

연속시간 모델 순환결합형 신경회로망에서의 리미트사이클의 안정성 해석

Stability Analysis of Limit Cycles on Continuous-time Cyclic Connection Neural Networks

박철영

Cheol-Young Park

대구대학교 전자공학부

요 약

신경회로망을 동적 정보처리에 응용하기 위해서는 비대칭 결합 신경회로망에서 생성하는 동적 상태천이에 관한 직관적 이해가 필요하다. 자기결합을 갖고 결합하중치가 비대칭인 순환결합형 신경회로망은 복수 개의 리미트사이클을 기억할 수 있다는 것이 알려져 있다. 현재까지 이산시간 모델의 네트워크에 대한 상태천이 해석은 상세하게 이루어져 왔다. 그러나 연속시간모델에 대한 해석은 네트워크 규모의 증가에 따른 급격한 계산량의 증가 때문에 그다지 활발하게 연구가 이루어지지 않고 있다. 본 논문에서는 각 뉴런이 최근접 뉴런에만 이진화된 결합하중 +1 및 -1로 연결된 연속시간모델 순환결합형 신경회로망의 동적인 상태천이 특성을 해석하여 이산시간 모델에서 기억 가능한 리미트사이클과의 차이점을 분석하였다. 또한 뉴런의 활성화 함수가 완전선형인 경우와 구분선형 근사인 네트워크에 대한 리미트사이클의 안정성을 해석하였다.

Abstract

An intuitive understanding of the dynamic pattern generation in asymmetric networks may be considered an essential component in developing models for the dynamic information processing. It has been reported that the neural network with cyclic connections generates multiple limit cycles. The dynamics of discrete time network with cyclic connections has been investigated intensively. However, the dynamics of a cyclic connection neural network in continuous-time has not been well-known due to the considerable complexity involved in its calculation. In this paper, the dynamic behavior of a continuous-time cyclic connection neural network, in which each neuron is connected only to its nearest neurons with binary synaptic weights of ± 1 , has been investigated. Furthermore, the dynamics and stability of the network have been analyzed using a piece-wise linear approximation.

Key words : continuous-time model, limit cycle, cyclic neural network, stability

1. 서 론

인간의 뇌를 모델로 하는 신경회로망의 연구에서는 뇌의 기본적인 원리를 해명하면서 정보처리 등의 다양한 분야로 응용하기 위한 연구가 활발하게 수행되고 있다. 종래 신경회로망 연구는 주로 학습이나 패턴인식 등 인간이 행하는 정보의 기억과 상기 메커니즘을 네트워크가 갖는 안정 고정점(fixed-point)에 대응시켜서, 정적인 기억에 대한 에너지 함수나 기억용량에 대한 연구가 진행되어 왔다[1,2].

그러나 실제로 주위의 모든 현상은 시시각각 변하는 동적인 정보이다. 시간에 따라 변화하는 정보를 처리하기 위해서는 과거의 기억에만 근거하는 행동으로는 대응이 불가능한 측면도 많아서, 획득한 정보를 근거로 기억이나 행동 프로그램을 재구성해야 할 필요가 있다. 이러한 시간 변화에 실시간으로 대응하는 동적정보처리 시스템은 신경회로망을 이용하면 실현이 가능하다고 판단된다. 따라서 최근에는 동적인

정보처리에 대하여 여러 가지 연구가 진행되고 있다. 대표적으로는 시계열 정보 처리에 관한 연구[3-6], 비대칭 시냅스(synapse) 결합을 갖는 네트워크에서 나타나는 리미트사이클(limit cycle)이나 카오스(chaos)와 같은 다양한 다이내믹스에 관한 연구[7-9], 그리고 신경회로망에 카오스 다이내믹스를 도입하여 최적해 탐사 능력을 향상시키는 연구 결과[10] 등이 보고되었다.

