B_n 을 각각 GPH(λ_1, g_a), GPH(λ_2, g_s) 분포를 따른다고 하자. 여기서, 1절에서 언급한 이유에 의해서 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 로 놓아도 분포의 일반성은 계속 유지된다. 이 때, 다음의 정리가 성립한다(Shanthikumar(1985)).

정리 7. W_q^0 가 GPH(λ, g_q^0) 분포를 따른다고 하면, n 번째 고객의 시스템 대기시간 W^n 과 n 번째 고객의 대기행렬 대기시간 W_q^n 은 각각

$$(\lambda, g_w^n), (\lambda, g_q^n) \quad \text{단, } g_w^n = g_q^n * g_s, \quad n=0, 1, \dots \quad (18)$$

$$g_q^n = g_w^{n-1} \oplus g_a^*, \quad n=1, 2, \dots \quad (19)$$

로 표현되는 GPH 분포를 따른다. 위 식에서, \oplus 는 nonnegative condition을 갖는 negative convolution이며 g^* 는 (6)과 같이 정의된다.

위 정리를 보면, 대기시간을 계산하기 위한 모든 연산은 이산 함수의 연산뿐이다. 이런 잇점 때문에 대기 시스템에서 도착과 서비스가 GPH 분포로 표현만 되면, 대기시간의 분포의 계산이 가능하게 된다.

4.2 GPH/GPH/1 큐에서의 대기시간 분포의 효율적 계산

위 정리를 이용하여 GPH/GPH/1 시스템에서의 대기시간의 안정상태 확률 분포를 효과적으로 계산하는 방법을 살펴보자.

일단 도착간격 시간의 확률 분포가 g_a 이고, 서비스 시간의 확률 분포가 g_s 인 GI/G/1 이산 대기 시스템(discrete queueing system)을 가정하자. 도착간격 시간과 서비스 시간의 확률분포가 이산함수일 때, 안정상태에서의 대기행렬 대기시간과 시스

템 대기시간은 이산함수 convolution 계산에 의해 계산한다. 먼저,

$$c(m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g_s(k+m) g_a^*(k) & m=1,2,\dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} g_s(k) g_a^*(k) & m=0 \\ \sum_{k=0}^{\infty} g_s(k) g_a^*(k-m) & m=-1,-2,\dots \end{cases} \quad (20)$$

을 계산한다. 이 $c(m)$ 은 임의의 고객의 대기행렬에서의 대기시간이 주어졌을 때, 그 대기시간에 $c(m)$ 의 확률 분포를 가지는 시간만큼 더함으로써, 바로 그 다음 고객의 대기행렬에서의 대기시간을 구하는데 사용되어진다. 즉, $c(m)$ 과 $g_q(m)$ 를

$$g_q^{n+1}(m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} g_q^n(k) \sum_{r=-\infty}^{-k} c(r) & m=0. \\ \sum_{k=-\infty}^m g_q^n(m-k) c(k) & m=1,2,\dots \end{cases} \quad (21)$$

와 같이 다시 convolution함으로써, 그 다음 고객의 대기행렬에서의 대기시간의 분포를 구할 수 있다. 이 계산에 많은 시간이 소요되므로 계산시간의 단축을 위해 convolution 연산을 빨리 수행할 수 있는 FFT(Fast Fourier Transform) 알고리즘(Press(1988))을 사용한다.

