대한수학교육학회지 <학교수학> 제 8 권 제 1 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.8, No.1, 1-25. Mar. 2006

제 7-단계 수학에서 양·음수의 지도에 관한 연구[1)]

김 흥 기*· 김 응 석**

양수와 음수의 취급이 처음으로 시작되는 제 7-단계 교과서들을 살펴본 결과 양의 부호, 음의 부호가 붙은 수를 읽는 방법과 유리수에 대한 일부 교과서의 정의는 재고해야 하며, 반대의 수 곧 반수를 정의하여 활용하는 것과 양수와 음수의 도입은 대소 관계를 다루는 곳에서 그 정의를 하는 것이 바람직함을 알 수 있었다. 연산에서는 양의 부호와 음의 부호가 붙은 수에 대한 가시적인 표현을 충분히 익히게 하여 초등학교에서의 연산 도입을 구체적이고 가시적으로 처리한 것과 같이 양수, 음수의 연산에도 그 방법을 연계하여 활용 할 수 있도록 하는 것이 바람직하다고 생각되어 화살표(유향선분)를 사용하여 양수 음수를 가시적으로 도입한 후에 이들을 사용하여 초등학교에서의 계산 방법을 양수 음수까지 확장된 수에까지 그대로 적용한 학습 내용을 제시하였다. 그리고 제시한 학습 내용으로 지도를 하여본 결과 이와 같이 연계된 학습내용이 보다 바람직한 것임을 알 수 있었다.

Ⅰ. 서 론

수체계를 공리적으로 도입하여 확장해나가면 학문적으로는 큰 문제가 없겠지만, 초등학교와 중등학교 과정에서 이와 같은 방법으로 지도할 수 없으므로 각 단계에 알맞은 방법을 찾아 지도하는 것은 매우 중요한 일이다.

따라서 세계 각 나라에서는 수학 교육을 시작하면서부터 수체계에 대하여 어떻게 내용을 구성하고 지도하는 것이 바람직 한 것인가를 많이 연구하고 있으며, 미국, 일본 등 외국의 교과서들을 살펴보면 그 내용 구성과 지도 방법이 다양하게 제시되어 있다.

음수가 도입되기 전의 수(양수)들에 대한 가시적인 표현, 이를테면 개수나 순서 등을 이용한 수의 개념 이해와, 이들 이해에 따른 계산 과정을 체계적으로 이해하는 것은 그래도 용이한 일이다.

그러나 수체계의 확장 과정에서 음수는 가시적인 표현이 쉽지 않아 그 개념의 지도가 어렵고, 그에 따라 양수, 음수가 섞인 수들의 계산 과정에 대한 지도도 어렵게 된다.

음수의 도입과 음수까지 확장된 수에서의 연산에 대한 지도는 학습 연령의 수준에 적합한 방법을 따를 수밖에 없다. 따라서 초등학교 또는 중학교 과정에서 음수의 도입과 음수까지 확장된 수에서의 연산에 대한 지도는 학문적으로 엄밀한 방법 보다 가시적 표현방법을 사용할 수밖에 없다. 그런데 체계적이고 이론적으로 연결이 타당한 가시적 표현방법을 주변에서 찾아 활용하는 것은 그리 쉽지가 않다. 실제로

* 단국대학교(hkkim@dankook.ac.kr)
** 단국대학교 대학원생(kes4142@hanmail.net)
1) 이 연구는 2004학년도 단국대학교 대학연구비의 지원으로 연구되었음

바람직한 가시적 표현방법을 제시하기 위하여 세계 각 나라들은 오랜 기간 연구를 하여왔고 또 계속 연구를 하고 있다.

우리나라의 초등학교 교과서에서는 주위에서 사용할 수 있는 가시적인 사물들을 사용하여 자연수를 읽고 쓸 수 있게 하고 간단한 수에 대한 덧셈. 뺄셈을 이해하게 하면서 계속 확장해 나간다.

그리고 대개의 중학교 수학교과서에서도 음수의 도입과 음수까지 확장된 수에서의 연산에 대한 지도에 대하여 같은 맥락에서 가시적 표현방법을 사용하여 구성하려고 하고 있다.

특히 가시적인 표현으로 화살표를 사용하면 정수에서 뿐만 아니라 유리수까지에도 그 활용이 편리하므로 가시적인 표현 방법으로 화살표를 많이 사용하고 있다. 그런데 현행 교과서에서는 연산에서만 과정에 대해 가시적 표현 방법으로 화살표를 사용하고, 양수 음수의 도입에서 각 수의 표현에 대하여는 화살표 표현을 다루지 않기 때문에 내용 전개가 체계적으로 연결 되지 못하고 단절된 상태로 구성되어있다. 따라서 양수, 음수를 사용한 계산은 그 과정의 체계적인 이해보다 계산 방법만을 암기하여 계산 할 수밖에 없는 상황으로 되어 있어 그 개선이 필요하다.

본 논문에서는 우선 현행 중학교 교과서에서 처음 도입되는 양수, 음수의 도입 방법과 그에 따른 사칙 연산의 지도에 관하여 알아본다. 그리고 바람직한 방법으로 특정한 화살표(좌 우 두 방향만을 생각한 유향선분)를 사용한 양수와 음수의 가시적 표현을 이해하게 하고, 이들을 사용하여 초등학교에서 활용한 가시적 표현의 계산과정을 연계한 가시적 표현을 양수, 음수의 계산 과정에도 사용한 지도 방법을 제시한다. 이와 같이 양수와 음수의 가시적 표현을 화살표(유향선분)를 사용하면 연산 과정이 체계적으로 깔끔하게 처리되는데, 양수와 음수에 대한 이와 같은 화살표(유향선분) 표현 사용이 중학교 과정에서 가능한 것인지 제시된 내용으로 지도하여 그 결과를 알아본다.

II. 양수, 음수에 관한 교육과정과 교과서의 분석

1. 교육과정

우선 양수와 음수의 도입을 처음으로 하고 있는 제 7-가 단계의 교육과정에서 해당 부분은 다음과 같다(교육부, 1997).

□ 정수와 유리수

① 정수와 유리수의 개념을 이해한다.

② 정수와 유리수의 대소 관계를 이해한다.

③ 정수와 유리수의 사칙 계산의 원리를 이해하고, 사칙계산을 익숙하게 할 수 있다.

<용어와 기호> 정수, 유리수, 절대값, 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙, 양수, 음수, 역수, $+a$, $-a$

<학습 지도상의 유의점>

③ 정수와 유리수에서 연산법칙을 지도할 때에는, 수 계산에 도움이 되는 정도로만 다룬다.

위의 내용을 살펴보면 정수와 유리수의 개념 이해와, 대소 관계 이해를 하도록 하였고, 사칙 계산의 원리를 이해하고, 사칙계산을 익숙하게 할 수 있게 하도록 하였다. 이에 따라 각 교과용 도서에서는 정수와 유리수의 개념과 대소 관계, 사칙 계산을 다루고 있다. 이들 내용을 다루는 방법은 교과용도서 마다 나름대로 다룰 수 있지만, 연산법칙에 관한 <학습 지도상의 유의점>은 문제점이 있을 수 있다. 왜냐하면, 연산법칙의 지도를 너무나 간단히 다루는 것은

교육과정의 수학의 목표에서 제시한 “가. 여러 가지 생활 현상을 수학적으로 고찰하는 경험을 통하여 수학의 기초적인 개념, 원리 법칙과 이들 사이의 관계를 이해할 수 있다.” 와 집필상의 유의점의 내용의 선정에 있는 항목 “3) 내용은 영역에 따라 주요 개념(용어 포함), 원리, 법칙을 중심으로 선정한다.” 와 또 내용의 조직에 있는 항목 “(2) 수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 명확히 이해하고, 수학적인 용어나 기호를 정확하게 사용하도록 조직한다.”에 맞지 않기 때문이다. 실제로 초등학교 과정에서도 교환법칙에 대한 간단한 지도 이외에는 연산법칙의 지도가 전무한 상태이므로 이들 법칙을 처음으로 다루는 이곳에서 조차 너무나 간단히 취급하는 것은 문제가 있다.

2. 교과서

이제 현행 교과서에서의 양수, 음수의 취급에 대하여 일부를 살펴보면 다음과 같다.[2)]

가. 양의 부호, 음의 부호

양수, 음수의 처음 도입 부분인 양의 부호, 음의 부호의 도입에 대하여 살펴보면, 현행 7-가 단계 교과용 도서에서는 모든 도서들이 서로 반대인 성질을 가진 수량, 이를테면 온도, 방향, 손익관계 등을 사용하여 부호 “+” 와 부호 “—”를 연산의 부호가 아닌 양, 음의 부호로 의미를 부여하면서 내용을 전개하고 있다.

여기서 그 내용 전개 과정을 살펴보면, 부호 “+, —” 를 덧셈, 뺄셈의 연산 기호와 다른 의미를 갖는 부호로 도입하면서 많은 도서들이 이를테면 “$+1$은 플러스 1, -1은 마이너스 1이라고 읽는다.”고 하여 결국 각 부호에 더하기, 빼기의 의미를 주고 있고, 이와 같은 취급 바로 뒤의 정수에서는 「 $+1$, $+2$, $+3$, … 은 각각 양의 정수 1, 양의 정수 2, 양의 정수 3, … 으로 읽고, -1 , -2, -3, … 은 각각 음의 정수 1, 음의 정수 2, 음의 정수 3, … 이라고 읽는다.」고 하여 앞에서와 차이가 있게 되어 있다. 실제로 Charles, R. I., et al.(1998)의 교과서에서는 $+1$, $+2$, $+3$, … 을 각각 양수1, 양수2, 양수3, …, -1 , -2, -3, …을 각각 음수1, 음수2, 음수3, … 으로 읽고 있다. 그리고 거의 모든 도서에서 “$+a$는 플러스 a, $-a$ 는 마이너스 a 라고 읽는다.”고 하였는데 이와 같이 읽는 것은 오류이다. Smith, K. J.(2000)는 “$+1$은 플러스 1”, “-1은 마이너스 1”이라고 읽는 것은 잘못된 것이라 하였고, “$-a$ ”는 “a의 반수(반대인 수)”라고 읽는다고 하였다. 한편 “$+a$”를 읽는 방법을 제시한 도서나 자료들은 아직까지 발견하지 못했다. 나름대로 제시한다면 본 연구자는 “$+a$”는 “a와 같은 수” 라고 읽는 방법을 제안한다.

