

대칭단형 단순보의 등가보 변환에 의한 고유치 해석

Eigenvalue Analysis of Symmetrically Stepped Beams by Equivalent Beam Transformation

문 상 필*

정 재 철*

Moon, Sang-Pil

Jung, Jae-Chul

(논문접수일 : 2005년 5월 25일 ; 심사종료일 : 2006년 2월 13일)

요 지

보의 고유진동수는 보의 동적해석에서 중요한 역할을 한다. 보의 단면이 불규칙적으로 변하는 단형보의 고유진동수 산정은 해석상 복잡하고 어렵다. 이런 단형보의 해석은 주로 다자유도계 해석인 질량집중방법이 널리 사용되지만 이들 해석방법은 요소의 분할수나 계산의 반복수 또는 가정처짐곡선의 정확성 여부에 해석의 정밀성이 좌우된다. 본 연구는 대칭단형 단순보의 등가보 변환 방법과 그에 따른 고유치해석 방법을 제시하였으며 타 문헌의 예제와 여러 모델을 대상으로 그 타당성 및 실용성을 입증하였다.

핵심용어 : 단형보, 등가강성, 등가질량, 등가보, 고유치해석

Abstract

The natural frequency of a beam plays a critical role in the dynamic analysis of beams. Especially it is a complicated and difficult task to analyse the natural frequency of a stepped beam with an irregularly varying section. The lumped mass methods, multi-degree of freedom analyses, are mainly used for the analysis of this kind of stepped beams. The accuracy of these methods are determined by the number of the partitions of elements, the number of the iterations in calculation, and the accuracy of assumed mode shapes. This study presents a method of transformation from symmetrically stepped beams to an equivalent beam and a method of the eigenvalue analysis. Appropriateness and utility of this method are demonstrated by comparing examples from other literatures and various models.

keywords : stepped beam, equivalent stiffness, equivalent mass, equivalent beam, eigenvalue analysis

1. 서 론

1.1 개요

변단면 구조물은 균단면 구조물에 비해 경제적이며 미적 인 면과 역학적인 면에서 유리한 점을 지니고 있다. 또한 교량과 일반 건축물의 설비면에서 보(beam)밑의 설비공간 확보의 장점도 갖고 있다. 따라서 앞으로 많은 변단면 구조물의 출현이 예측되지만, 변단면 구조물 계산의 복잡성과 해석의 어려움 때문에 설계자들에게 외면당하여 왔다.

변단면 부재에는 단면이 규칙적으로 변하는 테이퍼보(tapered beam)와 불규칙적으로 변하는 단형보(step-

ped beam)등이 있으며, 이러한 변단면보(variable cross-sectional beam)로 이루어진 대부분의 구조물에서는 단면의 폭(width)이 일정하고, 그 축(depth)은 길이에 따라 선형 또는 비선형적으로 변한다. 이러한 변단면보의 진동이론은 항공, 토목, 선박, 기계공학응용에 매우 중요하며, 특히 이들 변단면보의 횡진동해석은 선박, 미사일, 헬리콥터, 고층 빌딩과 같은 규모가 큰 구조체 횡진동에 적용될 수 있다.

변단면보의 진동해석은 균단면보의 해석과 달리 보의 강성 EI 와 질량 m 이 전 길이에 일정하지 않기 때문에 해석의 어려움이 따르고 있으며, 특히 단형보(steped beam)는 테이퍼보(tapered beam)과 달리 강성 EI 와 질량 m 이 보의 길이에 따라 일정한 비율로 변하지 않기 때문에 그

* 책임저자, 정회원 · 국민대학교 건축학과 박사과정수료

전화: 02-574-4091 ; Fax: 02-574-4131

E-mail: fse21@naver.com

* 국민대학교 건축학과 명예교수 공학박사

• 이 논문에 대한 토론을 2006년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2006년 9월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

해석은 더욱 어렵다. 이러한 단형보(steppped beam)의 해석방법은 Rayleigh-Ritz 방법(Biggs, 1982), Finite Element Method(Paz, 1997), Stodola 방법(Hurty 등, 1967) 등의 다자유도계의 집중질량법(lumped mass method)이 널리 쓰이지만, 이들 해석방법은 요소의 분할수나 계산의 반복수 또는 가정처짐곡선의 정확성 여부에 해석의 정밀성이 좌우된다.

본 연구는 단형보(steppped beam)의 등가보 변환방법을 제시하고 등가 단자유도계 해석의 적용성 및 신뢰성을 검증하고자 한다.

