

부정류해석 이론

박한영* · 이동근*

1. 서론

본 특집 기사에서는 배관 내 유체의 흐름이 밸브 조작과 같은 원인 행위에 의해 유체 흐름의 조건이 변화하는 과정인 부정류를 해석하는 이른바 “부정류해석”에 대한 기본적인 이론을 제공하고자 한다.

2. 부정류 정의

유체의 흐름이 관로 내에서 임의 시간에 관계없이 변화가 없는 흐름을 정상류라 한다. 이 장에서는 부정류라 불리는 비정상 유동의 일반적인 두 개의 부류를 소개하고자 한다. 모든 부정류는 정상류 흐름 상태에서 다른 상태로 변화하는 짧은 시간이던 긴 시간 동안의 변환기를 갖게 된다. 두 개의 흐름 상태 중 하나는 정지 상태를 나타낼 수도 있다. 각 부정류는 유체를 제어하고 수송하는 수력 설비에서 또는 유체 유동에 영향을 주는 주위 환경의 변화에 대응하는 반응이다.

유사 정상 유동 (quasi-steady flow)이라 불리는 부정류의 첫 번째 유형은 유체의 관성 또는 탄성 효과가 유동 거동에 영향을 미치지 않는 것이다. 이와 같은 유동에서는 시간에 따른 유량과 압력의 변화가 완만하고 짧은 시간이 지나면 정상류 상태로 된다. 대표적인 예는 저수지의 수위 저하, 용량이 큰 탱크로부터의 배수 또는 24시간 주기의 용수 공급 시스템에서의 수요량 변화이다.

진정한 부정류 유동이라고 알려진 부정류의 두 번째 유형에서는 유체의 관성력 그리고/또는 유체와 배관의 탄성이 유동 거동의 분석에 기본적인 요소이므로 이를 반드시 고려하여야만 한다. 만일 관성 효과가 중요하고 배관과 유체의 압축성 효과는 상대적으로 미소하거나 무시할 수 있다면 강성주 유동으로 인용되는

부정류 유동이 된다. 만일 부정류의 정확한 특성을 분석하기 위해 유체의 관성 효과, 유체와 배관의 탄성 효과를 반드시 유지하여야 한다면 이것을 진정한 수충격 조건이라 부른다. 강성주 유동과 수충격 사이의 뚜렷한 구분은 쉽지 않고 대체적으로 시스템 내에서 얼마나 신속하게 사건이 변화하는지에 의존한다. 한 예로 수력 발전 설비의 서지 챔버 내에서 수위 변동은 강성주 유동으로 정확하게 분석될 수 있다. 이러한 경우 관성 효과는 반드시 고려되어야 하나 탄성 또는 압축 효과들은 분명하게 미소한 것이 된다. 한편 관로에 설치된 밸브의 급작스런 폐쇄는 수충격 상황이 된다. 결과 거동을 정확하게 모의실험을 하려면 분석하고자 하는 배관과 액체의 탄성을 고려하여야 한다. 밸브가 더욱 완만하게 폐쇄되면 불확실성이 발생한다. 폐쇄 시간이 충분히 길면 강성주 유동 분석은 물리학 문제가 되고 결과는 매우 양호하게 된다. 분석가가 확신을 갖지 못할 경우에는 좀 더 복잡하고 일반적인 유동의 특성을 나타내는 수충격 분석을 실시하여야 한다.

3. 부정류해석 이론

유체 관로 시스템 내 부정류들을 해석하기 위해 사용되는 방법들 중 정확도와 효율성을 고려할 때 통상적으로 특성법이 가장 많이 사용된다. 그러나 특별한 상황에서는 필요한 경우에 다른 방법들도 고려하여야 한다. 본 장에서는 다른 방법들에 대해서 간단하게 기술하기로 한다.

