퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2006, Vol. 16, No. 2, pp. 198-202

진리함수사상

Truth function mapping

박진원*, 강상진**, 윤용식**
Jin Won Park*, Sang Jin Kang**, Yong Sik Yun**

*Department of Mathematics Education, Cheju National University,
Jeju 690-756, Korea
**Department of Mathematics and Information, Cheju National University,
Jeju 690-756, Korea

요 약

본 논문에서는 Baldwin의 근사추론법과 Baldwin의 방법에서 주로 사용되는 진리함수사상을 소개하였다. 그리고 근사추론의 평가기준을 소개하고 기존의 진리함수사상보다 더 많은 평가기준을 만족시키는 진리함수사상을 정의하였다.

Abstract

In this paper, we introduce Baldwin's approximate reasoning with fuzzy logic and some truth function mappings usually used in Baldwin's method. And we introduce some assessment criteria for approximate reasonings and we define some truth function mappings which satisfy more criteria than those which are already known.

Key words : 근사추론, 진리함수사상, 진리함수변형, 역진리함수변형

1. 도 입

몇 개의 전제조건인 명제들로부터 결론을 이끌어내는 과정을 추론이라 하며, 명제는 참과 거짓을 명확히 구분할 수 있는 문장이어야 한다. 따라서 수학에서의 논리는 2가논리이다. 그러나 우리가 일상생활에서 사용하는 논리는 이러한 2가논리를 기반으로 하지 않고 다가논리를 기반으로 추론하게 된다. 예를 들면 사과가 익은 정도를 설명할 때 사과가 익었다와 사과가 익지 않았다 두 가지 문장만을 사용하지는 않는다. 매우 잘 익었다, 잘 익었다, 잘 익지 않았다, 전혀 익지 않았다 등 여러 가지 방법으로 설명할 수 있다.

만일 'x 가 P 이면 y 는 Q 이다'와 'x 는 P' 이다'라는 두 가지 전제가 주어졌을 때 'y 는 Q' 이다'라는 결론을 얻는 과정을 근사추론이라 한다.

근사추론법에는 무한치논리를 기반으로 하는 Zadeh의 근사추론법과 퍼지논리를 기반으로 하는 Baldwin의 근사추론법이 있다. Baldwin은 첫 번째 전제인 암시(implication)의 퍼지 진리값을 진리함수사상(truth function mapping)으로 정의하였는데 여기에 사용되는 사상에는 대표적인 여섯 가지가 있다. 그러나 근사추론법의 네 가지 평가기준에 비추어 볼 때 평가 기준을 모두 만족시키는 것은 한 가지 사상 밖에 없으며 네 가지 사상은 평가 기준 중 한 가지 밖에 만족시키지 않는다.

이 논문에서는 먼저 Baldwin의 근사추론법과 위에서 언급한 여섯 가지의 진리함수사상을 설명하였다. 그리고 좀 더 많은 평가 기준을 만족시키는 진리함수사상을 정의하여 소개하였다.

접수일자 : 2006년 3월 20일
완료일자 : 2006년 4월 10일

2. 근사추론

명확하게 참이거나 거짓인 문장을 명제라고 한다. 참인 명제에 진리값 1을 대응시키고 거짓인 명제에 진리값 0을 대응시키면 명제는 0 또는 1의 진리값을 갖는다. 이와 같이 진리값을 명확하게 0 또는 1을 갖지 않고 진리의 정도로서 0과 1 사이의 값으로 진리값을 갖는 명제를 퍼지명제라고 한다. 퍼지명제의 참과 거짓의 정도를 *true*, *very true*, *fairly true*, *false*, *very false* 등의 언어적인 단어를 사용하여 나타낸 값을 *언어적 진리값* 또는 *언어적 변수값*이라 한다. 또는 간단히 *변수값*이라 한다.

일반적으로 함수에서 변수라고하면 실수, 즉 수치변수를 뜻하는 것처럼 언어가 변수가 되는 것을 언어변수라고 한다. 예를 들어 '온도'의 수치변수는 5°, 15°, 23°, 32°,… 등의 수치적 값을 가지고, 언어변수는 춥다, 서늘하다, 따뜻하다, 덥다,… 등의 언어적 값을 가지는 변수이다. 따라서 언어변수의 변수값을 퍼지 부분집합으로 생각할 수 있고, 그러므로 각 변수값을 소속함수로 나타낼 수 있다.