1.2 연구의 범위 방법

보는 연속체의 한 예이다. 연속체로서의 보는 무한 자유도를 가지며 이들 분포된 질량은 보의 강성과 분리할 수 없다. 연속계는 질량과 강성, 감쇠가 분포되어 있다(김광식 등, 1985).

연속체로서의 이 진동은 위치와 시간의 함수로 나타내지고 운동방정식은 편미분방정식이 된다. 더욱이 보의 강성과 지지하고 있는 형태 즉, 경계조건이 반드시 고려되어야 한다. 그러므로 소위 강성과 경계값 문제라는 2개의 관점이 추가적으로 문제해석에 고려되어야 하며, 2개의 관점은 각각 분리되어 연구된다.

본 연구는 단형보(steppped beam)를 연구대상으로 삼았으며, 특히 좌우대칭의 단형보가 보편적으로 일반 공학 분야에 많이 사용되므로 좌우대칭 단형보(symmetrically stepped beam)의 횡진동을 본 연구의 주제로 삼는다.

변단면보의 진동해석법은 여러 가지 해석법이 있지만 Euler-Bernoulli 보이론이 어떤 보 또는 막대기에서 처짐 모드(mode)를 지배하는 가정으로부터 유도된 정해에 가까운 근사법이므로(Timoshenko, 1921; Belytschko 등, 1980) 본 연구에서는 연속계로서의 변단면보의 대표적 진동해석 방법인 Euler-Bernoulli보이론을 사용하여 대칭 단형보(symmetrically stepped beam)의 등가보 변환에 의한 고유치해석 방법을 제시한다.

본 연구에서 그에 따른 가정은 다음과 같다(Church 등, 1963; Snowdon, 1968; Thomson, 1981; Biggs, 1982; Paz, 1997).

1. 탄성체 내에서 후크의 법칙 내에 있다.
2. 보의 재료는 균질성(homogenous), 등방성(isotropic)을 갖는다.
3. 굽힘파동길이(bending wave length)는 보의 단면척수보다 수배 이상 크다.

4. 회전관성모멘트와 전단변형은 무시한다.
5. 축방향진동효과(axial vibration effect)를 무시한다.
6. 보의 길이에 대한 보 춤(depth)의 비는 작다.

2. 기본방정식(Biggs, 1982; Paz, 1997)

2.1 연속질량법(distributed mass method)의 기본방정식

그림 1에 xy 평면에 놓인 보의 횡진동(transverse vibration)이 그려져 있다. 가정 4와 같이 전단변형(shear deformation)과 회전관성모멘트를 무시하고 굽힘모멘트(bending moment)에 의해서만 변형 $y(x, t)$ 가 생긴다고 하면 이런 모델을 오일러-베르누이(Euler-Bernoulli)보라 부른다(김광식 등, 1985).

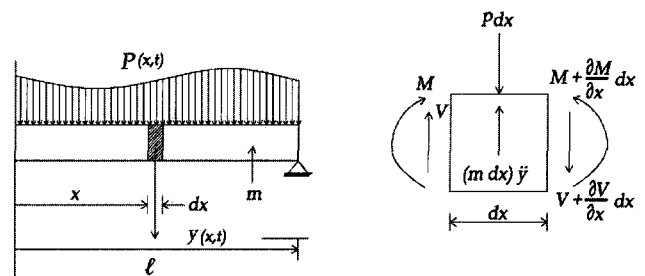


그림 1 보의 횡진동

그림 1에서 m 은 질량, P 는 하중, V 는 전단력, M 은 굽힘모멘트, y 는 변위이다.

연속체로서 보의 기본방정식을 유도하기 위해 그림 1을 살펴보면 뉴톤의 제2법칙으로 부터 축방향의 동역학적 방정식은 다음과 같다.

$$V - Pt - V - \frac{\partial V}{\partial x} dx + m dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

식 (1)을 V, dx 를 소거하여 간단히 하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P \tag{2}$$

또한 요소(element)에서 모멘트 M 을 합치면 다음과 같이 되며,

$$M + V dx - (M + \frac{\partial M}{\partial x} dx) = 0 \tag{3}$$

식 (3)을 간단히 하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \quad (4)$$

식 (4)를 식 (2)에 대입하면 다음의 식이 되며,

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P \quad (5)$$

기초재료역학으로부터 처짐 y 와 굽힘모멘트 M 과의 관계는 다음과 같다.