3.1 강성주 이론

많은 비정상류 유동의 경우 L/a 와 비교하여 압력과 유량 변화는 상대적으로 완만하다. 강성주 이론에서는 관로 내에 저장되는 질량변화는 중요하지 않고, 유체는 비압축성이고, 배관벽은 완전한 강성체라고 가정한다. 따라서 이를 비압축성 또는 강성주 이론이라

* 한국수자원공사, 한국수자원연구원
E-mail : hanyung@kowaco.or.kr

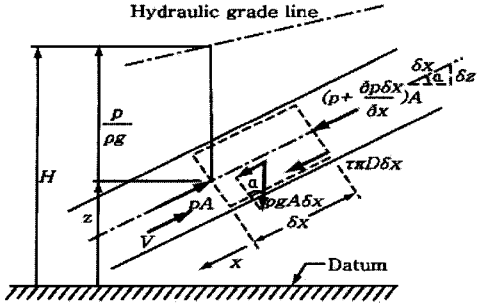


그림 1 일괄분석을 위한 검사체적

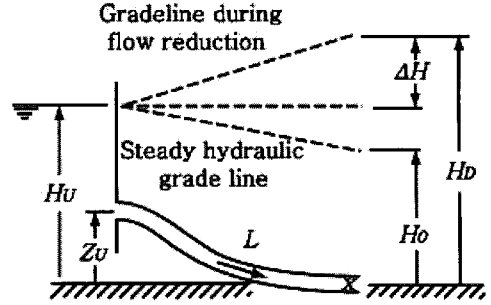


그림 2 일괄 분석을 위한 관로

하고 질량 밀도는 일정하고 배관은 압력과 무관하게 변형하지 않는 것으로 가정한다.

그림 1과 같이 검사체적에 선형 모멘텀 공식을 적용하면 임의 순간에서 검사체적 내 유체에 작용하는 힘의 합은 검사체적 내 선형 모멘텀의 증가율과 검사체적으로부터 선형 모멘텀의 순수 유출을 더한 것과 동일하다. 임의 순간에서 x 방향의 유속은 동일하므로 마지막 항은 0이 되고 공식은 다음과 같이 된다.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \delta x A - \rho g A \delta x \sin \theta - \tau_0 \pi D \delta x = \rho A \delta x \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1)$$

강성주 이론에서는 유속은 거리와 관계없이 항상 일정하므로 시간의 함수 $V = V(t)$ 가 되므로 한 마지막 항은 전미분 (total derivative)으로 나타낼 수 있다. 점성 손실 수두를 기술하기 위해 달시-바하 공식을 도입하면 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \theta + \frac{\rho f V |V|}{2D} + \rho \frac{dV}{dt} = 0 \quad (2)$$

그림 3.1에 피에조미터 수두를 적용하면

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f V |V|}{2gD} + \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (3)$$

$V = Q/A$ 이므로 상기 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f Q |Q|}{2gDA^2} + \frac{1}{gA} \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (4)$$

V 또는 Q 는 오직 시간의 함수이므로 x 에 따른 p 또는 H 변화도 또한 오직 시간의 함수이다. 즉, 피에조

미터 수두 또는 수력 구배선은 임의 순간 그림 2의 H_U 와 H_D 사이에서 직선이고 $\partial H / \partial x = (H_D - H_U) / L$ 가 된다.

임의 순간 식 (3)은 관로 유속과 상류측과 하류측 말단부 압력의 향으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_D - H_U + \frac{f L V |V|}{2gD} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dt} = 0 \quad (5)$$

식 (5)에서 관로 고도는 나타나지 않았고, 압력이 증기압보다 높게 유지되는 한 문제가 되지 않는다. 수력구배선이 아닌 압력 향으로 쓰여진다면 관로 마지막 지점에서의 고도가 나타날 것이다.

식 (5)에서 상류측 및 하류측 압력은 시간과 함께 유속에 따라 변화하고 이 경우 수치적분이 필요하다. $H_D - H_U = \Delta H$ 이 일정하면 폐쇄형 적분이 가능하다. 초기조건 $t=0$ 에서 $V = V_0$ 과 다음과 같은 정의에 의해

$$C_1 = \frac{g \Delta H}{L} \quad C_2 = \frac{f}{2D}$$

적분하면 시간에 따른 속도 변화는 다음과 같다.

$$V = \sqrt{C_1 / C_2} \tan \left[\tan^{-1} (V_0 / \sqrt{C_1 / C_2}) - \sqrt{C_1 C_2} t \right] \quad (6)$$

고정된 ΔH 에서 유동을 정지시키는데 소요되는 시간은 [] 안을 0으로 하여 구할 수 있다.