특히, Baldwin은 언어변수 truth의 변수값과 그것들의 소속함수 값을 다음과 같이 정의하였고, 그림 1과 같이 나타낼 수 있다([2]).

정의 1. $x \in [0,1]$인 x에 대하여, 언어변수 truth의 변수값과 그것들의 소속함수 값을 다음과 같이 정의한다.

① $\mu_{true}(x) = x$,

② $\mu_{false}(x) = 1 - x$,

③ $\mu_{very\ true}(x) = \mu^2_{true}(x)$,

④ $\mu_{very\ false}(x) = \mu^2_{false}(x)$, ⑤ $\mu_{fairly\ true}(x) = \mu^{1/2}_{true}(x)$,

⑥ $\mu_{fairly\ false}(x) = \mu^{1/2}_{false}(x)$,

⑦ $\mu_{absolutely\ true}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x=1, \\ 0, & \text{if } x \neq 1, \end{cases}$

⑧ $\mu_{absolutely\ false}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x=0, \\ 0, & \text{if } x \neq 0, \end{cases}$

⑨ $\mu_{undecided}(x) = 1, \ \forall x \in [0, 1]$.

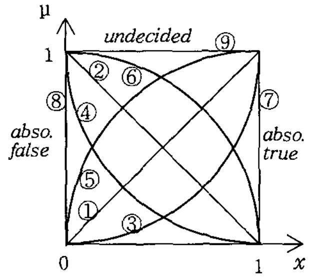


그림 1. truth의 변수값
Fig. 1. variable value of truth

그리고 그림 1로부터 $n \to \infty$일 때 다음을 얻을 수 있다.

$(very)^n$ *true* → *absolutely true* $(x \neq 0)$
$(very)^n$ *false* → *absolutely false* $(x \neq 1)$
$(fairly)^n$ *true* → *undecided* $(x \neq 0)$
$(fairly)^n$ *false* → *undecided* $(x \neq 1)$

아래와 같이 전제 1과 전제 2가 주어진 경우 y의 퍼지값 Q'를 추론하는 Baldwin의 근사추론은 다음과 같다.

전제 1	x가 P이면 y는 Q이다.
전제 2	(x는 P'이다)가 true.
결론	y는 Q'이다.

Baldwin의 방법을 살펴보면 '(x는 P'이다)가 true'가 주어졌을 때, 'x는 P이다'의 진리값은 역 진리함수변형에 의해

$$\mu_{\tau(P/P')}(\eta) = \max_{x \in X,\ \mu_P(x) = \eta} \mu_{P'}(x), \quad \forall \eta \in [0, 1]$$

로서 구할 수 있다([2-6]). 여기서 X, Y는 각각 P, Q의 대집합이고 $\tau_{(P/P')} = v$(x는 P이다 | x는 P'이다). 전제 1의 퍼지 진리값을 I라고 하면 전제 2가 주어질 때 v(y는 Q이다)는 max -star 합성으로

$$v(y\text{는 } Q\text{이다}) = \tau_{(P/P')} * I$$

이고([2-6]), 퍼지 진리값 v(y는 Q이다)의 소속함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu_{v(y\text{는 } Q\text{이다})}(\lambda) = \max_{\eta \in [0,1]} \{\mu_{\tau(P/P')}(\eta) * \mu_I(\eta, \lambda)\}$$

위의 식의 계산결과를 σ-*true*라고 하면 위의 식은 (y는 Q이다)는 σ-*true*와 같고 이것과 동등한 명제 (y는 Q'이다)는 진리함수변형에 의해 다음과 같이 구할 수 있다([2-6]).

$$\mu_{Q'}(y) = \mu_{\sigma-true}(\mu_Q(y)), \quad y \in Y.$$

예제 2. 진리함수변형의 예([1]).