특히, 리미트사이클과 관련하여 시간적으로 상태가 변화하는 네트워크에 리미트사이클을 기억시켜 정보처리에 이용하는 방법인 CRANN(Correct ReAction Neural Network)[11]을 사용하여 순환결합형 네트워크에 여러 개의 리미트사이클을 기억시키는 것이 가능하다는 연구결과[12] 및 상태 천이에 대한 해석[13]이 보고되었다. 특히, 리미트사이클 타입의 어트랙터(attractor)를 갖는 신경회로망은 연상 기억의 입장에서 보면, 패턴의 계열을 기억패턴으로 하는 시계열 패턴의 연상기억이 가능하여 시계열 신호의 발생이나 인식뿐만 아니라 고차의 지각·인식 등 유연한 정보처리에 있어서 중요한 요소이다.

CRANN의 해석 알고리즘은 뉴런의 운동벡터(kinetic vector)를 이용하여 시그모이드 함수(sigmoid function)를 포함하는 고차의 미분방정식을 해석하지 않고서도 전체의 초

접수일자 : 2005년 12월 31일

완료일자 : 2006년 4월 14일

감사의 글 : 이 논문은 2003학년도 대구대학교 학술연구비에 의하여 연구되었음.

기상태에 대해서 상태천이를 해석하는 것이 가능하므로 고속 해석이 가능하다. 그러나 이 방법은 뉴런의 내부 상태를 고려하지 않으며, 또한 뉴런의 함수를 high-gain limit로 가정하기 때문에 정확한 다이내믹스를 기술할 수 없다. 이러한 문제점을 개선하기 위하여 CRANN의 해석 알고리즘에 뉴런 각각의 내부 상태와 상태변화에 걸리는 시간을 조사할 수 있는 해석방법[14]이 제안되었다. 하지만 이 경우에도 뉴런의 출력함수는 high-gain limit 함수에 근사시켜 해석하고 있기 때문에 네트워크의 정확한 동작을 설명하는데 부족하다. 따라서 기존 해석방법의 문제점을 해결하고 네트워크의 안정성을 해석할 수 있는 방법에 대한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 선형근사 해석 방법을 이용하여 결합하중이 1과 -1로 이진화된 연속시간모델 순환결합형 신경회로망의 동작 상태천이와 안정성에 대한 해석을 수행한다. 먼저 2장에서는 순환결합형 신경회로망에 대하여 소개하고, 시뮬레이션을 통하여 이산시간과 연속시간의 네트워크에서 기억 가능한 리미트사이클의 수를 비교 분석한다. 3장에서는 연속시간-연속함수 네트워크에서 뉴런의 활성화 함수를 구분선형으로 근사시켜 비선형성에 의한 네트워크의 안정성을 해석하고, 기존의 네트워크 해석 알고리즘인 CRANN의 문제점을 규명한다. 또한, 해석 결과로부터 순환결합형 네트워크에서 발생하는 리미트사이클의 기본적인 특징을 정리한다. 마지막으로 4장의 결론에서는 본 논문의 내용을 요약하고 향후의 연구과제에 대하여 언급한다.

2. 순환결합형 네트워크와 리미트사이클

본 논문에서는 자기결합 이외의 하중치는 ±1을 갖는 비대칭 네트워크를 이용한다. 순환결합형 네트워크는 그림 1과 같이 인접 뉴런의 결합과 자기결합으로 구성되며 시냅스 결합하중 W 는 식 (1)과 같이 표현된다.

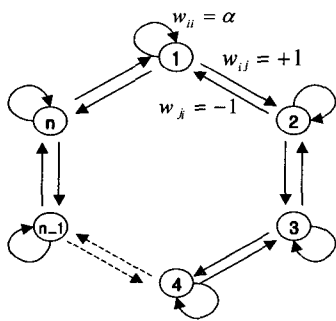


그림 1. 순환결합형 네트워크

Fig.1. Cyclic Connection Neural Networks

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & \dots & w_n \\ w_n & w_1 & w_2 & \dots & w_{n-1} \\ w_{n-1} & w_n & w_1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & w_2 \\ w_2 & w_3 & \dots & w_n & w_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

순환결합형 신경회로망은 진동패턴을 생성하는 가장 간단한 구조의 네트워크이며, 각 뉴런이 전체 뉴런과 결합된 상호결합형 네트워크에 비해 네트워크의 구성이 간단하면서도 많은 수의 다양한 동적 패턴을 실현할 수 있다.