기동 시간으로 불리는 시간 상수는 $f=0$ 으로 하여 식 (5)를 적분하여 구할 수 있다. 이는 일정 압력 차이가 작용할 때 관로 내 유체를 0에서 Q 로 되기 위해 필요한 시간을 의미한다. 적분을 하게 되면

$$t_w = -\frac{LQ}{g\Delta HA} \quad (7)$$

밸브가 급속히 개방될 때 마찰을 포함한 관로 내 정상 유동이 확립되기 위한 시간은 밸브공식을 공식 (5)에 대입, 적분하여 구할 수 있다. 밸브 관련공식과 함께 정상유동상태 에너지공식을 사용하여 관로 내 정상유속 V_0 및 밸브 통과하면서 발생하는 수두 저하 H_0 을 구할 수 있다.

$$H_U = H_0 + \frac{fLV_0^2}{2gD} \quad (8)$$

고정된 밸브 개도에서 밸브를 통과하면서 발생하는 수두 저하 H_D 는 다음과 같이 관로 내 비정상상태 유동시 유속과 관련된다.

$$\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 = \frac{H_D}{H_0} \quad (9)$$

식 (5)와 (9)를 조합하면

$$\left(H_0 + \frac{fLV_0^2}{2gD}\right)\frac{V^2}{V_0^2} - H_U + \frac{L}{g}\frac{dV}{dt} = 0$$

공식 (8)을 대입하고 초기 유동이 없을 때부터 임의 시간에서 유속까지 직접 적분하면

$$\int_0^t dt = \frac{L}{g}\frac{V_0^2}{H_U} \int_0^V \frac{dV}{V_0^2 - V^2} \quad (10)$$

$$t = \frac{L}{g}\frac{V_0^2}{H_U} \ln \frac{V_0 + V}{V_0 - V}$$

상기 식에서 유속은 점차적으로 정상상태로 접근하는 것을 알 수 있다. 밸브로부터 상류측 관로 내 수두는 공식 (9)와 (10)을 조합하여 V_0 를 제거하여 구할 수 있다.

3.2 도해적 해석

도해적 해석 방법에 대해서는 주로 Bergeron¹과 Parmakian⁽⁷⁾이 기술하였으며 이 방법은 전산기가 본격적으로 사용되기 전인 1900년부터 1970년대까지 주로 사용되었다. 이 도해적 해석 방법에 대한 이론은 필자

가 미국 Wisconsin Madison에 소재한 주립대학에서 연구하면서 이 분야 이론들을 집대성하여 출판한 “그림으로 푸는 수충격해석” 도서⁽¹¹⁾를 참조하기로 하며 여기에서는 생략한다.

3.3 음해법 (Implicit Method)

음해 유한차분법에서는 관로를 분절로 나누고 각 시간 단계에서 공식들을 동시에 풀어 전체 시스템에 대한 해를 구한다. 이 방법의 큰 장점은 해의 안정성을 확보하기 위한 시간 증분의 크기는 Courant 조건에 제한을 받지 않는다는 것이다. 그러나 대부분의 부정류 관로 문제에서 적절한 정확도를 얻기 위해서는 Courant 조건에 의해 명시된 시간간격-거리간격 상관관계가 필요하다. 다음과 같이 운동과 연속방정식을 간략하게 나타낼 수 있다.

$$H_x + \frac{Q_t}{gA} + \frac{fQ^2}{2gDA^2} = 0 \quad (11)$$

$$H_t + \frac{a^2}{gA} Q_x = 0 \quad (12)$$

그림 3과 같이 중심 음해법 (Centered implicit scheme)을 사용하면 편미분 항들은 다음과 같이 유한차분형태로 대체된다.