(1) σ − *true* = *true*이면 $Q' = Q$이다.
(2) σ − *true* = *very true*이면 Q' = *very* Q이다.
(3) σ − *true* = *very very true*이면
Q' = *very very* Q이고,
σ − *true* = $(very)^n$ *true*이면
$Q' = (very)^n\ Q$이다.
(4) σ − *true* = *fairly true*이면 Q' = *fairly* Q이다.
(5) σ − *true* = *false*(또는 *not true*)이면 Q' = *not* Q이다.

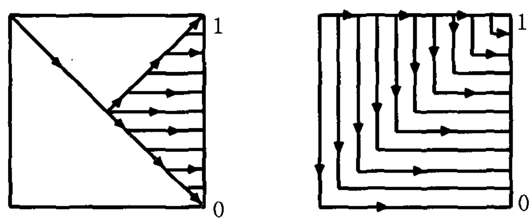
Baldwin은 암시의 퍼지진리값을 다음과 같이 진리함수사상으로 정의하였다.

$$\mu_I : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$$
$$(\eta, \lambda) \to \mu_I(\eta, \lambda) \in [0, 1]$$

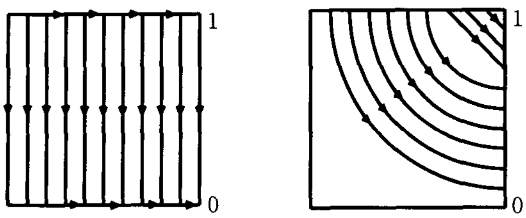
정의 3. $\mu_I(\eta, \lambda)$에 대한 대표적인 정의는 다음과 같다.

(i) Lukasiewicz rule ;
$\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge (1 - \eta + \lambda)$
(ii) Fuzzified binary logic rule ;
$\mu_I(\eta, \lambda) = (1 - \eta) \vee \lambda$
(iii) Max-min rule ;
$\mu_I(\eta, \lambda) = (\eta \wedge \lambda) \vee (1 - \eta)$
(iv) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$
(v) $\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$
(vi) $\mu_I(\eta, \lambda) = 1 \wedge \dfrac{\lambda}{\eta}$

식 (iii)~(vi)의 그래프는 그림 2와 같다([1]).



$\mu_I = (\eta \wedge \lambda) \vee (1 - \eta)$ $\qquad$ $\mu_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$



$\mu_I=\begin{cases}1, & \text{if } \lambda\geq\eta\\ 0, & \text{if } \lambda<\eta\end{cases}$ $\mu_I=1\wedge\frac{\lambda}{\eta}$

그림 2. λ를 매개변수로 한 $\mu_I(\eta,\lambda)$의 그래프

Fig. 2. graph of $\mu_I(\eta,\lambda)$ with parameter λ

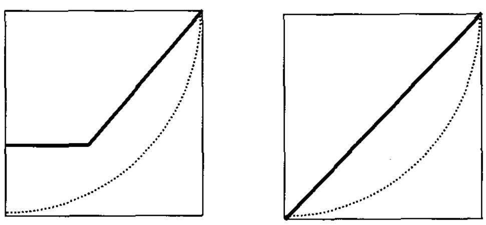
정리 4. 위 정의에 나타난 각 진리함수사상에 대한 추론결과는 다음의 표 1과 같다([1]).

표 1. 추론결과

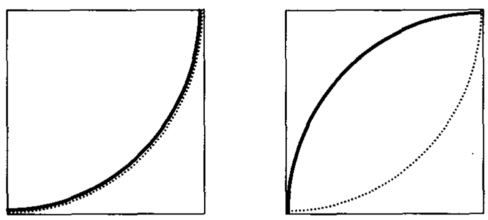
Table 1. results of inference

식 / $\tau_{(P/P')}$	*abs. true*	*very true*	*true*	*fairly true*	*undecided*	*false*
(i)	*true*				*unknown*	*unknown*
(ii)	*true*				*unknown*	*unknown*
(iii)	*true*				*unknown*	*unknown*
(iv)	*true*	*true*	*true*	*fairly true*	*unknown*	*unknown*
(v)		*very true*	*true*	*fairly true*	*unknown*	*unknown*
(vi)	*true*	*fairly true*	*fairly true*		*unknown*	*unknown*

위 표의 빈 칸은 결과를 언어변수 truth의 언어적 진리값으로 표현하기 어려운 형태로 결과가 나타난 경우이다. 그리고 어두운 부분에 해당하는 몇 가지 경우를 그래프로 표현하여 보면 아래 그림과 같다.