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M \quad (6)$$

여기서 EI 는 보의 강성이다.

식 (5)에 식 (6)을 대입하면 횡진동에 대한 보의 기본 방정식을 얻는다.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(x,t) \quad (7)$$

2.2 자유진동 (free-vibration)

앞 절 2.1에서 변형 $y=y_n(x,t)$ 가 다음 형태 식으로 만족한다고 하자.

$$y_n(x,t) = f_n(t) \cdot \phi_n(x) \quad (8)$$

식 (8)을 시간 t 에 관해 2차 미분을 하면 다음과 같다.

$$\ddot{y}_n(x,t) = \ddot{f}_n(t) \cdot \phi_n(x) \quad (9)$$

또한, 식 (8)을 x 에 관해 4차 편미분을 하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f_n(t) \cdot \frac{d^4}{dx^4} \phi_n(x) \quad (10)$$

식 (9)와 식 (10)을 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 기본진동방정식이 성립된다.

$$EI \cdot f_n(t) \cdot \frac{d^4}{dx^4} \phi_n(x) + m \cdot \phi_n(x) \cdot \ddot{f}_n(t) = P(x,t) \quad (11)$$

여기서, 자유진동은 하중 $P(x,t)=0$ 이므로 식 (11)은 다음 두 식으로 쓸 수 있다.

$$EI \cdot f_n(t) \cdot \frac{d^4}{dx^4} \phi_n(x) + m \cdot \phi_n(x) \cdot \ddot{f}_n(t) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{EI}{m \phi_n(x)} \cdot \frac{d^4}{dx^4} \phi_n(x) = -\frac{\ddot{f}_n(t)}{f_n(t)} \quad (13)$$

식 (13)의 왼쪽은 x 에 관한 식이며, 오른쪽 식은 시간 t 에 관한 식이고 양쪽 모두 항상 일정한 값을 가지며, 그 값은 w_n^2 과 같다. 그러므로 식 (13)은 다음과 같은 두 방정식으로 다시 쓸 수 있다.

$$\ddot{f}_n(t) + w_n^2 \cdot f_n(t) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^4}{dx^4} \phi_n(x) - \frac{m w_n^2}{EI} \phi_n(x) = 0 \quad (15)$$

또한 식 (14)의 해는 다음과 같다.

$$f_n(t) = C_1 \sin w_n t + C_2 \cos w_n t \quad (16)$$

$$= C \sin(w_n t + \alpha) \quad (17)$$

식 (15)의 미분방정식을 풀기 위해 $\phi_n(x) = C e^{sx}$ 를 식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$(s^4 - a^4) \cdot C \cdot e^{sx} = 0 \quad s = \pm a, \pm ia$$

여기서, $a^4 = \frac{m w_n^2}{EI}$ 이고 C 와 s 는 상수이다.

Euler's equation을 적용하여 풀면 다음의 식이 된다.

$$\phi_n(x) = A_1 \sin a_n x + A_2 \cos a_n x + A_3 \sinh a_n x + A_4 \cosh a_n x \quad (18)$$

여기서 $a_n = \sqrt{\frac{m w_n^2}{EI}}$ 이다. (19)

식 (18)은 경계조건 (boundary condition)에 따르는 일반적 보의 특정함수가 되며 상수 A_1, A_2, A_3, A_4 는 경계 조건 (boundary condition)에 의해 결정된다.

3. 균단면 단순보의 진동방정식 유도 (Biggs 등, 1982)

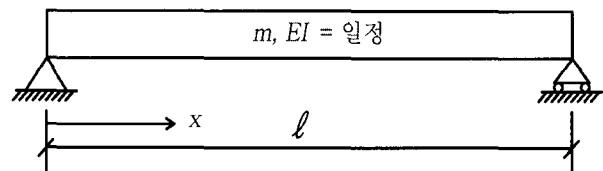


그림 2 균단면 단순보

연속체 보의 진동해석에 있어서 첫 단계는 비감쇠진동 모드형상 (mode shape)과 고유진동수의 방정식을 구하는 것이다. 단순보의 경계조건은 양 끝단에서 처짐이 $y=0$ 이고 모멘트가 0이다. 식 (8)에서 $f_n(t) \neq 0$ 이므로 이 경계조건을 특정함수 $\phi_n(x)$ 의 식 (18)에 대입한다.