$$\frac{H_B + H_B - H_A - H_A}{2\Delta x} + \frac{Q_A + Q_B - Q_A - Q_B}{2gA\Delta t} + \frac{f(Q_A + Q_B)^2}{8gDA^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{H_B + H_B - H_A - H_B}{2\Delta t} + \frac{a^2}{gA} \frac{Q_B + Q_B - Q_A - Q_A}{2\Delta t} = 0 \quad (14)$$

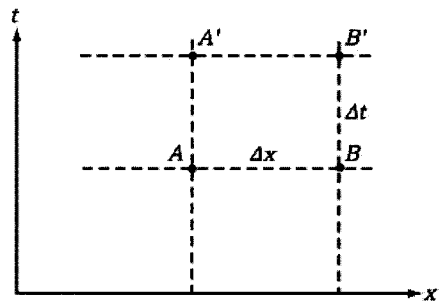


그림 3 음해법을 위한 $x-t$ 평면

상기 공식들을 다시 정리하면

$$H'_B - H'_A + \frac{B}{C_r} (Q'_A + Q'_B) = C_1 \quad (15)$$

$$H'_B + H'_A + C_r B (Q'_B - Q'_A) = C_2 \quad (16)$$

여기서 $B = a/gA$ 이고, 특성 임피던스와 Courant 수⁽⁶⁾는 다음과 같이 정의된다.

$$C_r = \frac{a \Delta t}{\Delta x} \quad (17)$$

그리고

$$C_1 = -\frac{f \Delta x (Q_A + Q_B)^2}{4gDA^2} - (H_B - H_A) + \frac{B}{C_r} (Q_A + Q_B) \quad (18)$$

$$C_2 = H_A + H_B + C_r B (Q_A - Q_B) \quad (19)$$

그림 3에서 전 시간에서 점 A와 B에서의 조건들은 기저로 가정하고 연산하여 후 시간에서 수치들을 평가한다. 마찰손실이 큰 경우 고차항 공식을 사용하여야 하나 단순화하기 위해 손실 항은 기저 수치들을 이용하여 대략적으로 추정한다.

식 (15), (16)에는 4개의 미지수들이 있다. 관로가 n 개의 분절로 나누어지면 $n+1$ 의 절점이 있고, 따라서 각 시간단계에서 $2n+2$ 변수들이 존재하게 된다. 각 분절 내에서는 2개의 공식들이 유용하고 이 공식들은 각 말단부 조건과 함께 사용하여 유일 해를 구할 수 있게 해준다. 단일 관로 내 또는 직렬 시스템 내에서 동시 해석에 편리한 하나의 banded 행렬이 생긴다. 이

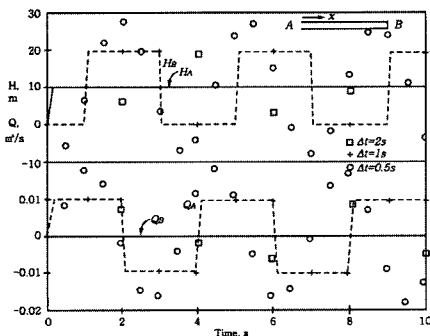


그림 4 음해법 계산결과

방법을 적용하는 단순한 예제를 살펴보기로 한다.

하류측이 시수부인 관로가 압력 0, 유량이 0인 상태로 물로 채워져 있다. 관로 길이 $L = 1000m$, $a = 1000m/s$, $A = 0.102m^2$ 그리고 $f = 0$ 이다. $t > 0$ 에서 상류측 압력은 순간적으로 10m로 상승하여 그 수두를 유지한다. 관로는 하나의 분절로 대체하고 시간 증분 (a) 1초, Courant 조건, (b) 2초, 및 (3) 0.5초일 경우 하류측 말단부에서 압력 변화와 상류측 말단부에서 유량 및 수두변화를 10초까지의 계산 결과를 그림 4에 나타내었다. 그림 4에서 $C_r = 1$ 인 경우에는 결과가 잘 일치하나 $C_r = 1$ 이 아닌 경우에는 상당한 차이가 발생한다. 따라서 급속한 부정류를 모델하기 위해서는 Courant 조건을 반드시 준수하여야 할 필요성을 분명하게 보여준다. 시스템 내 커다란 유효 저장용량을 갖는, 또는 작은 파속으로 통과하거나 또는 시스템 내 추가적인 저장 요소를 통과하는 완만한 부정류, 그리고 높은 점성 시스템들은 이 방법을 잘 따른다. 자유 표면 유동 및 긴-주기 천연가스 부정류들은 이 방법이 매우 매력적이다.