나. 정수

다음에 정수와 유리수의 도입에 대하여 살펴보면, 정수는 자연수에 양의 부호를 붙인 것과 음의 부호를 붙인 것을 제시하여 0과 함께 하여 정수를 도입하였는데, 그 정수로부터 양의 정수, 음의 정수를 말한 경우와 음의 정수, 양의 정수를 먼저 도입하고 정수를 언급한 두 경우가 있다. 두 경우 중 어느 경우가 더 바람직한가는 여러 면에서 살펴보는 것이 좋을 것이다.

---

2) 분석 대상 교과서는 참고문헌에 제시되어있는 중학교 교과서이다.

다. 유리수

유리수의 정의는 많은 교과서가 분자, 분모($\neq 0$)가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수라고 하였고, 일부 교과서는 분자 분모가 자연수인 분수에 양의 부호를 붙인 수와 음의 부호를 붙인 수 및 0을 통틀어 유리수라고 하였다.

여기서 살펴볼 것은 유리수는 일반적으로 "분자, 분모($\neq 0$)가 정수인 분수로 나타낼 수 있는 수"로 정의하지만, 이곳의 체계를 살펴보면 이와 같은 정의는 문제가 있다. 왜냐하면, 양수 음수의 연산을 배우기 이전이므로 $\frac{+2}{+3}$, $\frac{-2}{+3}$, $\frac{+2}{-3}$, $\frac{-2}{-3}$과 같은 수는 어떤 수 곧 양수인지 음수인지를 알 수가 없기 때문이다. 따라서 이곳에서는 "분자 분모가 자연수인 분수에 양의 부호를 붙인 수와 음의 부호를 붙인 수 및 0을 통틀어 유리수"라고 하는 것이 바람직하다.

라. 양수, 음수

양수, 음수의 정의는 우선 양의 부호, 음의 부호를 정의한 바로 다음에 양의 부호 $+$가 붙은 수를 양수, 음의 부호 $-$가 붙은 수를 음수라고 한 경우와 0보다 큰 수를 양수, 0보다 작은 수를 음수라고 한 경우가 있다. 그리고 유리수를 정의한 후 유리수 중에서 양의 부호를 붙인 수를 양수, 음의 부호를 붙인 수를 음수라고 한 경우와 유리수 중에서 0보다 큰 수를 양수, 0보다 작은 수를 음수라고 한 경우가 있다.

여기서 살펴보아야 할 것은 우선 내용의 체계상 양수, 음수의 정의를 이곳에서 하는 것이 적합한 가이다. 일반으로 실수체계에서 양수, 음수는 순서 관계(부등관계)를 도입하면서 그 정의를 하는 것이 보통이다. 실제로 위와 같은 양수, 음수의 정의에서 0보다 큰 또는 작은 수라는 용어의 사용은 이미 음수까지 확장된 수에서 대소 관계를 학습한 후의 사용에 해당한다. 참고로 제 6차 교육과정에서는 초등학교 과정에서 정수와 그 대소 관계를 학습하였으므로 위와 같은 취급이 그래도 가능하다고 할 수는 있겠다. 또 유리수에서 양의 부호와 음의 부호를 붙인 수는, 정수에서 양의 정수, 음의 정수를 언급한 것과 같이 양의 유리수, 음의 유리수라는 용어를 사용하는 정도로 하고 양수, 음수의 정의는 대소 관계를 다루는 곳에서 도입되는 것이 바람직 할 것이다.

다음으로 어느 교과서에서도 양수, 음수의 도입과정에서는 가시적 표현을 다루고 있지 않다 갑자기 양수, 음수의 연산에서 화살표, 검은 돌 흰 돌, 카드 등을 활용하고 있어 연결의 맥이 단절된 상태이고, 특히 화살표를 사용한 경우에 그 활용이 매끄럽게 되어 있지 않아 개선이 필요하다.

마. 대소 관계

양의 유리수, 음의 유리수까지 확장된 수체계에서 대소 관계는 이곳에서 처음으로 도입된다.

그런데 많은 교과서들에서는 초등학교에서 학습한 0보다 큰 수에서 성립한 대소 관계가 그대로 성립한다고 단정적으로 언급하고 있다. 곧 「자연수를 수직선 위에 나타내면 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수 보다 크다. 마찬가지로 유리수를 수직선 위에 나타내면 아래 그림과 같이 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다.」고 하고 있다. 또 일부는 이미 정수에 대하여는 알고 있는 것으로 하여(제 6차 교육과정에서는 초등학교에서 다루었음) 「수직선 위에서는 오른쪽에 있는 정수가 왼쪽에 있는 정수 보다 크다. 수직선 위에서 항상 오른쪽에 있는 유리수가 왼쪽에 있는 유리수 보

다 크다.」고 하였다. 오직 한 교과용 도서(양승갑 외 6인, 2001)에서만 「유리수에서도 자연수에서와 마찬가지로 수직선 위에서 오른쪽에 있는 수가 왼쪽에 있는 수보다 크다고 말한다.」고 하여 이곳에서 처음으로 대소 관계를 정의로 도입하였는데 이와 같은 처리가 타당할 것으로 생각된다.

바. 덧셈과 뺄셈

양수, 음수까지 확장된 수체계에서 가시적인 방법을 사용하여 덧셈을 이해할 수 있도록 하기위하여 방향(동쪽, 서쪽, 오른쪽, 왼쪽), 수직선, 바둑돌, 카드, 단추 등을 사용하였다. 우선 오른쪽(또는 동쪽)으로 가는 것을 양수(또는 양의 부호)로, 왼쪽(또는 서쪽)으로 가는 것을 음수(또는 음의 부호)로 하여 수직선 위에 화살표를 그려 넣든가 또는 과정을 설명하면서 덧셈을 가시적으로 이해하게하는 경우와 바둑돌의 색에 양수, 음수를 맞추어 가시적으로 보이는 경우와 카드(검은색과 흰색)를 사용한 경우가 있다. 수직선 위에서 화살표를 사용한 경우에 화살표와 수와의 관계 그리고 계산 과정에 대한 체계가 명확하지 않아 가시적인 이해에 도움을 주기가 힘들게 되어 있다.

이를테면, 대개의 경우에 김연식외(1995)에서 사용한 수직선 위에서의 덧셈 방법의 가시적인 표현인

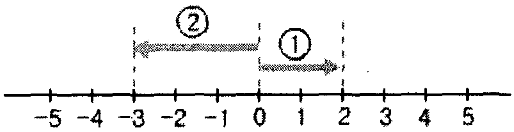
(첫 번째 이동) + (두 번째 이동)

= (출발점에서 끝점까지의 이동)

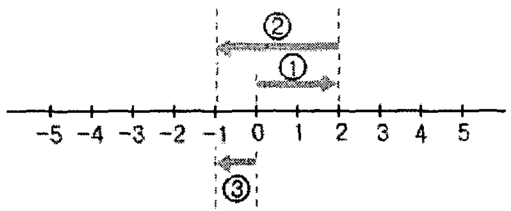
을 사용하고 있는데 이러한 사용에는 다음과 같은 문제점이 있다.

우선, 이동을 양수와 음수로 나타내는 가시적 표현을 다루지 않았기 때문에 양수와 음수를 화살표로 나타내는 것에 이론적인 단절이 있고, 양수와 음수의 표현을 단위 길이가 주어진 수직선 위에 고정점으로 나타내고 있으므로 양수를 오른쪽으로의 이동, 음수를 왼쪽으로의 이동으로 보았을 때, 수직선에서 (+2), (-3) 은 그 위치로 보아 원점 O에서 시작하는 크기가 2, 3이고 방향이 각각 오른쪽, 왼쪽인 화살표로 나타내게 된다. 따라서 위에 제시한 방법의 이동을 사용하여 (+2) + (-3) 을 화살표로 수직선 위에 나타낸다면

첫 번째 이동으로 ① 의 화살표를 나타내고 그리고 두 번째 이동으로 ② 의 화살표를 오른쪽 그림과 같이 나타내게 되어 출발점에서 끝점까지의 이동을 합으로 하기에 문제가 있다.



실제로 (+2) + (-3) 의 시각적 표현은 다음 그림과 같은데 현행 교과용 도서에서는 ① 의 화살표는 왜 원점에서 시작하고, 그리고 ② 의 화살표는 왜 ① 의 화살표의 끝점에서 시작하야 하며, 이 때 합은 왜 원점에서 ② 의 화살표가 끝난 점의 수가 되는지에 대한 아무런 설명도 없이 사용하고 있다.



초등학교에서 2 + 3 은 다음과 같이 가시적 표현을 사용하여 도입한다.

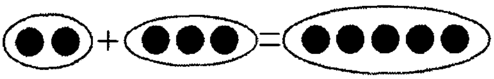
우선 개수 또는 순서를 사용하는 경우에는 이를테면 개수에서는 2 개의 ●에 다음으로 계속하여 3 개의 ●를 덧 붙여서 처음부터 덧붙인 끝까지의 개수로

① 처음의 2개를 늘어놓아 세고

② 그 끝에서 시작하는 다음의 3개를 늘어 놓아 계속 세어나가

③ 그 끝에 세어진 수를 두 수의 합 2 + 3

으로 하는 경우이고, 순서의 경우에도 마찬가지로 두 번째에서 계속하여 순서를 매겨 나가 다섯 번째까지 나가는 방법을 사용한다.