식 (1)의 네트워크는 하중치 W 를 변화시킴으로써 여러 가지 순환결합 네트워크를 구성할 수 있다. 또한 적절한 하중치를 선택함으로써 뉴런의 내부상태가 시간에 대하여 주기적으로 변화하는 복수 개의 리미트사이클을 생성한다. 기억된 리미트사이클이 어느 계열을 가지는가는 네트워크의 초기 상태에 의해 결정된다.

순환결합형 네트워크는 식 (1)의 결합하중치가 식 (2)와 같을 때 기억 가능한 리미트사이클의 수가 가장 많은 것으로 알려져 있다[12,13]. 따라서 본 논문의 해석에서 식 (2)로 표현되는 순환결합형 네트워크에 대해서 고찰한다.

$$W = \begin{cases} w_1 = \alpha & (1 < \alpha < 2) \\ w_2 = -1 \\ w_n = +1 \\ otherwise = 0. \end{cases} \quad (2)$$

결합하중치 w_{ij} 를 이용하여 이산시간 및 연속시간의 네트워크 모델을 기술하면 이산시간 뉴런 모델은 다음 식과 같다.

$$u_i[t+1] = \sum_{j=1}^n w_{ij} v_j[t] + h_i \quad (3)$$

$$v_i[t] = \theta(u_i[t]) \quad (4)$$

여기서, n 은 뉴런(소자)의 수, w_{ij} 는 결합하중을 나타내고 $u_i[t]$, $v_j[t]$, h_i 는 각각 i 번째 뉴런의 막전위(membrane potential), 뉴런의 출력, 외부로부터의 바이어스를 나타낸다. $\theta(\cdot)$ 는 출력이 ±1인 스텝 함수이다.

또한, 연속시간 신경회로망의 다이내믹스는 다음과 같은 비선형 미분방정식으로 주어진다.

$$\tau \frac{du_i}{dt} = -u_i + \sum_{j=1}^n w_{ij} v_j + h_i \quad (5)$$

$$v_i = f(u_i) = \tanh(u_i / T) \quad (6)$$

이산시간 뉴런 모델과 비슷하게 n 은 뉴런의 수, w_{ij} 는 결합하중을 나타내고 τ , u_i , v_j , h_i 는 각각 i 번째 뉴런의 시정수, 막전위, 단조증가인 시그모이드 전달함수, 외부로부터의 바이어스를 나타낸다. 본 논문에서 외부로부터의 바이어스 $h_i = 0$ 이다.

시뮬레이션은 뉴런의 수를 변화시키면서 수행하였고 대표적으로 뉴런의 수가 5개인 경우의 이산시간과 연속시간 모델에서 기억 가능한 리미트사이클의 패턴을 조사하여 각각 표 1과 2에 나타내었다. 각 표에서 나타낸 수치는 5개 뉴런의 상태 (V_1, V_2, \dots, V_5)를 이진수에 대응시켜(즉 +1은 1, -1은 0) 십진수로 변환한 것이다.

표 1. 5-뉴런의 순환결합형 네트워크에 기억 가능한 리미트사이클(이산시간 모델)

Table 1. Limit cycles generated in 5-neuron cyclic connection neural network(discrete-time model)

고정점	0, 32
(1)5주기	3→6→12→24→17→3
(2)5주기	7→14→28→25→19→7
(3)10주기	5→13→9→11→10→26→18→22→20→21→5

표 2. 5-뉴런의 순환결합형 네트워크에 기억 가능한 리미트사이클(연속시간 모델)

Table 2. Limit cycles generated in 5-neuron cyclic connection neural network (continuous-time model)

고정점	0, 32
(1)10주기	3→7→6→14→12→28→24→25→17→19→3
(2)10주기	→13→9→11→10→26→18→22→20→21→5

시뮬레이션 결과로부터 이산시간모델과 연속시간모델의 네트워크에서 기억 가능한 리미트사이클의 수와 형태가 다르다는 것을 알 수 있다. 식 (2)의 결합중치를 이용하여 뉴런 수에 대한 이산시간과 연속시간 네트워크에 기억 가능한 리미트사이클의 수를 시뮬레이션한 결과는 표 3과 같다.