또한 음해 특성법을 전개하는 것이 가능하다.⁽³⁾ 그림 5를 참조하여 수충격 호환공식을 다음과 같이 작성할 수 있다.

$$H_E - H_R + B(Q_E - Q_R) + RQ^2 = 0 \quad (20)$$

$$H_D - H_S - B(Q_D - Q_S) - RQ^2 = 0 \quad (21)$$

점 D와 E에서 미지수를 사용하여 점 R과 S에서 변수들을 적절히 평가하고, 마찰항의 적정 표현과, 음해법에서 기술한 것과 같이 유사하게 동시 해법을 전개하다. 특성들이 그림 5에서 보는 바와 같을 때 급

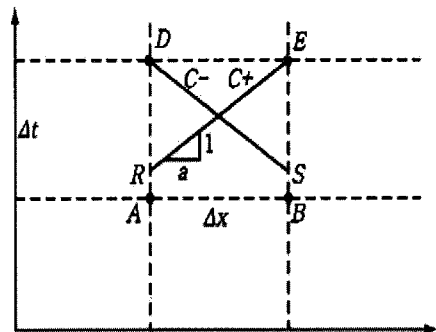


그림 5 음해 특성법

속한 관로 부정류를 만족스럽게 처리하기 위해 Courant 조건을 반드시 만족시켜야 하는 이유를 분명히 알 수 있다.

3.4 유한 요소법 (Finite Element Method)

부정류를 다루기 위해 유한 요소법을 사용하거나 전개하는 시도는 없었지만 다른 방법들과의 다른 점들과 유사한 점들을 기술하는 것이 적절하다. 유한 요소법은 다양한 유동문제에서 광범위하게 사용되고 있으나 액체 관로에서 부정류 해석시 연산 성공여부는 제한된다. 그러나 이 방법을 적용할 때 특성이 다른 요소들의 크기를 변화시켜 취급하는데 상당한 유연성을 제공하기 때문에 이 방법이 선호된다.

유효 요소법 중에서 가중 오차법 (method of weighted residuals)이 가장 널리 사용된다. 미분 방정식에 대입되는 시도 함수 또는 형상 함수 (trial function or shape function)는 통상적으로 엄밀해와 등등하지 않으므로 이로 인한 차이는 오차 (residual)가 된다. 가중 함수로 곱해진 이 오차는 가중오차를 발생시킨다. 유한 요소법에서는 가중 오차가 전체 평균적으로 0이 되도록 시도한다. 특별한 가중 함수를 선택할 경우에는 다른 가중 오차가 발생한다. 이러한 특별한 가중 함수 중 하나는 Galerkin법으로 이 방법에서는 가중 함수와 시도 함수가 동일하여야 한다. 이 방법을 타원 및 포물선 문제에 적용하여 구한 최적 추정치 (approximation)는 파 전파²와 관련된 포물선 문제를 개괄 (generalize)할 수 없다는 사실 때문에 전통적인 Galerkin 방법의 성공은 제한을 받는다. 이 경우 2개의 문제가 발생하는데 (1) 차이 공식 (difference equation) 들은 소산 (dispersive)되어 주파수에 따라 다른 속도로 전파하는 개별적인 파 요소로 귀착된다, 그리고 (2) 근사 차이 공식들은 비소산 (nondispersive)되어 유량 변수가 급격한 변화하는 근방 내에서 의사변동 (spurious oscillation)을 발생시킨다.