$$x=0 \text{에서 } \phi_n(0) = A_2 + A_4 = 0$$

$$\ddot{\phi}_n(0) = -A_2 a_n^2 + A_4 a_n^2 = 0$$

두 식에서 $A_2 = A_4 = 0$ 이므로

$$\phi_n(x) = A_1 \sin a_n x + A_3 \sinh a_n x \tag{20}$$

식 (20)에 $x = \ell$ 의 경계조건을 대입하면 다음과 같다.

$$\phi_n(\ell) = A_1 \sin a_n \ell + A_3 \sinh a_n \ell = 0 \tag{21}$$

$$\phi_n(\ell) = -A_1 a_n^2 \sin a_n \ell + A_3 a_n^2 \sinh a_n \ell = 0 \tag{22}$$

식 (21)과 식 (22)을 연립해서 풀면 다음 두 식이 성립되며

$$A_1 \sin a_n \ell = 0 \quad A_3 \sinh a_n \ell = 0$$

또한, $\sinh a_n \ell \neq 0$ 이므로 $A_3 = 0$ 이다.

그러므로 $\sin a_n \ell = 0$ 라는 식이 남게 되며, 이 식에서 $a_n = n\pi/\ell$ 이다.

식 (19)에서 $a_n = \sqrt{\frac{m u_n^2}{EI}}$ 이므로 균단면 단순보의 고유진동수는 다음과 같다.

$$u_n = \frac{\pi^2 n^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \tag{23}$$

4. 단형보(steppped beam)의 고유진동수방정식

보의 고유진동수는 주어진 보의 동적해석에서 매우 중요한 역할을 한다. 그러나 보의 단면이 불규칙적으로 변하는 단형보의 고유진동수 산정은 해석상 복잡하고 어렵다.

앞서 설명된 2장과 3장의 연속체로서의 보해석 방법인 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)이론을 이용한 단형보(steppped beam)의 횡진동해석 방정식은 균단면보의 횡진동해석법과 동일하므로 등가강성 E_c 와 등가질량 m_c 를 사용하면 대칭단형 단순보의 고유진동수를 쉽게 구할 수 있다.

4.1 대칭단형 단순보의 등가강성(E_c)

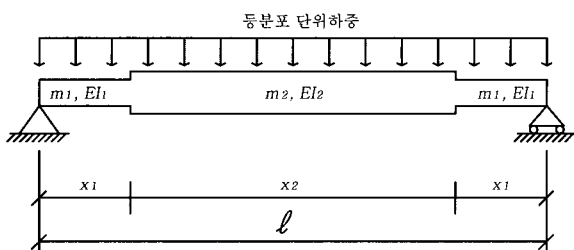


그림 3 대칭단형 단순보

표 1 대칭단형 단순보의 등가강성 형상계수 K_f 표

$a \backslash k_f$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
2	1.997	1.977	1.926	1.840	1.720	1.577	1.424	1.271	1.128
3	2.991	2.931	2.786	2.555	2.264	1.954	1.658	1.397	1.179
4	3.982	3.863	3.587	3.172	2.689	2.218	1.807	1.470	1.205
5	4.969	4.774	4.335	3.709	3.030	2.414	1.909	1.518	1.222
6	5.954	5.665	5.035	4.181	3.310	2.565	1.984	1.552	1.234
7	6.936	6.536	5.691	4.598	3.544	2.685	2.042	1.576	1.242
8	7.915	7.388	6.307	4.971	3.743	2.783	2.087	1.596	1.248
9	8.890	8.221	6.887	5.306	3.913	2.864	2.124	1.611	1.253
10	9.863	9.037	7.435	5.607	4.061	2.932	2.154	1.623	1.257
11	10.833	9.835	7.951	5.881	4.190	2.990	2.179	1.633	1.260
12	11.800	10.617	8.440	6.130	4.305	3.041	2.201	1.642	1.263
13	12.764	11.383	8.904	6.359	4.407	3.085	2.220	1.649	1.265
14	13.725	12.133	9.343	6.568	4.498	3.124	2.236	1.656	1.267
15	14.683	12.867	9.761	6.761	4.580	3.158	2.250	1.661	1.269
16	15.639	13.587	10.158	6.940	4.655	3.189	2.263	1.666	1.271
17	16.591	14.292	10.536	7.105	4.722	3.216	2.274	1.671	1.272
18	17.541	14.984	10.897	7.259	4.784	3.241	2.284	1.675	1.273
19	18.488	15.662	11.242	7.402	4.841	3.264	2.293	1.678	1.274
20	19.431	16.327	11.571	7.536	4.893	3.285	2.301	1.681	1.275
21	20.373	16.979	11.886	7.662	4.941	3.304	2.309	1.684	1.276
22	21.311	17.619	12.187	7.780	4.986	3.321	2.316	1.687	1.277
23	22.246	18.247	12.476	7.891	5.027	3.337	2.322	1.689	1.278
24	23.179	18.863	12.754	7.995	5.066	3.352	2.328	1.691	1.278
25	24.109	19.468	13.020	8.093	5.102	3.366	2.333	1.693	1.279
26	25.036	20.062	13.275	8.186	5.136	3.378	2.338	1.695	1.280
27	25.961	20.645	13.521	8.274	5.167	3.390	2.343	1.697	1.280