그런데, FFT 알고리즘을 사용할 때 다음 사항을 고려해야 한다. (21)에 의하면, g_q 와 c 의 convolution 연산을 했을 때 음수값이 나오는 경우의 모든 확률값을 0에 입력해야 하지만, FFT 알고리즘은 이렇게 작동하지 않는다. 예를 들어, $g_q(m)$ 에서 m 이 0에서 $M-1$ 까지 정의되어 있다고 하자. convolution 연산 수행후 m 이 $-k$ 에서 k (단, $k \leq \frac{M}{2}$)까지에 확률값이 주어졌다면, 원래 $g_q(-k) \sim g_q(0)$ 에 입력되어야 할 확률값들은 (16)에 의하면 $g_q(0)$ 에 입력된다. 그러나, FFT 알고리즘은 원래의 $g_q(-k)$ 값은 $g_q(M-k)$ 에, $g_q(-k+1)$ 값은 $g_q(M-k+1)$ 에, ..., $g_q(-1)$ 값은 $g_q(M-1)$ 에 입력된다. 그 이유는 FFT 알고리즘에서는 다루는 모든 함수를 순환 함수라고 가정하기 때문이다(Press(1988)). 따라서, $g_q(0)$ 의 계산만은 FFT와는 상관없이 따로 수행해야 하고, 한 번 convolution 연산을 수행한 후에는 다음 번 convolution 연산을 위해 $g_q(M-k)$ 에서 $g_q(M)$ 의 확률값을 0으로 재입력해야 한다.

이 때, 초기의 $g_q^0(m)$ 은

$$g_q^0(m) = \begin{cases} 1 & m=0. \\ 0 & m=1,2,\dots \end{cases} \quad (22)$$

으로 정한다.

(21)의 계산을 반복적으로 수행하면서, 다시 계산된 $g_q^n(m)$ 과 바로 직전 $g_q^{n-1}(m)$ 의 모든 m 에서의 차를 구하여 그 값이 정해진 일정한 값보다 작으면, 안정상태가 된

것으로 간주한다. 그러면 이 때까지 구한 $g_q(m)$ 값으로부터 위에서 가정한 GI/G/1 이산 대기 시스템에 대한 안정상태에서의 대기행렬 대기시간 분포를 구할 수 있다. 이 $g_q(m)$ 과 서비스 시간의 확률 분포 $g_s(m)$ 을 다시 한번 convolution하면, 안정상태에 대한 시스템에서의 대기시간에 대한 확률 분포를 구할 수 있다.

실제 계산에서는 일정한 오차의 한계를 정하여 $c(m)$ 에서 m 의 범위를 $-N \sim N$ 으로 제한시킨다. 이렇게 g_w 와 g_q 를 계산하면, GPH/GPH/1 큐에서의 고객의 대기행렬 대기시간과, 시스템 대기시간은

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P W_q^n \leq x = \sum_{k=0}^{\infty} G_q(k) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}, \quad x > 0 \quad (23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P W^n \leq x = \sum_{k=0}^{\infty} G_w(k) \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^k}{k!}, \quad x > 0 \quad (24)$$

와 같이 구할 수 있다.

4.3 대기 시스템에 대한 GPH 근사화 예제

앞서의 결과를 이용하여 G/M/1 큐를 GPH/GPH/1 큐로 근사화시켜 대기행렬 대기시간의 분포를 구해보자. 여기서, GI/G/1 대신에 G/M/1을 대상으로 하는 것은, 근사화의 정확성을 알아보기 위해서는 대기시간의 정확한 해와 비교가 필요한데, G/M/1 큐에서는 대기행렬 대기시간의 정확한 분포의 계산이 가능하기 때문이다. 또한 앞서 설명한 바와 같이, 식 (19)에서 G_q 의 계산을 할 때 이산 함수의 convolution 연산을 여러 번 수행하게 되는데 이 계산에 많은 시간이 소요되므로, 계산시간의 단축을 위해 convolution 연산을 빨리 수행할 수 있는 FFT(Fast Fourier Transform) 알고리즘(Press(1988))을 사용한다.

다음과 같은 2가지 도착 분포를 고려한다.