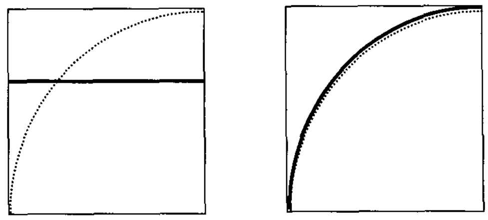
$\mu_I=(\eta\wedge\lambda)\vee(1-\eta)$ $\mu_I=\begin{cases}1, & \text{if } \lambda\geq\eta\\ \lambda, & \text{if } \lambda<\eta\end{cases}$



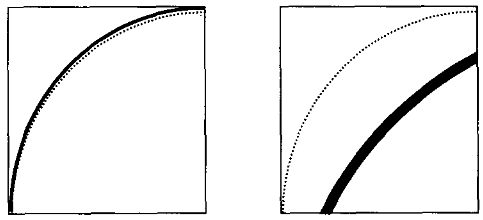
$\mu_I=\begin{cases}1, & \text{if } \lambda\geq\eta\\ 0, & \text{if } \lambda<\eta\end{cases}$ $\mu_I=1\wedge\frac{\lambda}{\eta}$

그림 3. $\tau_{(P/P')}=$ *very true*일 때의 $\tau_{(P/P')}\circ\mu_I$의 그래프

Fig. 3. graph of $\tau_{(P/P')}\circ\mu_I$ for $\tau_{(P/P')}=$ *very true*



$\mu_I=(\eta\wedge\lambda)\vee(1-\eta)$ $\mu_I=\begin{cases}1, & \text{if } \lambda\geq\eta\\ \lambda, & \text{if } \lambda<\eta\end{cases}$



$\mu_I=\begin{cases}1, & \text{if } \lambda\geq\eta\\ 0, & \text{if } \lambda<\eta\end{cases}$ $\mu_I=1\wedge\frac{\lambda}{\eta}$

그림 4. $\tau_{(P/P')}=$ *fairly true*일 때의 $\tau_{(P/P')}\circ\mu_I$

Fig. 4. graph of $\tau_{(P/P')}\circ\mu_I$ for $\tau_{(P/P')}=$ *fairly true*

이제 암시의 퍼지진리값을 다른 방법으로 정의하고 각각에 대한 추론결과를 살펴보려고 한다.

정의 5. 암시의 퍼지진리값을 다음과 같이 정의한다.

(vii) $\mu_I(\eta,\lambda)=\begin{cases}\lambda, & \text{if } \lambda\geq\eta\\ 0, & \text{if } \lambda<\eta\end{cases}$

(viii) $\mu_I(\eta,\lambda)=\begin{cases}1, & \text{if } \lambda\geq\eta\\ 2\lambda-\eta, & \text{if } \lambda\leq\eta\leq2\lambda\\ 0, & \text{if } \eta>2\lambda\end{cases}$

식 (vii)과 (viii)의 소속함수 $\mu_I(\eta,\lambda)$를 그래프로 표현하면 그림 5처럼 나타낼 수 있다.

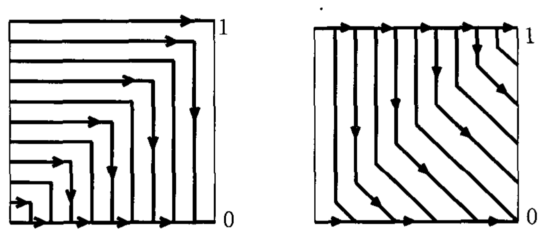


그림 5. λ를 매개변수로 한 $\mu_I(\eta,\lambda)$의 그래프

Fig. 5. graph of $\mu_I(\eta,\lambda)$ with parameter λ

정리 6. 식 (vii)와 (viii)에 대한 추론결과는 다음 표 2와 같다.