그림 3과 같은 대칭단형 단순보의 등가강성 E_c 는 등분포 단위하중에 대한 처짐에 의해서 구할 수 있다.

$$\delta_c = \int \frac{M}{EI(x)} x dx = \int \frac{M}{E_c} x dx$$

여기서, δ_c 는 중앙부 최대 처짐이다.

위 두 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$E_c = \frac{\int_0^{\ell/2} M x dx}{\int_0^{\ell/2} \frac{M}{EI(x)} x dx} \tag{24}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\ell/2} (\ell x^2 - x^3) dx}{\frac{1}{2EI_1} \int_0^{x_1} (\ell x^2 - x^3) dx + \frac{1}{2EI_2} \int_{x_1}^{\ell/2} (\ell x^2 - x^3) dx} \tag{25}$$

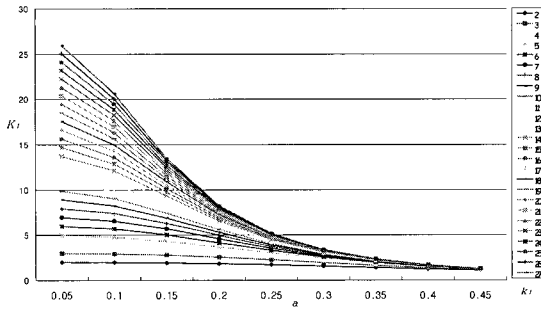


그림 4 길이변화 a 에 따른 등가강성 형상계수 K_f

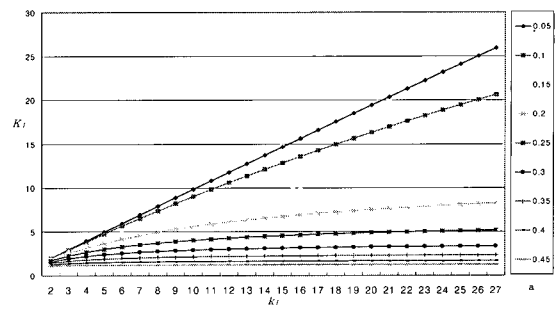


그림 5 강성비 k_f 에 따른 등가강성 형상계수 K_f

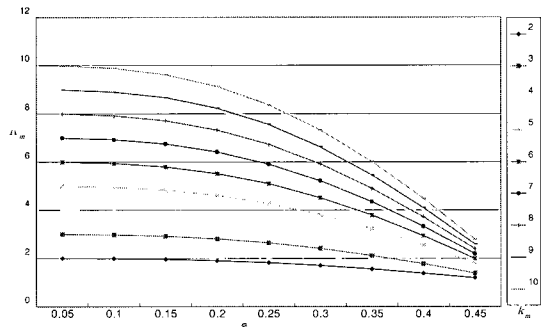


그림 6 길이변화비 a 에 따른 등가질량 형상계수 K_m

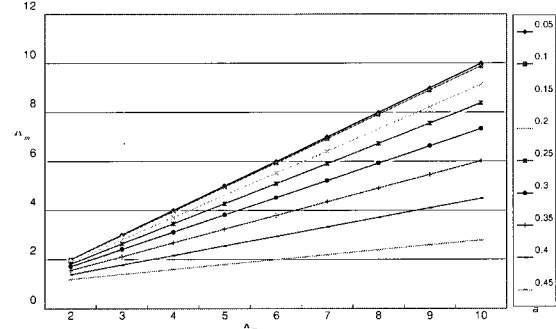


그림 7 질량변화 k_m 에 따른 등가질량 형상계수 K_m

식 (25)를 길이변화비 $a=x_1/\ell$ 와 강성비 $k_f=EI_2/EI_1$ 로 치환하여 정리하면 등가강성 E_e 는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$E_e = K_f \cdot EI_1 \tag{26}$$