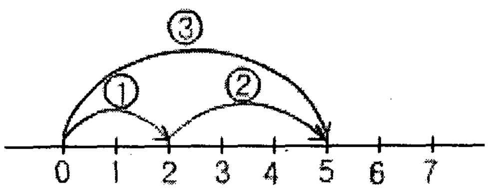
그리고 선분을 사용하는 경우에는 길이가 2인 선분에 잇대어 길이가 3인 선분을 나타내어 처음 선분이 시작한 곳에서부터 두 번째 선분이 끝난 곳까지의 선분의 길이로

① 처음의 길이가 2인 선분을 나타내고

② 그 끝에서 시작하는 길이가 3인 다음의 선분을 덧붙여서 나타내어

③ 처음 시작한 곳에서 두 번째 선분이 끝난 곳까지의 선분의 길이를 두 선분의 길이의 합 2 + 3

으로 하는 경우이다.



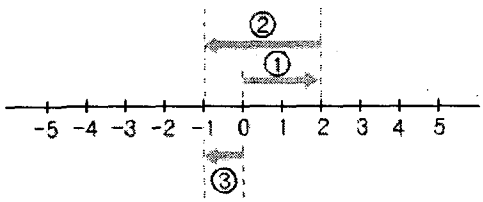
실제로 위의 화살표를 사용한 양수 음수의 덧셈 (+2) + (-3)의 가시적 표현은 초등학교에서 사용한 가시적 표현을 그대로 적용한 것 곧,

① 처음의 수 (+2)를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고

② 그 끝점에서 시작하는 화살표로 다음의 수 (-3)을 나타내어

③ 그 끝점의 수를 두 수의 합 (+2) + (-3)

으로 한 것이다.



이와 같이 초등학교에서의 방법을 그대로 양수, 음수의 계산에서도 그대로 연계하여 지도한다면 보다 효율적일 것이다. 이 때 양수, 음수를 나타내는 화살표가 위치에는 영향을 받지 않는 다는 것을 이해하게 하는 것이 필요하다.

그리고 바둑돌과 카드는 유리수를 다루기에는 수직선 위에서 화살표를 사용하는 경우보다 불편하다.

뺄셈에서는 덧셈에서의 가시적인 도구를 이용한 경우와 이용하지 않고 단지 역산으로만 처리한 경우가 있다.

사. 곱셈과 나눗셈

곱셈에서는 덧셈에서와 같이 방향과 시간 및 거리, 수직선, 바둑돌, 단추, 풍선과 돌 등을 사용하여 가시적인 이해를 돕도록 한 경우와 곱셈패턴을 이용한 경우가 있고, 나눗셈은 주로 곱셈의 역산으로 패턴을 사용하고 있다.

이상에서 살펴본 것과 전체적인 취급에 대하여 종합적으로 분석하여보면, 우선 양수, 음수의 도입은 초등학교에서 다루던 내용을 넘어선 새로운 취급인데도 도입 부분부터 너무 간략하게 되어 있고 전체적인 취급도 부족하다. 실제로 제 6차 교육과정에서는 초등학교에서 정수에 대하여 학습을 하고 다시 중학교에서 양수, 음수를 다루는데 현행 교과용 도서에서는 취급

하고 있는 내용이나 내용에 대한 교과서 지면 할애양이 제 6차에서와 같으므로 결국 6차보다 허술하고 어려워진 결과이다.

그리고 양수, 음수 도입 부분에서는 양수, 음수에 대한 가시적인 표현의 지도가 없이 연산 부분에서 갑자기 화살표 등을 이용함으로서 그 연계가 잘 되어 있지 않고 체계적인 활용이 어렵게 되어 있다.

III. 양수, 음수의 지도 내용(일부)과 지도 결과 분석

1. 양수, 음수의 지도 내용(일부)

위에서 살펴본 내용들의 결함을 보완하기 위하여 우선 양의 부호와 음의 부호가 붙은 수들의 가시적인 표현을 화살표를 사용하여 익히도록 하고, 양수와 음수의 도입은 대소 관계를 다루는 곳에서 정의하였다.[3]

그리고 덧셈 뺄셈 곱셈은 화살표를 이용하여 가시적인 방법으로 보다 구체적이고 체계적인 구성을 하였으며 그 일부를 제시하면 다음과 같다.

◉ 부호를 사용하여 나타낸 수

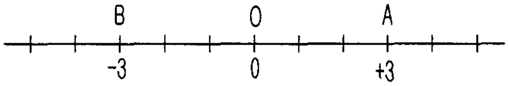
온도계에서는 0°C의 눈금 0을 기준으로 하여 영상 5°C온도와 영하 5°C온도의 눈금이 나타나 있다.

여기서, 이를테면 영상 5°C는 + 부호를 붙여서 「+5°C」로 나타내고, 이에 대하여 영하 5°C는 − 부호를 붙여서 「−5°C」로 나타낸다. 이 때 사용한 기「+, −」는 앞에서 배운 덧셈, 뺄셈의 기호와 구분하여 + 를 양의 기호, − 를 음의 기호라고 한다.

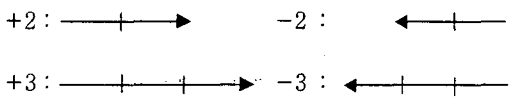
◉ 서로 반대인 성질을 갖는 수

온도에서와 같이 서로 반대인 성질을 갖는 반대의 수량은 한 기준을 0으로 정하고, 그 중 한 쪽의 수량에 양의 부호 + 를, 다른 쪽 수량에 음의 부호 − 를 사용하여 나타낼 수 있다.

이를테면, 다음 그림에서와 같이 한 직선 위에 기준점 O를 0, 일정한 거리를 1 구간으로 하여 오른쪽으로 3구간 떨어진 곳의 점 A를 양의 부호 + 를 사용하여 +3으로 나타내면, 왼쪽으로 3구간 떨어진 점 B는 음의 부호 − 를 사용하여 −3으로 나타낼 수 있다.



또 서로 반대인 성질을 갖는 수량, 이를테면 2원 이익과 2원 손해를 각각 +2, −2로, 동쪽으로 3m 가기와 서쪽으로 3m 가기를 각각 +3, −3이라 할 때, 이들을 각각 다음과 같이 길이가 2, 3인 화살표로 나타낼 수 있다. 이 때 2원 이익과 2원 손해인 경우에는 1원을 단위 길이로, 동쪽으로 3m 가기와 서쪽으로 3m 가기에서는 1m를 단위 길이로 한 것이다.



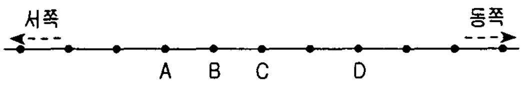
이 때, 이를테면 10원, 15원, 30원의 각각에서 2원의 이익이 있는 경우의 결과는 어느 경우에나 모두 주어진 금액에 2원이 더해진

3) 본 논문에는 지면 관계상 지도 내용 전부를 수록하지 않고 일부만 수록하였다.

12원, 17원, 32원이고, 여기서 2원 이익을 +2로 나타내면 각각의 주어진 금액에서 시작하는 오른쪽으로 향하는 길이가 2인 화살표를 이용하여 [그림 Ⅲ-1]과 같이 나타낼 수 있다.

문제 10원, 15원, 30원의 각각에서 2원의 손해가 있는 경우에 화살표를 이용하여 위와 같이 나타내어라.

문제 다음의 4 지점 A, B ,C, D에서 동쪽으로 3m간 것과 서쪽으로 3m간 것을 위와 같이 화살표를 이용하여 나타내어라. (아래 그림에서 이웃하는 두 점 사이의 거리 는 1m를 나타내는 것으로 한다.)



문제 다음 화살표에서 ㉮를 +3, ㉯를 −2로 할 때, ①, ②, ③, ④, ⑤ 중에서 +3, −2인 것을 말하여라[그림 Ⅲ-2].

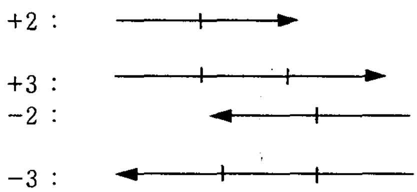
◉ 수의 범위 확장

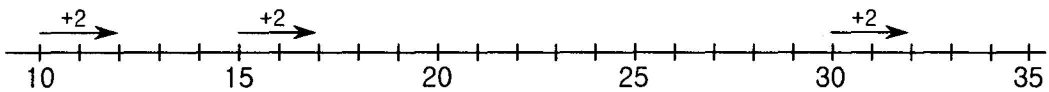
다음 그림은 초등학교에서 배운 수직선에 0의 왼쪽 부분에 오른쪽 부분과 같은 단위 길이를 나타낸 선을 덧 붙여 나타낸 것이다.[그림 Ⅲ-3]

이제 양의 부호 + 와 음의 부호 − 를 사용하여 나타낸 수

+2, +3, −2, −3

에 해당하는 오른쪽 그림과 같은 화살표를 수직선 위의 점 O를 화살표가 시작하는 점으로 하여 나타내고, 그 끝점을 각각 +2, +3, −2, −3으로 하면 끝점은 다음 그림과 같다.

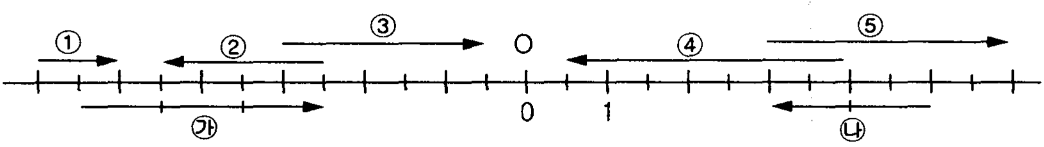




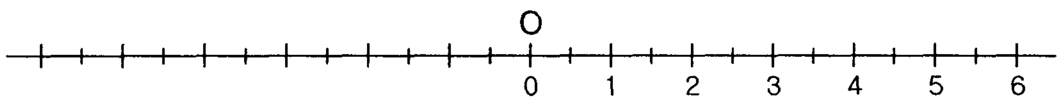
[그림 Ⅲ-1]

[참고] ① 서로 반대인 성질을 갖는 수를 반대의 수, 또는 반수라고 한다. 이를테면 +2, +3의 반대의 수는 각각 -2, -3이고, 거꾸로 -2, -3의 반대의 수는 각각 +2, +3이다.