표 3. 뉴런 수에 대한 순환결합 네트워크에 저장 가능한 리미트사이클의 수

Table 3. Number of limit cycles in cyclic connection neural network as a function of n.

뉴런수	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
이산시간	1	1	3	6	6	11	13	26	27	57
연속시간	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5

3. 네트워크의 안정성

2장에서는 이산시간 모델과 연속시간 모델의 순환결합형 네트워크에 각각 기억되는 리미트사이클의 개수와 형태가 다르다는 것을 보았다. 본 장에서는 그러한 원인을 분석하고 CRANN을 이용한 해석의 문제점을 명확하게 하기 위하여 네트워크에 대한 안정성을 해석한다.

3.1 완전 선형 네트워크의 해석

우선 뉴런의 활성화함수가 완전히 선형인 경우에 대하여 고찰한다. 3-뉴런의 순환결합형 네트워크에 있어서 활성화함수를 다음 식과 같은 선형으로 가정한다.

$$x_i = k \cdot u_i \quad (7)$$

이 경우 다이내믹스는 다음 식과 같이 주어진다.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = k \left\{ \sum_j w_{ij} x_j(t) - \frac{x_i(t)}{k} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{X} &= kWX - X \\ &= (kW - I)X = AX \end{aligned} \quad (9)$$

여기서

$$A = \begin{pmatrix} ka-1 & k & -k \\ -k & ka-1 & k \\ k & -k & ka-1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

이다. $\det(A) = 0$ 이므로 고유치(eigen value)와 고유벡터(eigen vector)는 각각 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \lambda &= a - \frac{1}{k}, & e &= (1, 1, 1) \\ \mu &= a - \frac{1}{k} + \sqrt{3}i, & w &= (-2, 1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i) \\ \bar{\mu} &= a - \frac{1}{k} - \sqrt{3}i, & \bar{w} &= (-2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i) \end{aligned} \quad (11)$$

여기서 파라미터 μ 와 $\bar{\mu}$ 는 이 시스템이 회전운동을 포함하고 있다는 것을 나타낸다. 적당한 좌표변환을 통하여 회전운동을 상세하게 조사한다. $w = u + iv$ 이므로 $w = (-2, 1, 1) + i(0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 를 대입하여 (e, v, u) 를 베이스로 하는 좌표계 Y 를 고려한다.

$$\begin{aligned} X &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \\ &= y_1(1, 1, 1) + y_2(0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) + y_3(-2, 1, 1) \end{aligned} \quad (12)$$

식 (10)에 의해 $X = PY$ 로 표현되는 변환 행렬 P 는

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\dot{Y} = P^{-1}APY \quad (14)$$

$$= \begin{pmatrix} ka-1 & 0 & 0 \\ 0 & ka-1 & k\sqrt{3} \\ 0 & -k\sqrt{3} & ka-1 \end{pmatrix} Y$$

가 된다. 따라서 다음 식과 같이 $y_i(t)$ 에 대한 방정식이 구해진다.

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{(ka-1)t} \\ y_2(t) = e^{(ka-1)t}(y_2(0)\cos(\sqrt{3}t) + y_3(0)\sin(\sqrt{3}t)) \\ y_3(t) = e^{(ka-1)t}(-y_2(0)\sin(\sqrt{3}t) + y_3(0)\cos(\sqrt{3}t)) \end{cases} \quad (15)$$

여기서 $Y(0) = P^{-1}X(0)$ 이고 $X(0)$ 는 초기치를 나타낸다. 같은 방법으로 X 에 관한 방정식도 $Y = PY$ 로부터 구해진다. 결과로부터 y_2 와 y_3 는 회전운동을 하고 있는 것을 알 수 있다. 그러나 그것의 회전 반경은 $e^{(ka-1)t}$ 에 비해하기 때문에 매우 빨리 증가하게 된다. 완전히 선형인 활성화 함수를 고려하면, 초기치가 원점 부근에 있더라도 바로 비선형 영역에 도달하는 것을 알 수 있다. 선형계의 해석에서 알 수 있는 다른 사실은 $ka > 1$ 일 때 진동해(리미트사이클)가 나타나는 것이다. 따라서 비선형 효과를 고려했을 때의 진동해에 대해서 고찰한다.