여기서 K_f 는 등가강성 형상계수로서 다음과 같이 정리되어진다.

$$K_f = \frac{5k_f}{16a^3(4-3a)(k_f-1)+5} \tag{27}$$

표 1은 강성비 $k_f=EI_2/EI_1$ 와 길이변화비 $a=x_1/\ell$ 변화에 대한 식 (27)의 등가강성 형상계수 K_f 를 나타냈고, 그림 4는 표 1을 길이변화비 a 에 따른 등가강성 형상계수 K_f 로 나타낸 그래프이다. 그림 5는 표 1을 강성비 k_f 에 대한 등가강성 형상계수 K_f 로 나타낸 것이다.

4.2 대칭단형 단순보의 등가질량 (m_e)

등가질량 m_e 는 $m = \int m(x) \phi^2 dx$ (Hurty 등, 1967)에 단순보의 특정함수 $\phi = \sin \frac{\pi}{\ell} x$ 를 대입하여 구할 수 있다.

$$m_e = \frac{\int m(x) \phi^2 dx}{\int \phi^2 dx} \tag{28}$$

$$= \frac{m_1 \int_0^{x_1} \sin^2 \frac{\pi}{\ell} x dx + m_2 \int_{x_1}^{\ell} \sin^2 \frac{\pi}{\ell} x dx}{\int_0^{\ell} \sin^2 \frac{\pi}{\ell} x dx} \tag{29}$$

윗 식 (29)에 길이변화비 $a=x_1/\ell$, 질량비 $k_m=m_2/m_1$ 을 대입하여 정리하면 다음과 같은 식이 유도된다.

$$m_e = K_m \cdot m_1 \tag{30}$$

여기서 K_m 은 등가질량 형상계수로서 다음과 같이 정리되어진다.

$$K_m = (2a - \frac{1}{\pi} \sin 2\pi a)(1-k_m) + k_m \tag{31}$$

표 2는 길이변화비 $a=x_1/\ell$ 와 질량비 $k_m=m_2/m_1$ 변화에 대한 식 (29)의 등가질량 형상계수 K_m 을 나타냈고, 그림 6은 표 2를 길이변화비 a 에 따른 등가질량 형상계수 K_m 로 나타낸 그래프이며, 그림 7은 표 2를 질량비 k_m 에 대한 등가질량 형상계수 K_m 로 나타낸 것이다.

표 2 대칭단형 단순보의 등가질량 형상계수 K_m 표

$k_m \backslash a$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
2	1.998	1.987	1.958	1.903	1.818	1.703	1.558	1.387	1.198
3	2.997	2.974	2.915	2.805	2.637	2.405	2.115	1.774	1.397
4	3.995	3.961	3.873	3.708	3.455	3.108	2.673	2.161	1.595
5	4.993	4.948	4.830	4.611	4.273	3.811	3.230	2.548	1.793
6	5.992	5.935	5.788	5.514	5.092	4.514	3.788	2.935	1.992
7	6.990	6.923	6.745	6.416	5.910	5.216	4.345	3.323	2.190
8	7.989	7.910	7.703	7.319	6.728	5.919	4.903	3.710	2.389
9	8.987	8.897	8.660	8.222	7.546	6.622	5.460	4.097	2.587
10	9.985	9.884	9.618	9.125	8.365	7.325	6.018	4.484	2.785

4.3 대칭단형 단순보의 고유진동수방정식

균단면 단순보의 고유진동수를 구하는 식 (23)에 대칭 단형 단순보의 등가강성 E_e 와 등가질량 m_e 를 대입하면 대칭단형 단순보의 고유진동수 식은 다음과 같다.

$$\omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{E_e}{m_e}} \quad (32)$$

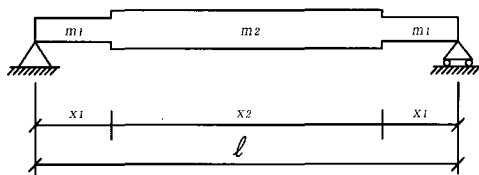
식 (25)와 식 (28)을 식 (30)에 대입하면 대칭단형 단순보의 고유진동수는 다음과 같이 표기할 수 있다.

$$\omega = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{K_f \cdot E_1}{K_m \cdot m_1}} = \sqrt{\frac{K_f}{K_m}} \omega_1 \quad (33)$$

여기서 ω_1 은 강성 E_1 과 질량 m_1 에 대한 기본고유진동수로써 $\omega_1 = \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{E_1}{m_1}}$ 이다.