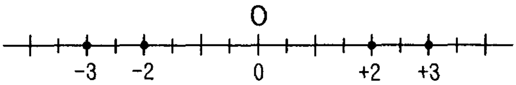
② 화살표에서 시작부분의 시작점과 끝 부분의 끝점은 오른쪽 그림과 같다.



[그림 Ⅲ-2]

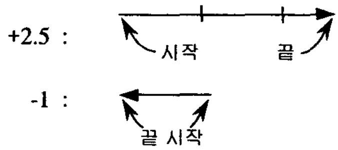


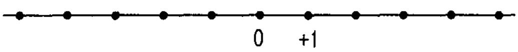
[그림 Ⅲ-3]



위의 그림은 수직선 위에서 점 O로부터 2, 3 단위 길이만큼 오른쪽에 있는 수를 각각 양의 부호 ＋를 사용하여 ＋2, ＋3으로, 또 O로부터 2, 3 단위 길이만큼 왼쪽에 있는 수를 각각 음의 부호 －를 사용하여 －2, －3과 같이 나타낸 것과 같다.

문제 (1) 오른쪽 그림과 같은 화살표를 위와 같은 방법으로 0을 시작하는 점으로 하여 다음의 수직선 위에 나타낼 때, 그 끝점을 부호 ＋, －를 사용하여 나타내어라.



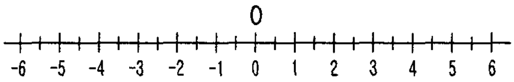


(2) 다음과 같이 부호 ＋, －를 사용하여 나타낸 수들을 각각 0을 시작으로 하는 화살표로 위의 수직선 위에 나타내어 보아라.

① ＋1　　　② ＋4

③ －2.5　　④ －4

위의 내용을 살펴보면 초등학교에서 배운 수직선에 대하여 0의 왼쪽 부분의 점에도 －1, －2, －3, … 과 같이 음의 부호 －를 붙인 수를 대응시킨 다음과 같은 수직선을 생각할 수 있다. 이때 0에 대응하는 점 O를 원점이라고 부른다.



여기서 자연수 1, 2, 3, …은 부호 ＋를 붙인 수 ＋1, ＋2, ＋3, …과 같음을 알 수 있다. 이와 같이 자연수 1, 2, 3, …에 양의 부호 ＋를 붙인 수 ＋1, ＋2, ＋3, …를 양의 정수라 하고, 이들의 반대의 수 －1, －2, －3, …과 같이 음의 부호 －를 붙인 수를 음의 정수라고 한다. 그리고, 양의 정수, 영, 음의 정수를 통틀어 **정수**라고 한다.

[참고]① 양의 정수는 바로 자연수를 뜻한다. 곧, +1 = 1, +2 = 2, +3 = 3, …

② +1, +2, … 는 양수 1, 양수 2, … 라고 읽으며, -1, -2, … 는 음수 1, 음수 2, … 라고 읽는다. 그리고 위의 수직선은 양의 정수, 영, 음의 정수를 함께 나타낸 수직선이다.

◉ 유리수

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{2}(=2)$, …

와 같이 분모, 분자가 자연수인 분수로 나타낼 수 있는 수를 양의 유리수라 하고, 이들의 반대의 수인

$-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{4}{2}(=-2)$, …

와 같이 양의 유리수에 음의 부호 －를 붙인 수를 음의 유리수라고 한다.

그리고 양의 유리수, 0, 음의 유리수를 통틀어 유리수라고 한다. 특히

$0=\frac{0}{1}$, $1=\frac{1}{1}$, $2=\frac{2}{1}$, $-5=-\frac{5}{1}$, …

에서 모든 정수는 유리수임을 알 수 있다.

[참고]① 양의 유리수는 양의 부호 ＋를 붙여 $+\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{3}$, $+\frac{4}{2}(=+2)$,… 와 같이 나타내기도 한다,

② 한 유리수는 여러 가지 방법으로 나타낼

수 있다.

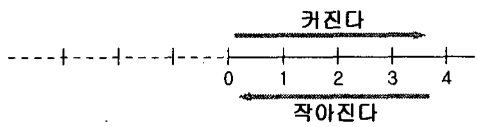
$$3=\frac{3}{1}=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\cdots,\quad -\frac{2}{7}=-\frac{4}{14}$$
$$=-\frac{6}{21}=\cdots$$

◉ 수의 대소 관계

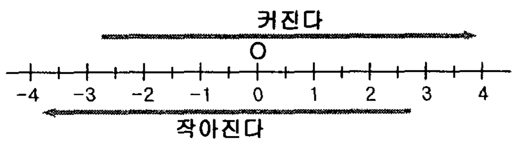
수직선 위에서 0보다 오른쪽에 나타내어진 수들은 이를테면

$1.5<3$

과 같이 오른쪽에 있는 수가 그 수의 왼쪽에 있는 수보다 크다는 것을 초등학교에서 이미 배웠다.



마찬가지로 아래 그림에서와 같이 0과 0보다 왼쪽에 있는 수들을 포함한 수직선 위에서도 오른쪽에 있는 수가 그 수의 왼쪽에 있는 수 보다 크다고 하고, 왼쪽에 있는 수는 그 수의 오른쪽에 있는 수 보다 작다고 한다.



예 1 (1) 수직선 위에서 -1은 0보다 왼쪽에 있으므로

-1은 0보다 작다. 곧, $-1<0$

이 때, 0은 -1보다 오른쪽에 있으므로

0은 -1보다 크다. 곧, $0>-1$이다.

[참고] $-1<0$ 은 $0>-1$ 과 같다.

(2) 수직선 위에서 -3.5는 -2보다 왼쪽에 있으므로

-3.5는 -2보다 작다. 곧

$-3.5<-2$

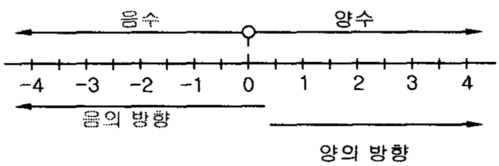
이 때, -2는 -3.5보다 오른쪽에 있으므로

-2는 -3.5보다 크다. 곧

$-2>-3.5$ 이다.

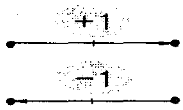
[참고] $-3.5<-2$ 는 $-2>-3.5$ 와 같다.

이상에서 이를테면, 원점 O로부터 각각 한 단위, 두 단위만큼 오른쪽에 있는 수 1, 2는 수 0보다 각각 1, 2만큼 큰 수이고, 원점 O로부터 각각 한 단위, 두 단위만큼 왼쪽에 있는 수 -1, -2는 수 0보다 각각 1, 2만큼 작은 수이다. 이와 같이 0보다 작은 수도 함께 생각할 때, 0보다 큰 수를 양수, 0보다 작은 수를 음수라고 한다. 0은 양수도 음수도 아니다. 그리고 수직선 위에서 왼쪽에서 오른쪽으로의 방향을 양의 방향, 이와 반대인 방향을 음의 방향이라고 한다.

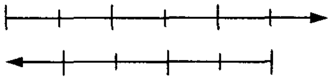


예 2 0.1, 2.5, $\frac{8}{3}$, …등과 같은 양의 유리수는 양수이고, -0.5, -1, $-\frac{8}{3}$, …등과 같은 음의 유리수는 음수이다.

문제 오른쪽 그림은 1 단위 길이로 양의 방향의 화살표는 양수 $+1$, 음의 방향의 화살표는 음수 -1을 나타낸 것이다.



(1) 다음 화살표가 나타내는 수와 크기 관계를 말하여라.

①
②


(2) 다음 수를 나타내는 화살표를 그리고 그 크기 관계를 말하여라.

① $+4$, $+0.5$

② -0.5, -4

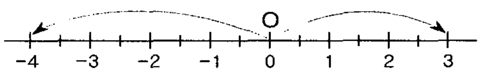
이상으로부터 음수, 영, 양수들 사이의 대소 관계는 다음과 같음을 알 수 있다.

음수는 0보다 작고, 양수는 0보다 크며 음수는 양수보다 작다. 그리고 양수와 양수, 음수와 음수끼리의 수에 대하여는 양수끼리에서는 원점에서 멀리 떨어져 있는 수, 곧 절대값이 큰 수가 절대값이 작은 수 보다 크고, 음수끼리에서는 원점에서 멀리 떨어져 있는 수, 곧 절대값이 큰 수가 절대값이 작은 수 보다 작다.

예 3 7의 절대값은 7은 3의 절대값 3보다 크므로 $7>3$
-6의 절대값 6은 -2의 절대값 2보다 크므로 $-6<-2$

-4, 0, 3의 대소 관계를 부등호를 사용하여 나타내면, $-4<0$, $0<3$ 이다.

이것을 $-4<0<3$ 또는 $3>0>-4$ 와 같이 나타낸다.



[참고] 「$-4<0$, $0<3$」은 「$-4<0$ 이고 $0<3$」을 뜻한다.

그리고 「□가 2보다 크거나 같다.」또는 「□가 2이상이다.」라고 하는 것을

$$\square \geqq 2$$

와 같이 나타낸다. 곧, 기호 $\geqq$ 는「 > 또는 = 」를 뜻한다.

◉ 양수, 음수의 덧셈

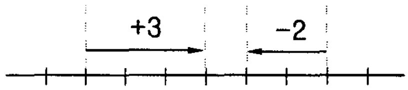
□ 수직선 위의 원점 O에서 시작하여 다음과 같이 계속 두 번 걸어가면 결과적으로 처음 지점 O에서 어느 쪽으로 얼마만큼 간 것이 되는가?

① 동쪽으로 2단위 길이를 간 후, 계속 동쪽으로 3단위의 길이를 간다.

② 동쪽으로 2단위 길이를 간 후, 그곳에서 거꾸로 계속 서쪽으로 3단위의 길이를 간다.