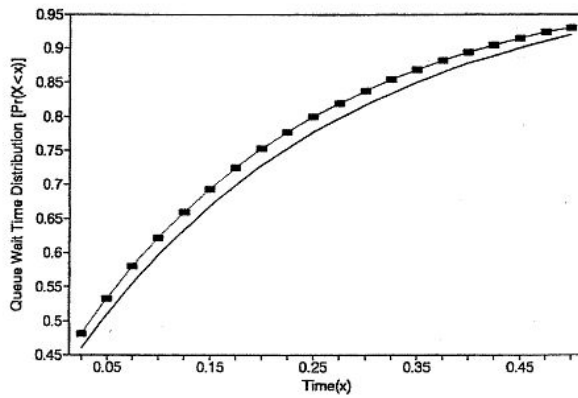
- (1) GE-2($\lambda_1=15, \lambda_2=12$)
- (2) HE($\lambda_1=6, \lambda_2=8, p=0.4$)

또한 GPH 함수의 파라미터인 λ 값이 정확도에 미치는 영향을 살펴보기 위해 λ 값을 변화시킨다.

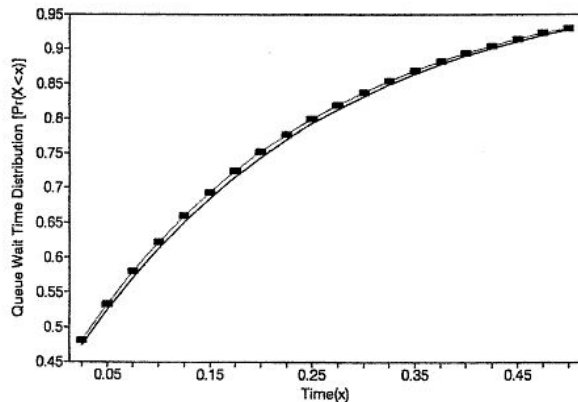
GPH 분포로의 근사화를 이용해서 구한 대기시간의 분포함수와 이론적으로 구한 대기시간의 분포함수를 <그림 5>와 <그림 6>에 나타내었다. 그림에서 실선은 실제 분포함수를 나타내고 점선으로 이어진 값들은 GPH 분포로의 근사화를 이용할 경우의 분포함수를 나타낸다. 첫 번째 예제의 경우 λ 값이 150이어도 정확한 값과 다소 차이가 나는 데 비하여 두 번째 예제의 경우에는 λ 값이 80인데도 정확한 값과 거의 일치하는 것을 알 수 있다. 즉, λ 값이 근사화에 큰 영향을 끼친다는 것과 아울러 각각의 경우에 따라 근사화의 정확도를 높이기 위한 λ 값이 서로 다르다는 것을 알 수

있다.

그러나 λ 값을 크게 하는 데는 제약이 있다. λ 값이 커질수록 (19)에서 G_q 를 계산할 때 이산 확률변수의 확률값을 저장하는 변수의 수가 증가하기 때문이다. 그 이유는 (8)의 근사화 식에서 $F(\frac{x}{\lambda})$ 항의 값을 나타내는 변수의 갯수가 λ 값이 커질수록 증가하기 때문이다. 이 변수의 수가 증가하면, convolution 연산을 수행할 때 많은 계산 시간이 소요된다. 따라서, 계산 시간과 근사화 정확도를 절충(trade-off)하여 λ 값을 정해야 한다.

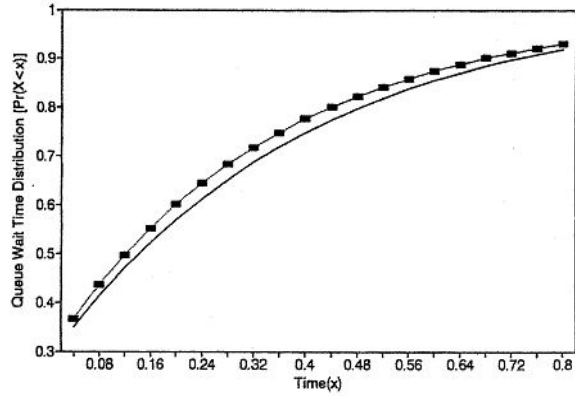
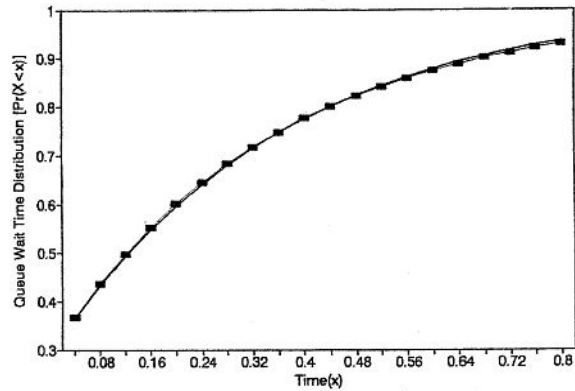