표 2. 추론 결과

Table 2. results of inference

$\tau_{(P/P')}$ / 식	true	very true	fairly true	false
(vii)	*true*	*very true*	*true*	*true*
(viii)	*true*		*fairly true*	*unknown*

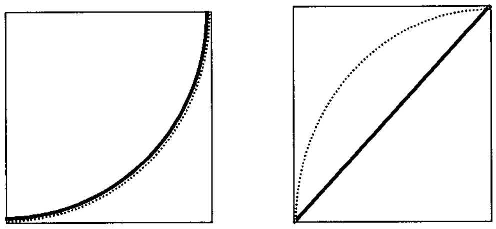
증명. 식 (vii)에 대하여 $\tau_{(P/P')}=$ *very true*인 경우를 생

각해 보자. 즉, $P' = very\ P$일 때, $\mu_{very\ true}(\eta) = \eta^2$이므로

$$\mu_{v(y는\ Q'이다)}(\lambda) = \bigvee_{\eta\in[0,\ 1]} \{\eta^2 \wedge \mu_I(\eta, \lambda)\} = \lambda^2$$

이 된다.

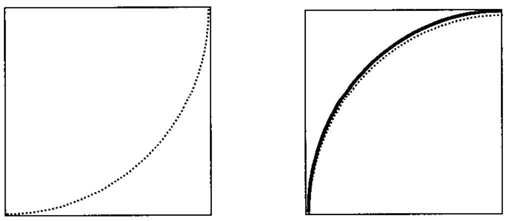
$\mu_{v(y는\ Q'이다)}(\lambda) = \lambda^2$이므로 $\mu_{Q'}(y) = (\mu_Q(y))^2$이다. 즉, $P' = very\ P$일 때 추론결과 $Q' = very\ Q$가 된다. 또한 결과를 그래프로 나타내면 그림 6의 왼쪽과 같다. 구체적으로 $\tau_{(P/P')}$=very true, fairly true일 때, 식 (vii)과 (viii)에 대한 추론 결과의 그래프는 아래 그림 6, 그림 7과 같다.



$$\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} \lambda, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$$

그림 6. $\tau_{(P/P')} = very\ true$, $\tau_{(P/P')} = fairly\ true$일 때의 각각의 $\tau_{(P/P')} \circ \mu_I$의 그래프

Fig. 6. graph of $\tau_{(P/P')} \circ \mu_I$ for $\tau_{(P/P')} = very\ true$ and $\tau_{(P/P')} = fairly\ true$, respectively



$$\mu_I(\eta, \lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 2\lambda - \eta, & \text{if } \lambda \leq \eta \leq 2\lambda \\ 0, & \text{if } \eta > 2\lambda \end{cases}$$

그림 7. $\tau_{(P/P')} = very\ true$, $\tau_{(P/P')} = fairly\ true$일 때의 $\tau_{(P/P')} \circ \mu_I$의 그래프

Fig. 7. graph of $\tau_{(P/P')} \circ \mu_I$ for $\tau_{(P/P')} = very\ true$ and $\tau_{(P/P')} = fairly\ true$, respectively

3. 근사추론법의 평가기준

앞에서 논의한 근사추론에 대한 추론 결과들이 과연 타당성 있는 결론으로 도출되어 나타나는가 하는 의문을 가지게 된다. 그래서 추론에 대한 타당성의 준거를 마련하여 그 기준에 부합되는지를 각각의 경우마다 조사해보면 추론결과의 타당도를 입증할 수 있게 된다. 먼저 평가의 준거로 근사추론법의 평가기준을 제시한 후, 앞서 논한 각각의 경우 평가기준에 적합한지를 판단해봄으로써 근사추론에 대한 특성과 결론을 동시에 자연스럽게 얻을 수 있다.

정의 7. 전제 1과 전제 2가 아래와 같을 때 y의 퍼지값 Q'을 추론하는 평가기준을 다음의 4가지로 정의한다.

전제 1 : 만일 $x = P$이면 $y = Q$이다.
전제 2 : $x = P'$이다.
결 론 : $y = Q'$이다.