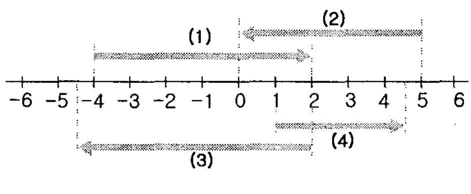
양수, 음수의 덧셈은 화살표, 곧 양수는 오른쪽으로 향하는 화살표, 음수는 왼쪽으로 향하는 화살표를 사용하여 수직선을 이용하면 편리하다.

예 1 두 수 $+3$, -2를 화살표를 사용하여 나타내면 아래그림과 같다.



[참고] 화살표를 사용하여 양수, 음수를 나타낼 때, 왼쪽 그림과 같이 화살표의 시작점 위치는 어느 곳에서 시작하여도 관계없고, 단지 길이와 화살표 방향만 관계된다.

문제 앞의 **예 1**에서와 같이 생각하여 오른쪽 그림의 화살표 (1), (2), (3), (4)가 나타는 수를 말하여라.

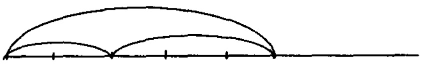


초등학교에서 2 + 3은 이를테면 다음 그림과 같이 설명하였다.

(가)

●● + ●●● = ●●●●●

(나)



첫 번째 (가)의 경우에는 2개의 ●에 다음으로 계속하여 3개의 ●를 덧 붙여서 처음부터 덧붙인 끝까지의 개수로

① 처음의 2개를 늘어놓아 세고

② 그 끝에서 시작하는 다음의 3개를 늘어놓아 계속 세어나가

③ 그 끝에 세어진 수를 두 수의 합 2 + 3으로 한 것이고, 두 번째의 경우에는 단위 길이가 2개인 선분에 잇대어 단위 길이가 3개인 선분을 나타내어 처음 선분이 시작한 곳에서부터 두 번째 선분이 끝난 곳까지의 선분의 길이로

① 처음의 길이가 2인 선분을 나타내고

② 그 끝에서 시작하는 길이가 3인 선분을 덧붙여서 나타내어

③ 처음 시작한 곳에서 두 번째 선분이 끝난 곳까지의 선분의 길이를 두 선분의 길이의 합 2 + 3으로 한 것이다.

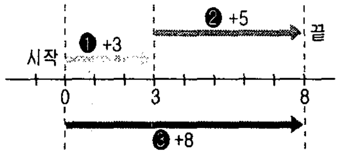
이와 같은 방법으로 수직선 위에서 두 수의 덧셈은 우선 첫 번째 수를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고, 그 끝점에서 시작하는 화살표로 두 번째 수를 나타내어 그 끝점의 수를 두 수의 합으로 한다.

곧, 두 수의 합을 나타내는 화살표는 첫 번째 화살표가 시작하는 점에서 시작하여 두 번째 화살표가 끝나는 점에서 끝난다.

예 2

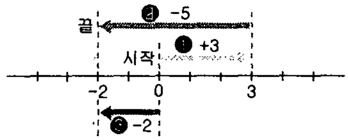
(양수)+(양수)

$(+3)+(+5)=+8$



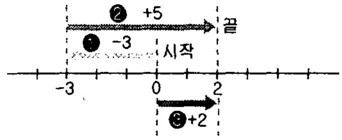
(양수)+(음수)

$(+3)+(-5)=-2$



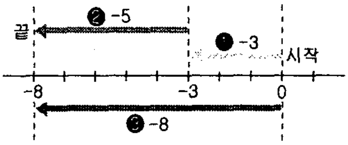
(음수)+(양수)

$(-3)+(+5)=+2$



(음수)+(음수)

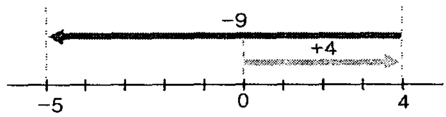
$(-3)+(-5)=-8$



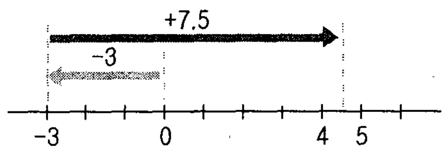
[참고] 위의 그림에서 번호 ❶, ❷, ❸은 주어진 수 곧, 화살표를 그리는 순서를 나타낸다.

문제 다음 각 그림의 화살표로 나타낸 덧셈을 식으로 나타내어라.

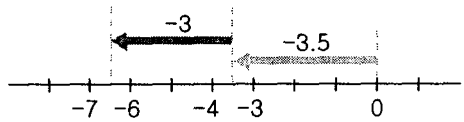
(1)



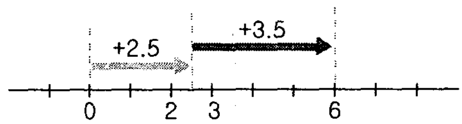
(2)



(3)



(4)



앞에서와 같이 수직선을 사용하여 덧셈 계산을 할 때, $-425+4317$ 이나 $-2\frac{3}{7}+4\frac{1}{6}$ 과 같은 덧셈은 수직선 위에 나타내어 다루기가 쉽지 않다. 왜냐하면, $-425+4317$ 에서 -425 는 0 에 대해서 작은 수이고 4317은 0에 대하여 큰 수이므로 함께 수직선 위에 나타내기가 쉽지 않으며, $-2\frac{3}{7}+4\frac{1}{6}$ 에서 분수 $\frac{3}{7}$, $\frac{1}{6}$과 그 합 $1\frac{31}{42}$에서 나타나는 분수 $\frac{31}{42}$을 수직선 위에 정확히 나타내기가 쉽지 않기 때문이다. 실제로 덧셈은 수직선을 사용하지 않고 절대값과 각 수의 부호를 사용하여 할 수 있다. 이를테면, 예2의 덧셈

$(+3)+(+5)$, $(-3)+(-5)$

$(+3)+(-5)$, $(-3)+(+5)$

는 각 수의 절대값과 부호를 사용하여 다음과 같이 계산하여도 그 결과는 같다.

$(+3)+(+5)=+(3+5)$, $(-3)+(-5)=-(3+5)$

$(+3)+(-5)=-(5-3)$, $(-3)+(+5)=+(5-3)$

[참고] 수직선 위에서 화살표를 사용하여 양수, 음수까지 확장된 수들의 덧셈을 알아본 것은 그 계산 과정의 이해를 돕기 위한 것이고, 실제 계산은 덧셈의 식에서 절대값을 사용하여 계산한다.

◉ 양수, 음수의 뺄셈

뺄셈, 이를테면

$$5-3=\square$$

는 덧셈으로 바꾸어 쓴

$$\square+3=5$$

에서 □안의 수를 구하는 것으로 배웠다. 이 방법은 양수, 음수까지 확장한 수에 대하여도 그대로 사용된다.

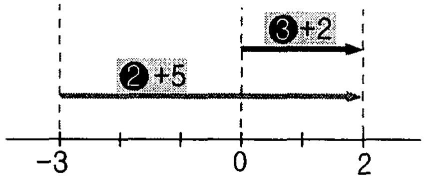
이를테면, 뺄셈

$$(+2)-(+5)=\square$$

는 위와 같이 덧셈으로 바꾸어 생각하면, 덧셈

$$\square+(+5)=+2$$

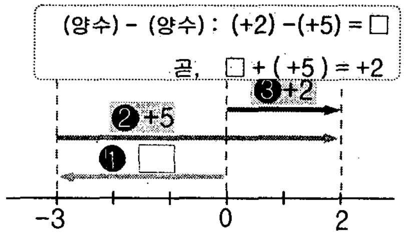
에서 □ 안의 수를 구하는 것과 같다.



이 때, 이 덧셈은 덧셈 방법에 따라 화살표를 사용하여 수직선 위에 나타내면, 합이 $+2$ 이므로 두 번째 수 $+5$ 를 나타내는 화살표 ②의 끝점은 위의 그림과 같이 화살표 ③인 $+2$ 에 끝점에 와야만 한다. 따라서 첫 번째 수 □는 다음 그림과 같이 원점에서 시작하고 두 번째 수 $+5$ 를 나타내는 화살표의 시작점이 끝점인 화살표로 나타내어진 -3 으로

$$\boxed{-3}+(+5)=+2$$

임을 알 수 있다.



곧,

$(+2)-(+5)=-3$ … ①

이다. 그런데 이 결과는 $+2$ 에 $+5$ 의 화살표의 방향을 바꾼 수 -5 를 더한 덧셈

$(+2)+(-5)=-3$ … ②

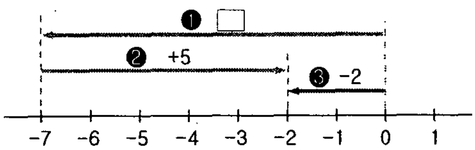
과 같다.

여기서 ①, ② 를 살펴보면

$(+2)-(+5)=(+2)+(-5)$
$=-3$

이므로, 뺄셈은 빼는 수를 반대의 수 곧, 빼는 수의 부호를 바꾸어 덧셈으로 계산할 수 있다.

$(+2)+(-5)=\square$



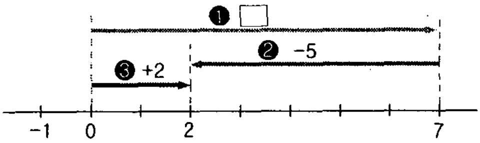
문제 위에서와 같은 방법으로 수직선을 이용하여

$(-2)-(+5)$
$=(-2)+(-5)$

가 성립함을 알아보아라.

[참고] 오른쪽 위 그림은 $(-2)-(+5)=\square$ 를 덧셈 $\square+5=-2$ 로 바꾸어 나타낸 것이다.
$(-2)+(-5)$를 수직선 위에 그려서 서로 비교하여보아라.