5. 수치 해의 검증 및 예제

4장에서 제시한 등가강성 E_e 와 등가질량 m_e 를 적용한 등가보 변환에 의한 대칭단형 단순보의 고유진동수방정식에 대한 적용성과 신뢰성을 검증하기 위하여 예제 해석모델로서 참고문헌(Biggs, 1982)의 예제(그림 8)을 대상으로 하였다.



$x_1 = 50'' \ell = 200''$
 $m_1 = 0.05 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad m_2 = 0.10 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2$
 $E_1 = 5E^9 \text{ lb-in}^2 \quad E_2 = 20E^9 \text{ lb-in}^2$

그림 8 예제

그림 8의 해석 및 검증 순서는 다음과 같이 한다.

- ① m_1 및 E_1 에 대한 기본진동수 ω_1 을 구한다.
- ② 표 1과 표 2를 이용하여 질량비 k_m 과 강성비 k_f 에 따른 형상계수 K_m 과 K_f 을 구한다.
- ③ 식 (33)을 이용하여 단형보의 고유진동수를 구한다.
- ④ 타문헌에 의한 방법과 비교한다.

표 3은 그림 8 예제해석모델에 대한 본 연구의 등가보 변환에 의한 해석 결과치와 참고문헌(Biggs, 1982)의 결과와의 비교이다.

표 3 본 연구와 타문헌과의 결과 비교

제안식	Modified Rayleigh Method	오차
$w = 94.49 \text{ rad/sec}$	$w = 94.1 \text{ rad/sec}$ * 20 등분 2번 반복계산	0.4 %
$K_m = 1.818$		
$K_f = 2.689$		
$\omega_1 = 78.03 \text{ rad/sec}$		

* Modified Rayleigh Method 해석결과는 참고문헌(Biggs, 1982) pp.170~172 참조.

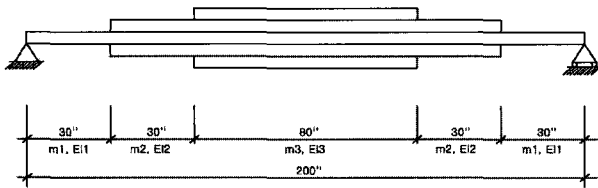
표 4는 그림 8의 예제를 x_1 과 m_2 및 EI_2 를 임의로 변화시켜서 본 연구에 의한 결과와 유한요소법(MIDAS/GENW)의 해석결과를 비교한 것이다.

표 4 단면변화에 따른 기본진동수의 비교

질량비 k_m	거리비 a	단위 : rad/sec					
		$k_f = 6$		$k_f = 10$		$k_f = 15$	
		연구	MIDAS	연구	MIDAS	연구	MIDAS
4	0.15	88.97	88.76	108.11	107.57	123.88	122.88
	0.25	76.38	76.38	84.60	84.49	89.84	89.64
	0.35	67.23	67.47	70.05	70.32	71.59	71.88
6	0.15	72.78	72.66	88.44	88.12	101.33	100.7
	0.25	62.91	63.16	69.68	69.97	74.00	74.31
	0.35	56.47	57.04	58.84	59.52	60.14	60.89
8	0.15	63.09	63.02	76.66	76.43	87.84	87.38
	0.25	54.73	55.06	60.62	61.04	64.38	64.86
	0.35	49.64	50.31	51.72	52.54	52.86	53.76

MIDAS의 결과는 보를 20등분한 해석값임.

또한, 변단면이 3개 이상인 대칭단형 단순보의 등가보 변환에 의한 고유치해석의 타당성을 검증하기 위하여 그림 9 및 그림 10에 대한 본 연구의 해석결과와 유한요소법의 해석결과를 비교하였다.

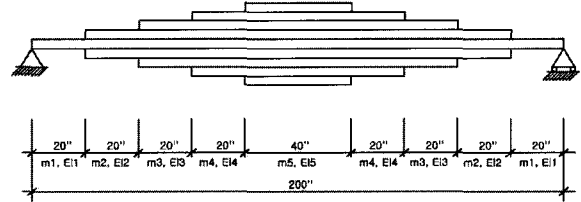


$$m_1 = 0.05 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_1 = 5E^9 \text{ lb-in}^2$$

$$m_2 = 0.10 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_2 = 20E^9 \text{ lb-in}^2$$

$$m_3 = 0.20 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_3 = 40E^9 \text{ lb-in}^2$$