대안 공식을 사용하여 개선시킬 수 있다. 개방 수로 문제에서 급속히 변화하는 것을 모델링하는 것을 어느 정도 만족시키는 것도 이러한 대안 공식 중의 하나이다. 부등 시도 (unequal trial)와 가중 함수를 사용하여 Galerkin 법을 개선시킨 것을 Petrov-Galerkin법이라 한다.⁽⁵⁾

3.5 특성법 (Characteristics Method)

전산기가 범용으로 사용되기 시작하면서 특성법이

사용되기 시작하였으며 지금까지도 부정류해석 전용 프로그램들은 이 방법을 사용한다.

특성법의 본질은 한 쌍의 편미분방정식을 이에 상당한 상미분방정식으로 대체하는 것으로 라그랑지 승수 (Lagrange multiplier)라 불리는 일정 선형 스케일 요소 (constant linear scale factor) λ 를 사용하면 조합된 하나의 공식으로 나타낸 것이 가능하다. 특성법에 대한 기본 이론 및 사용법에 대해서는 추후에 기고하기로 하면 여기에서는 생략하기로 한다.

4. 결 론

“물산업 세계 3대 기업”으로 도약이라는 수자원공사의 Vision 달성을 위해 수자원연구원에서는 부정류해석기술을 핵심기술의 하나로 설정하여 펌프장 수충격 완화 신기술 개발에 박차를 가하고 있다. 유체를 다루는 현장에서는 부정류해석이 필수적이거나 일반 기술자들에게는 이 분야에 대한 지식이 극히 제한되어 쉽게 접근할 수 없는 것이 현실이다. 이러한 기술자들은 본지에서 기고하는 기본적인 이론들을 이해하면 부정류해석 전용 프로그램인 Surge2000, Hammer 등과 같은 상용 프로그램을 활용하여 부정류를 해석할 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- (1) L. Bergeron, “Water Hammer in Hydraulics and Wave Surges in Electricity,” (translated under the sponsorship of the ASME), Wiley, New York, 1961.
- (2) J. E. Dendy, “Two Methods of Galerkin-Type Achieving Optimum L^2 Rates of Convergence for First-Order Hyperbolics,” SIAM J. Numer. Anal., Vol. 11, pp. 637~653, 1974.
- (3) D. E. Goldberg, and E. B. Wylie, “Characteristic Method Using Time-Line Interpolations,” J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 109, No. HY1, Jan. 1983.
- (4) N. D. Katopodes, “A Dissipative Galerkin Scheme for Open-Channel Flow,” J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 110, No. 4, pp. 450~466, Apr. 1984.
- (5) N. D. Katopodes, and E. B. Wylie, “Simulation of Two-Dimensional Nonlinear Transients,” Symp.

- Multi-dimensional Fluid Transients, ASME, New Orleans, La., pp. 9~16, Dec. 1984.
- (6) Chintu Lai, "Numerical Modeling of unsteady Open-Channel Flow," Chap. 3 in V. T. Chow and B. C. Yen (eds.), *Advances in Hydrosience*, Vol. 14, Academic Press, New York, pp. 161~333, 1986.
- (7) J. Parmakian, *Water-Hammer Analysis*, Dover, New York, 1963.
- (8) H. H. Rachford, Jr., and Todd Dupont, "Some Applications of Transient Flow Simulation to Promote Understanding the Performance of Gas Pipeline Systems," *Soc. Pet. Eng. AIME*, pp. 179~186, Apr. 1974.
- (9) H. H. Rachford, Jr., and E. L. Ramsey, "Application of Variational Methods to Model Transient Flow in Complex Liquid Transmission Systems," Paper SPE 5663, 50th Annual Fall Meeting, Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, Sept. 28~Oct. 1, 1975.
- (10) C. S. Watt, A. P. Boldy, and J. M. Hobbs, "Combination of Finite Difference and Finite Element Techniques in Hydraulic Transient Problems," *Proc. 3rd Int. Conf. Pressure Surges*, BHRA, Canterbury, England, pp. 43~62, Mar. 1980.
- (11) "그림으로 푸는 수충격해석," 동명사, 2004.