(양수) - (음수) : $(+2)-(-5)=\square$
곧, $\square+(-5)=+2$



빼는 수가 음수인 경우의 뺄셈, 이를테면

$(+2)-(-5)=\boxed{}$

는 앞에서와 같이 덧셈으로 바꾸어 생각하면, 덧셈

$\boxed{}+(-5)=+2$

에서 □안의 수를 구하는 것과 같다. 수직선 위에서의 덧셈 방법을 생각하면 위의 그림에서 □안의 수는 +7로 $\boxed{+7}+(-5)=+2$임을 알 수 있다. 곧,

$(+2)-(-5)=+7$ … ③

이다. 그런데 이 결과는 +2에 −5의 화살표의 방향을 바꾼 수 +5를 더한 덧셈

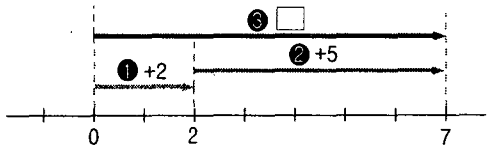
$(+2)+(+5)=+7$ … ④

과 같다. 여기서 ③, ④를 살펴보면

$(+2)-(-5)=(+2)+(+5)$
$=+7$

이므로, 앞에서와 같이 뺄셈은 빼는 수를 반대의 수 곧, 부호를 바꾸어 덧셈으로 계산할 수 있다.

$(+2)+(+5)=\square$

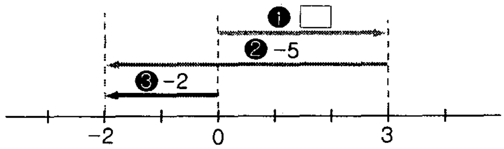


문제 위에서와 같은 방법으로 수직선을 이용하여

$(-2)-(-5)$
$=(-2)+(+5)$

가 성립함을 알아보아라.

(음수) - (음수) : $(-2)-(-5)=\square$
곧, $\square+(-5)=-2$



이상으로부터 뺄셈은 빼는 수를 반대의 수 곧, 빼는 수의 부호를 바꾸어 덧셈으로 계산할 수 있다.

◉ 양수, 음수의 곱셈

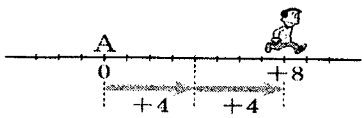
① 2 시간 후를 +2로 나타낸다면 2시간 전은 어떻게 나타낼 수 있는가?

② 동쪽으로 매시 4km 의 속력을 +4 로 나타내면, 서쪽으로 매시 4km 의 속력은 어떻게 나타낼 수 있는가?

③ 동쪽으로 8km 떨어진 지점을 +8 로 나타내면, 서쪽으로 8km 떨어진 지점은 어떻게 나타낼 수 있는가?

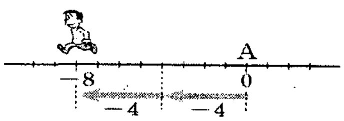
지수는 현재 동서로 뻗어 있는 직선 도로 위의 점 A에 와있다. 동쪽으로 가는 것과 현재보다 나중 시간을 각각 양수, 서쪽으로 가는 것과 현재보다 앞의 시간을 각각 음수로 나타내자. 이 때 점 A를 수직선 위의 원점 O로 하여 (속력)×(시간) = (거리) 에서 다음을 생각할 수 있다. 다음 $\boxed{\quad}$ 안에 알맞게 써넣어라.

① 동쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 후의 지점을



$(+4)\times(+2)$ (양수)×(양수)
$= +8$

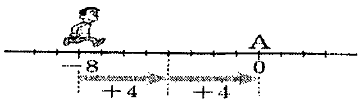
로 하면, 서쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 후의 지점은



$(-4)\times(+2)$ (음수)×(양수)
$= \boxed{\quad}$

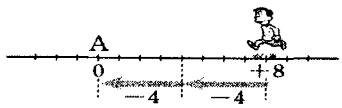
이다.

② 동쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 전의 지점을



$(+4)\times(-2)$ (양수)×(음수)
$= -8$

로 하면, 서쪽으로 매시 4km의 속력으로 걸어갈 때 현재 보다 2시간 전의 지점은



$(-4)\times(-2)$ (음수)×(음수)
$= \boxed{\quad}$

이다.

앞의 $(+4)\times(+2)$, $(-4)\times(+2)$ 에서 곱하는 수가 양수 +2인 경우엔 양의 부호를 생략하여 나타내면 그 곱은 $(+4)\times2$, $(-4)\times2$ 에서

$(+4)\times(+2)=(+4)\times2$: (양수)× (양수)
$=(+4)+(+4)$
$=+8$: 양수
$(-4)\times(+2)=(-4)\times2$: (음수)× (양수)
$=(-4)+(-4)$
$=-8$: 음수

에서, 곱하는 수가 양수 +2인 경우 그 곱은 곱하여지는 수의 2배임을 알 수 있다.

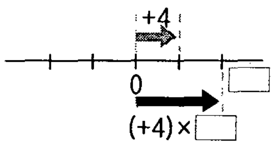
한편 , 앞의 $(+4)\times(-2)$, $(-4)\times(-2)$ 에서

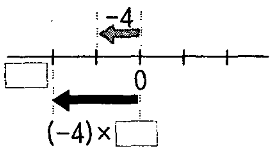
$(+4)\times(-2)=-8$: (양수)× (음수)
$=(-4)+(-4)$
$=(-4)\times2$: 음수
$(-4)\times(-2)=+8$: (음수)× (음수)
$=(+4)+(+4)$
$=(+4)\times2$: 양수

이므로 곱하는 수가 음수 −2인 경우 그 곱은 곱하임수와 반대의 수의 2배임을 알 수 있다.

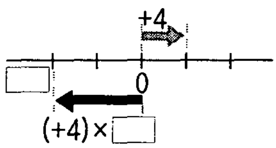
문제 위의 내용을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다. 오른쪽 그림의 □ 안에 알맞게 써넣어라.

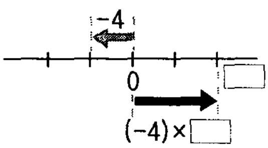
(1) 어떤 수에 양수 2를 곱하는 것은 0으로부터 그 수까지의 거리를 같은 방향으로 2배 만큼 이동한 것으로 오른쪽 그림과 같다.





(2) 어떤 수에 음수 −2를 곱하는 것은 0으로부터 그 수까지의 거리를 반대인 방향으로 2배 만큼 이동한 것으로 오른쪽 그림과 같다.





수직선 위에서 두 수의 곱셈은 곱하는 수가 양수인 경우에는 곱하임수와 같은 방향으로 그리고 음수인 경우에는 곱하임수와 반대 방향으로 크기가 두 수의 절대값의 곱인 화살표로 나타내어진다.

이상에서 두 수의 곱은

(1) 첫 번째 수(곱하임수)를 원점 O에서 시작하는 화살표로 나타내고,

(2) 두 번째 수(곱하는 수)가

① 양수일 때는 첫 번째 수의 화살표와 같은 방향으로 크기가 두 수의 절대값의 곱인 화살표로 나타내어

② 음수일 때는 첫 번째 수의 화살표와 반대 방향으로 크기가 두 수의 절대값의 곱인 화살표로 나타내어

(3) 그 끝점의 수를 두 수의 곱으로 한다.

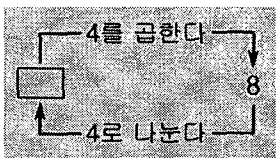
위의 사실을 생각하여 곱셈도 덧셈에서와 같이 수직선을 사용하지 않고 절대값과 각 수의 부호를 사용하여 할 수 있다. 곧

같은 부호를 가진 두 수의 곱은 그들의 절대값의 곱에 양의 부호를 붙이고, 서로 다른 부호를 가진 두수의 곱은 그들의 절대값의 곱에 음의 부호를 붙인다.

◉ 나눗셈

초등학교에서 나눗셈, 이를테면

8÷4 = □는 곱셈 □ ×4 = 8에서 □ 안의 수 2를 구하는 것으로 배웠다.



양수나 음수의 나눗셈에서도 이와 같이 나눗셈을 곱셈으로 바꾸어 계산할 수 있다. 이를테면,

(−8)÷4 = □ 에서 □는 □ ×4 = −8 에서 □ 안의 수 −2를 구하는 것과 같다. 곧,

$$(-8)\div4=-2$$

이다. 또, 같은 방법에 의하면 다음이 성립한다.

곱셈		나눗셈
$(+2)\times(+4)=+8$	➡	$(+8)\div(+4)=+2$, $(+8)\div(+2)=+4$
$(+2)\times(-4)=-8$	➡	$(-8)\div(-4)=+2$, $(-8)\div(+2)=-4$
$(-2)\times(+4)=-8$	➡	$(-8)\div(+4)=-2$, $(-8)\div(-2)=+4$
$(-2)\times(-4)=-8$	➡	$(+8)\div(-4)=-2$, $(+8)\div(-2)=-4$

[그림Ⅲ-1]

[참고] 수직선 위에서 화살표를 사용하여 양수, 음수까지 확장된 수들의 덧셈, 곱셈을 알아본 것은 그 계산 과정의 이해를 돕기 위한 것이고, 실제 계산은 덧셈, 곱셈의 식에서 절대값을 사용하여 계산한다.

2. 지도 결과 분석

본 절에서는 1절에서 제시한 학습 내용의 지도가능성을 알아보고자 중학교 1학년 학생들을 대상으로 지도하여 보고 그 결과를 분석하였다. 위에 제시된 학습내용으로 학습한 실험반 학생과 교과서에 따라 학습한 비교반 학생들 간의 양수, 음수의 이해, 두 수간의 덧셈과 뺄셈의 이해 그리고 곱셈과 나눗셈의 이해에 대한 평가(평가 문항지는 부록1에 수록) 결과에 대한 분석은 다음과 같다.[4)]

가. 양수, 음수의 이해 확인 문제(문항 1 ~ 5)

[표 Ⅲ-1]을 살펴보면 실험반과 비교반에 에 대하여 양수와 음수의 이해 확인 문제인 문항 1, 0을 시점으로 하였을 때 주어진 양수, 음수에 대하여 수직선위에 화살표로 나타내는 문제인 문항 2에서의 정답 비율은 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

그러나 두 집단 간에 0을 시점으로 하지 않고 임의의 점을 시점으로 하여 화살표가 나타내는 수를 찾는 문제인 3번 문항에 대하여는 35%, 정수가 아닌 유리수를 찾는 문제인 4번 문항에 대하여는 28%, 대소 관계에 관한 문제인 문항 5에 대하여는 12%의 차이를 보였다.