그림 9 변단면이 3개인 단형보



$$m_1 = 0.05 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_1 = 5E^9 \text{ lb-in}^2$$

$$m_2 = 0.10 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_2 = 20E^9 \text{ lb-in}^2$$

$$m_3 = 0.15 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_3 = 40E^9 \text{ lb-in}^2$$

$$m_4 = 0.20 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_4 = 60E^9 \text{ lb-in}^2$$

$$m_5 = 0.25 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2 \quad EI_5 = 80E^9 \text{ lb-in}^2$$

그림 10 변단면이 5개인 단형보

표 5 그림9 해석 결과 비교

연구	유한요소법 (MIDAS/GENW)
$w = 98.33 \text{ rad/sec}$	$w = 98.43 \text{ rad/sec}$ * 20등분해석
$EI_c = 2.6704E^9 \text{ lb-in}^2$	
$m_c = 0.16815 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2$	

표 6 그림10 해석결과 비교

연구	유한요소법 (MIDAS/GENW)
$w = 120.52 \text{ rad/sec}$	$w = 120.22 \text{ rad/sec}$ * 20등분해석
$EI_c = 4.74564E^{10} \text{ lb-in}^2$	
$m_c = 0.1989 \text{ lb-sec}^2 / \text{in}^2$	

그림 9, 그림 10의 해석 및 검증 순서는 다음과 같이 한다.

- ① 식 (24)를 이용하여 등가강성 EI_c 를 구한다.
- ② 식 (28)을 이용하여 등가질량 m_c 를 구한다.
- ③ 식 (32)를 이용하여 보의 고유진동수를 구한다.
- ④ 유한요소법(MIDAS/GENW)의 해석 결과와 비교한다.

표 5는 그림 9의 변단면이 3개인 대칭단형 단순보를 본 연구의 등가보 변환에 의한 고유치해석한 결과와 유한요소법에 의한 결과를 비교한 것이고 표 6은 그림 10의 변단면이 5개인 대칭단형 단순보를 등가보 변환에 의한 고유치 해석한 결과와 유한요소법에 의한 결과를 비교한 것이다.

6. 결 론

단형보(steped beam)의 고유치해석에는 다자유도계의 집중질량법(lumped mass method)이 널리 쓰이지만 이들 해석방법은 요소 분할수나 계산의 반복수 또는 가정 처짐곡선의 정확성 여부에 따라 해석의 정밀성이 좌우된다. 이에 따라 본 연구에서는 대칭단형단순보를 등가질량 및 등가강성을 이용한 등가보 변환에 의한 고유치해석방법을 제시하였고 예제 구조물을 대상으로 그 적용성 및 신뢰성을 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 본 연구에서 제시한 등가보 변환에 의한 대칭단형 단순

보의 해석결과는 다자유도계 집중질량방법의 결과와 오차가 1%내외로 근접하므로 대칭단형 단순보의 등가단 자유도계로의 해석방법은 타당성이 있다고 사료된다.

- 2) 등가보 변환에 의한 대칭단형 단순보의 고유치해석방법은 요소 분할이나 반복적인 계산과정없이 동적특성을 추정할 수 있어 실용적이라 판단된다.

참 고 문 헌

김광식 외 5인 공저(1985) 기계진동학, 보성문화사.

Belytschko, T., Midle, W.L.(1980) Flexural Wave Propagation Behavior of Lumped Mass Approximations, *Computer and Structures*, 12, pp.805~812.

Biggs, J.M.(1982) *Structural Dynamics*, Mcgraw Hill Book Co., New York.

Church, A.H.(1963) *Mechanical Vibration (2nd ED.)*, John Wiley and Sons, New York.

Clough, R.W., Penzien, J.(1982) *Dynamics of Structures*, Mcgraw Hill Book Co.

Hurty, W.C., Rubinstein, M.F. (1967) *Dynamics of structures*, Prentice-Hall of India Private Limited, New Delhi.

Paz, M.(1997) *Structural Dynamics Theory and Computation(4th ED.)*, CHAPMAN & HALL, New York.

Snowdon, J.C.(1968) *Vibration and Shock in*

Damped Mechanical Systems, John Wiley and Sons, New York.

Thomson, W.T.(1981) Theory of Vibration with Application (2nd ED), Prentice-Hall, New

Jersey.

Timoshenko, S.P.(1921) On the correction for shear of the differential equation for transverse of prismatic bars, Pil mag, pp.744~746.