(a) GPH($\lambda=80, g$)



(b) GPH($\lambda=150, g$)

<그림 5> GE-2/M/1 대기 시스템의 GPH/GPH/1 대기 시스템으로의 근사화
 : GE-2($\lambda_1 = 15, \lambda_2 = 12$), exp($\mu=10$), GPH(λ, g)

(a) GPH($\lambda=40, g$)(b) GPH($\lambda=80, g$)

<그림 6> HE/M/1 대기 시스템의 GPH/GPH/1 대기 시스템으로의 근사화
 : HE($\lambda_1=6, \lambda_2=8, p=0.4$), $\exp(\mu=10)$, GPH(λ, g)

5. 결론 및 추후 연구

유한상태의 연속시간 마코프 체인이 흡수상태에 빠질 때까지의 시간에 대한 분포로 정의되는 PH 분포는 확률 모형의 계산적인 접근 방법에 많이 사용되어 왔다. 그러나 실제 적용에 있어서는 PH 분포를 표현하는 파라미터의 수가 너무 많아 파라미터 추정에 어려움이 따르고, 또한 정확한 근사화를 위해서는 마코프 체인의 상태 공간이 커야 하므로 계산상의 제약이 따른다.

지수분포를 따르는 무작위 갯수의 단위 확률변수들의 합에 대한 분포로 정의되는 GPH 분포는, PH 분포에 비해 일반적이며 표현에 있어서도 훨씬 간편하다는 잇점을 가지고 있다. 또한 GPH 분포는 연속함수 계산을 이산함수 계산으로 변환시켜줌으로

써, 어려운 계산을 가능하게 해줄 수 있다. GPH 분포의 이러한 성질은 대기 시스템을 비롯한 여러 분야의 확률적 분석에 폭넓게 응용될 잠재성을 가지고 있다. 본 연구에서는 일반적인 분포를 GPH 분포로 근사화하는 과정을 확립하고 GPH 분포의 확률적 성질 및 계산상의 성질을 대기 시스템 분석에 효과적으로 이용하는 방법을 제시하였다.

수리적 결과로부터 λ 값을 충분히 크게 해주면 임의의 분포를 큰 오차없이 GPH 분포로 근사화할 수 있으며 이러한 성질을 이용하여 대기 시스템의 지연시간 분포를 근사적으로 분석할 수 있음을 알 수 있었다. 이러한 근사화 과정에서 λ 값이 근사화 정확도에 큰 영향을 미치므로, λ 값을 크게 할 경우 늘어나는 계산 시간과 근사화 정확도를 절충하여 적절한 λ 값을 정해야 할 것이다.

추후 GPH 분포의 이러한 성질을 이용하여 대기 시스템으로 모형화가 가능한 여러 시스템의 확률적 특성을 분석하고 성능을 파악하는 연구를 지속적으로 수행할 예정이다.

참고문헌

1. Kim H. G. (2005), Repair-Replacement Strategies for Warranted Items with Phase-Type Lifetimes, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 31(4), 341-348.
2. Kleinrock L. (1976). *Queueing System vol. 2 : Computer Applications*, John Wiley and Sons, Inc.
3. Neuts M. F. (1981). *Matrix-Geometric Solution in Stochastic Models : An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press.
4. Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., and Vetterling W. T. (1988). *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.
5. Ross S. M. (2003). *Introduction to Probability Models*, Academic Press.
6. Shanthikumar J. G. (1985). Bilateral Phase Type Distributions, *Naval Research Logistics Quarterly*, 32, 119-136.

[2006년 5월 접수, 2006년 6월 채택]