나. 덧셈과 뺄셈의 이해 확인 문제(문항 6~ 10)

[표 Ⅲ-2]를 살펴보면 실험반과 비교반의 정답 비율은 수직선위에서 화살표가 나타내는 덧셈 식을 구하고 덧셈의 결과를 화살표로 나타내는 문제인 문항 6에 대하여는 약 27%, 부호가 같은 두수의 합의 부호, 부호가 다른 합의 부호와 관련된 문제인 문항 7에서는 약 18%, 양수와 양수의 덧셈, 양수와 음수의 덧셈 문제인 문항 8에서는 약 28%, 양수와 양수의 뺄셈

[표 Ⅲ-1] 양수, 음수의 이해

대상 \ 문항번호	1	2	3	4	5	전체 학생수
	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	
비교반	24(73)	24(73)	15(45)	18(55)	17(52)	33
실험반	32(86)	29(78)	26(70)	31(83)	24(64)	37

4) 본 연구는 지도 내용을 개발하기 위한 것이 주 목적이므로 연구 방법은 자세히 다루지 않는다. 실험은 대전의 A중학교 학생을 대상으로 하였으며, 비교반(33명)에서는 기존 교과서로 지도하였으며, 실험반(37명)에서는 1절에서 개발된 내용으로 지도하였다..

을 화살표로 제시하여 제시한 그림에서 수를 채워 넣는 문제인 문항 9에서는 약 17%, 양수와 양수, 양수와 음수, 음수와 양수, 음수와 음수의 뺄셈 문제인 문항 10에서는 약 17%의 차이를 보이고 있다.

다. 곱셈과 나눗셈의 이해 확인 문제(문항 11～14)

[표 Ⅲ-3]를 살펴보면 실험반과 비교반의 정답 비율은 양수, 음수의 곱셈을 0을 시작점으로하여 화살표로 나타내었을 때 곱셈식에 들어가는 수와 결과를 제시하는 문제인 문항 11에 대하여는 약 35%의 차이를 보였으며, 양수와 양수, 양수와 음수, 음수와 음수의 곱셈의 결과를 묻는 문제인 문항 12에서는 거의 차이를 보이지 않았다.

그리고 두 수의 곱셈의 결과를 제시하고 곱셈의 결과를 주어지 두수 중 어떤 하나의 수로 나눗셈을 하였을 때 결과를 묻는 문제인 문항 13과 양수와 양수, 양수와 음수, 음수와 음수의 나눗셈의 결과를 묻는 문제인 문항 14에 대하여는 두 집단 간의 약 10%의 차이를 보이고 있다.

이상에서 전체적으로 실험반 학생들이 비교반 학생들보다 학습에 대한 효과가 좋게 나타나 있다. 실제로 비교반 학생들을 면담한 결과, 거의 모든 학생들이 양수 음수의 계산에 대하여 그 과정에 대한 이해를 한 후 계산을 하는 것이 아니라 계산 방법을 암기하여 계산을 하고 있음을 알 수 있었다. 따라서 초등학교 과정에 연계된 체계적인 방법으로 양수 음수의 화살표를 사용한 가시적 표현과 그에 따른 계산 과정을 이해하게 하여 계산을 할 수 있도록 지도는 하는 것은 바람직한 지도임을 알 수 있다. 위의 자료에 대한 통계적 처리는 부록2에 첨부하였다.

Ⅳ. 결 론

수의 연산을 잘 할 수 있는 것은 수학학습에 중요한 사항이다. 수의 확장으로 제 6차 교육과정에서와 달리 정수 부분이 중학교 과정에서

[표 Ⅲ-2] 양수와 음수의 덧셈과 뺄셈의 이해

대상 \ 문항번호	6	7	8	9	10	전체 학생수
	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	
비교반	8(24)	6(18)	15(45)	21(64)	16(48)	33
실험반	19(51)	17(46)	27(73)	30(81)	24(65)	37

[표 Ⅲ-3] 양수와 음수의 곱셈과 나눗셈의 이해

대상 \ 문항번호	11	12	13	14	전체 학생수
	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	정답 인원수(%)	
비교반	11(33)	27(82)	25(76)	25(76)	33
실험반	25(68)	32(86)	32(86)	32(86)	37

처음 도입되므로 제 6차에서의 교과용 도서에서 보다는 도입과정과 연산과정 및 연산실행에 체계적이고 충분한 학습이 이루어 질 수 있도록 보다 많은 지면 할애가 필요하다.

양의 부호와 음의 부호를 올바르게 읽고 사용하도록 하여야 하며, 반대인 성질을 갖는 수로 반대의 수를 정의하여 활용하는 것이 바람직하다. 유리수에 대한 일부 교과용 도서들의 정의는 재고해보아야 하며, 양수와 음수는 대소 관계를 다루는 곳에서 그 정의를 하는 것이 다음 과정에로의 연계에도 바람직하다.

또 양의 부호와 음의 부호가 붙은 수에 대한 가시적인 표현을 충분히 익히게 하여 초등학교에서의 연산 도입을 구체적이고 가시적으로 처리한 것과 같이 양수, 음수의 연산에도 활용할 수 있도록 하게 하는 것이 바람직하다.

특히 구체적이고 체계적으로 구성된 가시적인 연산 지도는 연산 개념 형성에 중요한 역할을 하므로, 가시적인 방법을 사용하여 연산의 도입 과정을 보다 구체적이고 체계적으로 지도하여 정확한 이해를 할 수 있도록 해야 한다. 그리고 이와 같은 과정을 통한 연산의 이해를 절대값을 사용한 연산으로 일반화시켜 양수, 음수의 연산을 원활하게 할 수 있게 해야만 교과서의 집필상의 유의점에 제시한 "수학의 기초적인 개념, 원리, 법칙을 명확히 이해하고, 수학적인 용어나 기호를 정확하게 사용하도록 조직한다."에도 부합된다.

본 연구에서는 화살표(유향선분)를 사용하여 양수, 음수를 가시적으로 도입한 후에 이들을 사용하여 초등학교에서의 양수 만에 대한 계산 방법을 양수, 음수까지 확장된 수에까지 그대로 적용한 학습 내용을 제시하였다. 그리고 제시한 학습 내용으로 지도를 하여본 결과 이와 같이 연계된 학습내용이 보다 바람직한 것임을 알 수 있었다.

참고문헌

강옥기·정순영·이환철(2001). **중학교 수학 7-가.** (주)두산.

강행고·이화영·박성기·박진석·이용완·한경연·이준홍·이혜련·송미현·박정숙(2001). **중학교 수학 7-가.** (주)중앙교육진흥연구소.

고성은·박복현·김준회·최수일·강운중·소순영(2001). **중학교 수학 7-가.** (주)블랙박스.

교육부(1997). **수학과 교육과정(제 7차 교육과정).** 교육부.

_____(1999), **중학교 교육과정 해설(Ⅲ)(제 7차 교육 과정).** 교육부.

구광조·박한식(1997). **중학교 수학 1**, 지학사

금종해·이만근·이미라·김영주(2001). **중학교 수학 7-가.** (주)고려출판.

김연식·김흥기(1997). **중학교 수학 1.** 두산동아.

김연식·김흥기(2000). **중학교 수학 1 교사용 지도서.** (주) 두산.

박규홍·한옥동·김성국·임창우·고성군·김유태·육상국·박재용(2001). **중학교 수학 7-가.** 두레교육(주).

박두일·신동선·강영환·윤재성·김인종(2002). **중학교 수학 7-가.** (주)교학사.

박윤범·박혜숙·권혁천·육인선(2001). **중학교 수학 7-가.** 대한교과서.

배종수·박종률·윤행원·유종광·김문환·민기열·박동익·우현철(2001). **중학교 수학 7-가.** 한성교육연구소.

신항균(2001). **중학교 수학 7-가**, 형설출판사

양승갑 외 6인(2001), **중학교 수학 7-가.** (주)금성출판사.

이영하·허민·박영훈·여태경(2001). **중학교 수학 7-가.** (주) 교문사.

이준열·장훈·최부림·남호영·이상은(2001). **중학교 수학 7-가.** (주)도서출판 디딤돌.

전평국·신동윤·방승진·황현모·정석규(2002). **중학교 수학 7-가**. 교학연구사.

조태근·임성모·정상권·이재학·이성재(2001). **중학교 수학 7-가**. (주)금성출판사.

최용준(2002). **중학교 수학 7-가**. (주)천재교육

황석근·이재돈(2001). **중학교 수학 7-가**. 한서출판사.

吾妻一興 외 30인(1998). 新編 新しい數學 1. 東京書籍.

赤 攝也 외 18인(1988). 新版 中學校數學 1. 大日本書籍.

一松 信 외 30인(1988). 中學校 數學 1. 學校圖書.

Charles R. I, Dossey, J. A., Leinwand. S. J., Selley S.. J., & Vonder Embse C. B. (1998). *Middle School MATH Course.1-Course.3*. Scott Foresman Addison Wesley.

Smith K. J. (2000). *MATHEMATICS : its power and utility*, Brooks/Cole Publishing Company.

On Teaching of Positive Numbers and Negative Numbers in the 7-th Grade Mathematics

Kim, Heung Ki (Dankook university)
Kim, Eung Seok (Dankook university, Student)

To be good at numeration is an important matter in learning mathematics. Unlike the 6-th curriculum, integers are introduced in middle school curriculum for the first time in the 7-th curriculum. Therefore, to help the students learn integers systematically and thoroughly, it is necessary that we allow more space for process of introduction, process of operations and practice of operations in the 7-th curriculum text book than that of 6-th curriculum text book.

As specific and systemic visualized teaching of operation is especially important in building the concept of operation, by using visualized teaching methods, students can understand the process of operation more fully and systematically. Moreover, students become proficient in operation of positive number and negative numbers by expending this learning process of operations to the operations used absolute value.