평가기준 1 : 전제 2에서 '$P' = P$이면 $Q' = Q$ 이다'라고 추론한다.
평가기준 2 : 전제 2에서 '$P' = very\ P$이면 $Q' = very\ Q$ 이다'라고 추론한다.
평가기준 3 : 전제 2에서 '$P' = fairly\ P$이면 $Q' = fairly\ Q$ 이다'라고 추론한다.
평가기준 4 : 전제2에서 'P'가 P가 아니면 y값은 모른다'라고 추론한다.

정의 3에서 정의한 6가지 진리함수사상에 대하여 다음의 결과가 알려져 있다.

정리 8. 정의 3에서 정의한 6가지의 진리함수사상들에 대한 평가기준의 만족여부는 다음 표 3과 같다([1]).

표 3. 평가기준 만족여부

Table 3. agreement of assessment criteria

I	평가기준 1	평가기준 2	평가기준 3	평가기준 4
(i) $\mu_I(\eta,\lambda) = 1 \wedge (1 - \eta + \lambda)$	×	×	×	○
(ii) $\mu_I(\eta,\lambda) = (1 - \eta) \vee \lambda$	×	×	×	○
(iii) $\mu_I(\eta,\lambda) = (\eta \wedge \lambda) \vee (1 - \eta)$	×	×	×	○
(iv) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ \lambda, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$	○	×	○	○
(v) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$	○	○	○	○
(vi) $\mu_I(\eta,\lambda) = 1 \wedge \frac{\lambda}{\eta}$	×	×	×	○

표 3에 의하면, 위의 4가지의 평가기준에 대하여 (iv)는 3가지, (v)는 4가지를 만족하지만, 나머지 식들은 한가지 밖에 만족하지 못한다는 것을 알 수 있다.

정리 9. 정의 5에서 정의한 진리함수사상 (vii)과 (viii)에 대한 평가기준의 만족여부는 다음과 같다.

표 4. 평가기준 만족여부

Table 4. agreement of assessment criteria

I	평가기준1	평가기준2	평가기준3	평가기준4
(vii) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} \lambda, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 0, & \text{if } \lambda < \eta \end{cases}$	○	○	×	×
(viii) $\mu_I(\eta,\lambda) = \begin{cases} 1, & \text{if } \lambda \geq \eta \\ 2\lambda - \eta, & \text{if } \lambda \leq \eta \leq 2\lambda \\ 0, & \text{if } \eta > 2\lambda \end{cases}$	○	×	○	○

증명. 그림 6, 그림 7과 표 2에 의하여 위의 결과를 얻을 수 있다.

표 4에 의하면 식 (vii)은 평가기준 1과 2를 만족하고 있으

며, 식 (viii)은 평가기준 1, 3, 4를 만족하고 있다. 따라서 이 논문에서 정의한 진리함수사상은 추론결과의 타당성면에서 볼 때 비교적 좋은 진리함수사상이라고 생각된다.

References

[1] 퍼지이론과 제어, 채석·오영석 공저, 청문각, 2003.

[2] J. F. Baldwin, A new approach to approximate reasoning using a fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 2, 1979.

[3] J. F. Baldwin, Fuzzy logic and approximate reasoning for mixed input arguments, Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 11, 1979.

[4] J. F. Baldwin, Fuzzy logic and fuzzy reasoning, Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 11, 1979.

[5] J. F. Baldwin and B. W. Pilsworth, Axiomatic approach to implication for approximate reasoning with fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 3, 1980.

[6] J. F. Baldwin and N. C. F. Guild, Feasible algorithms approximate reasoning using fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 3, 1980.

저 자 소 개

박진원(Jin Won Park)
2001 ~ 현재 제주대학교 수학교육과 부교수

관심분야 : fuzzy topology, general topology,
email : jinwon@cheju.ac.kr

강상진(Sang Jin Kang)
2004 ~ 현재 제주대학교 정보수학과 박사과정

관심분야 : fuzzy probability, probability theory
email : ksjin@chol.com

윤용식(Yong Sik Yun)
2001 ~ 현재 제주대학교 정보수학과 부교수

관심분야 : fuzzy probability, probability theory
email : yunys@cheju.ac.kr