In 7-th grade mathematics, the expression of positive numbers and negative numbers visually are useful for understanding of operations for numbers. But it is not easy to do so.

In this paper we use arrows(directed segments) to express positive numbers and negative numbers visually and apply them to perform the operations for numbers.

Using arrows, we can extend the method used in elementary school mathematics to the methods for operations of positive numbers and negative number in 7-th grade mathematics.

By experiments, we can know that such processes of introduction for operations are effective and this way helps teachers teach and students learn.

* key words : positive sign(양의 부호), negative sign(음의 부호), positive number(양수), negative number(음수), arrow(화살표), operation(연산)

논문접수 : 2006. 2. 20
심사완료 : 2006. 3. 10

*부록 1: 평가 문항

[양수 음수의 이해 확인문제]

1. 다음 물음에 답하시오.

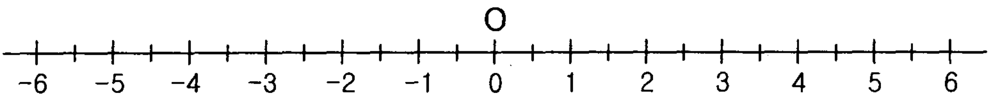
(1) 100원 수입을 +100으로 나타내면, 100원 지출은 어떻게 나타낼까?

(2) +3을 동쪽으로 3m가는 것을 나타낸 것으로 하면, −2는 무엇을 뜻하는가?

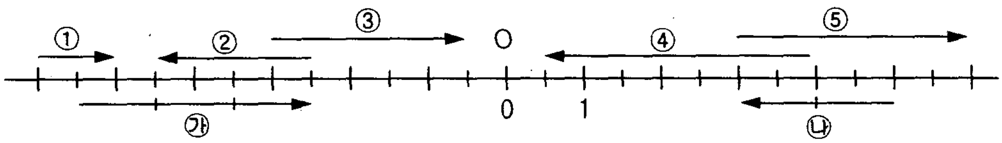
(3) 어떤 시각으로부터 2분 후와 2분 전을 양, 음의 부호 +, —를 사용하여 나타내어라.

2. 다음 수들을 각각 0을 시작으로 하는 화살표로 다음 수직선 위에 나타내어라.

① +1　　② +4　　③ −2.5　　④ −4



3. 다음 화살표에서 ㉮를 +3, ㉯를 −2로 할 때, ①, ②, ③, ④, ⑤ 가 나타내는 수를 말하시오.



4. 다음 수 중에서 정수가 아닌 유리수를 모두 찾으시오.

① $\frac{1}{3}$　　② 12　　③ $-\frac{5}{2}$　　④ 0　　⑤ −1

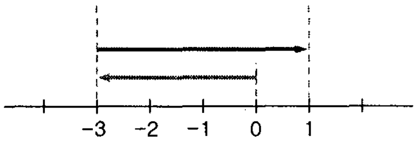
5. 다음 수 중에서 가장 큰 수는 어느 것인가? 또 절대값이 가장 큰 수는 어느 것인가?

(1) $-\frac{2}{3}$　　(2) 2.5　　(3) -3

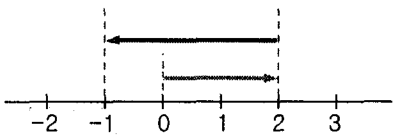
[덧셈과 뺄셈의 이해 확인문제]

6. 다음 수직선 위에 나타낸 화살표가 나타내는 덧셈을 식으로 쓰고 그 답을 화살표로 나타내시오.

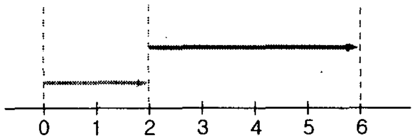
(1)



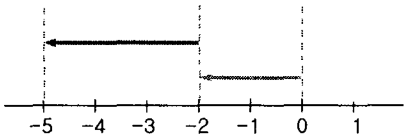
(2)



(3)



(4)



7. 일반으로 (- 0.31) + 1047, $\frac{3}{29}+(-\frac{23}{53})$ 과 같이 임의의 수에 대한 계산을 수직선 위에 화살표를 사용한 그림을 그려서 계산하기는 쉽지 않으므로, 절대값을 사용하여 계산한다. 다음 □ 안에 알맞게 써넣으시오.

부호가 같은 두 수의 합의

(1) 부호는 그 두 수와 □은 부호이고, (2) 절대값은 두 수의 절대값의 □과 같다.

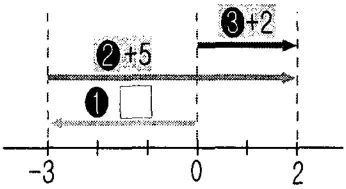
부호가 다른 두 수의 합의

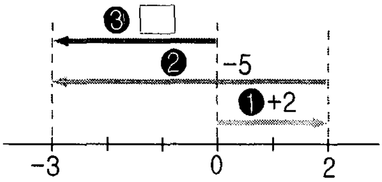
(1) 부호는 절대값이 □ 수의 부호이고, (2) 절대값은 두 수의 절대값의 □와 같다.

8. 다음 계산을 하시오.

(1) $(+3)+(+11)$ (2) $(+5)+(-6)$ (3) $(-4)+\left(+\frac{1}{2}\right)$ (4) $(-5)+\left(-\frac{3}{4}\right)$

9. 다음 그림은 뺄셈 (+2) - (+5) = □을 덧셈 □ + (+5) = +2 로 바꾸어 쓴 것을 나타낸 것과, (+2) + (-5) = □을 나타낸 것이다. 그림의 □ 안의 수는 각각 얼마인가요?.



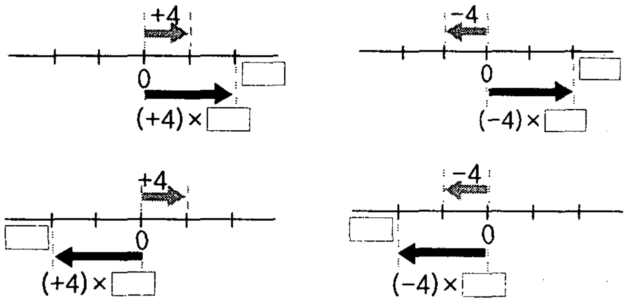


10. 다음 뺄셈을 덧셈으로 바꾸어 계산하시오.

(1) (+5) - (+2) (2) (+2) - (-3) (3) (-2) - (+4) (4) (-2) - (-5)

[곱셈과 나눗셈의 이해 확인문제]

11. 다음 그림은 양수, 음수의 곱셈을 나타낸 것이다. 그림의 □ 안에 알맞게 써 넣으시오



12. 다음 계산을 하시오.

(1) $(+3)\times(+7)$ (2) $(+3)\times(-4)$

(3) $(-4)\times(+5)$ (4) $(-2)\times(-3)$

13. 다음의 □ 안에 알맞게 써넣으시오.

$(+2)\times(+4) = +8$ ➡ $(+8)\div(+4) = \square$, $(+8)\div(+2) = \square$

$(+2)\times(-4) = -8$ ➡ $(-8)\div(-4) = \square$, $(-8)\div(+2) = \square$

$(-2)\times(+4) = -8$ ➡ $(-8)\div(+4) = \square$, $(-8)\div(-2) = \square$

$(-2)\times(-4) = -8$ ➡ $(+8)\div(-4) = \square$, $(+8)\div(-2) = \square$

14. 다음 계산을 하시오.

(1) $(+18)\div(-9)$ (2) $(+36)\div(+2)$ (3) $(-42)\div(+7)$ (4) $0\div(-7)$

부록 2: 실험집단과 비교집단의 수학 성취도 차이에 관한 통계표

검사의 신뢰도를 위하여 문항 내적 일관성 신뢰도인 Cronbach α를 구하였다. 수학 성취도 문항 14개에 대한 신뢰도 계수는 0.8934이다. 신뢰도 계수가 매우 높게 난 것으로 보아 이 검사의 신뢰도는 높게 나타나 있다.

다음의 <표 1>의 집단에 따른 학생들의 수학 성취도의 차이를 살펴보면, 문항 10과 14를 제외하고는 모두 .05 이상의 수준에서 비교집단과 실험집단의 평균차가 통계적으로 의미 있게 나타나고 있다.

<표 1> 실험집단과 비교집단의 수학 성취도 차이

문항	집단	평균	표준편차	t	p
1	비교집단	2.0606	1.19738	-2.404	.019*
	실험집단	2.6216	.72078		
2	비교집단	3.0000	1.73205	-2.753	.009**
	실험집단	3.8649	.53552		
3	비교집단	1.4545	1.95402	-2.449	.017*
	실험집단	2.5946	1.93591		
4	비교집단	2.3030	2.00756	-2.155	.035*
	실험집단	3.2432	1.58825		
5	비교집단	2.3030	2.00756	-2.360	.022*
	실험집단	3.2973	1.43110		
6	비교집단	.6061	1.45644	-2.058	.043*
	실험집단	1.4324	1.89356		
7	비교집단	1.2727	1.62544	-2.014	.048*
	실험집단	2.1081	1.82245		
8	비교집단	2.2727	1.58652	-2.271	.026*
	실험집단	3.0541	1.28983		
9	비교집단	3.1515	1.58353	-2.077	.043*
	실험집단	3.7838	.78652		
10	비교집단	2.3939	1.83609	-1.196	.236
	실험집단	2.8919	1.64627		
11	비교집단	1.5152	1.73424	-2.071	.042*
	실험집단	2.4054	1.84781		
12	비교집단	2.9697	1.42489	-2.297	.025*
	실험집단	3.6486	.97799		
13	비교집단	2.6667	1.51383	-2.676	.009**
	실험집단	3.5405	1.21552		
14	비교집단	3.1818	1.48859	-1.290	.201
	실험집단	3.5676	.98715		
종합	비교집단	31.1515	15.08335	-3.419	.001**
	실험집단	42.0541	11.52279		

**** p < .001, * p < .05**