3.2 구분선형 근사에 의한 3-뉴런 네트워크 해석

비선형 효과를 나타내기 위하여 뉴런의 활성화함수를 구분선형으로 근사시킨다. 구분선형 근사에 의해 활성화함수는 다음과 같이 된다.

$$x_i = g(u_i) = \begin{cases} 1 & (u_i > 1/k) \\ k \cdot u_i & (|u_i| < 1/k) \\ -1 & (u_i < -1/k) \end{cases} \quad (16)$$

$|u_i| < 1/k$ 가 되는 경우는 선형영역을 나타내며 식 (7)에 따른다. 모든 뉴런이 선형영역에 있는 경우에는 앞 절의 결과와 차이가 없다.

여기서는 어떤 뉴런은 포화영역 ($|u_i| > 1/k$)에 그리고 어떤 뉴런은 선형영역 ($|u_i| < 1/k$)에 있는 것으로 가정한 경우의

시스템의 거동을 고려한다. 그리고 이러한 시스템에서 생성되는 리미트사이클을 정성적으로 해석한다. 우선 거론하는 것은 3-뉴런의 네트워크이다. 첫 번째의 뉴런이 선형영역에 있고 나머지 두 개의 뉴런이 포화영역에 있는 경우에는 다음 식과 같다.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = (ka - 1)x_1(t) - x_2 + x_3 \quad (17)$$

따라서 $x_1(t)$ 는 다음 식과 같이 나타난다.

$$x_1(t) = (x_1(0) + \beta(-x_2 + x_3))e^{(ka-1)t} - \beta(-x_2 + x_3) \quad (18)$$

여기서는 $\beta \equiv k/(ka-1)$ 로 하며, x_2 와 x_3 의 부호가 일치하는 경우에는 다음 식과 같이 된다.

$$x_1(t) = x_1(0)e^{(ka-1)t} \quad (19)$$

따라서 첫 번째의 뉴런은 부호를 변화하지 않는 β , 또는 x_2 와 x_3 가 다른 부호이어도 $x_1(0)$ 와 $(-x_2 + x_3)$ 가 같은 부호인 경우에는 첫 번째 뉴런의 부호가 변하지 않는 것을 알 수 있다. 반면에 $x_1(0)$ 와 $(-x_2 + x_3)$ 가 다른 부호의 경우에는 첫 번째 뉴런의 부호가 반전하는 것을 알 수 있다. 이 경우에 β 는 다음과 같은 조건을 만족한다.

$$\beta = \frac{k}{ka-1} > \frac{1}{2} \quad (20)$$

통상 k 는 충분히 크므로 식 (20)은 결국 $a < 2$ 가 된다. 이것은 a 가 2보다 커지면 다른 뉴런으로부터의 작용에 의해 현재의 상태를 유지하는 힘이 증가하여 상태 천이가 불가능한 것을 의미한다. 전 절의 결과와 일치시켜 a 의 조건을 구하면 다음과 같다.

$$1 < a < 2 \quad (21)$$

이상의 결과를 뉴런의 상태를 벡터로 나타낸 좌측을 첫 번째의 뉴런으로 하고 상태 천이가 일어나는 뉴런에 대해서만 대칭성을 고려하면 다음과 같게 된다.

$$\begin{aligned} (+1, +1, -1) &\rightarrow (-1, +1, -1) \\ (-1, +1, -1) &\rightarrow (-1, +1, +1) \\ (-1, +1, +1) &\rightarrow (-1, -1, +1) \\ (-1, -1, +1) &\rightarrow (+1, -1, +1) \\ (+1, -1, +1) &\rightarrow (+1, -1, -1) \\ (+1, -1, -1) &\rightarrow (+1, +1, -1) \end{aligned}$$

이것들은 6개의 상태천이를 나타내는 하나의 리미트사이클을 형성하고 있는 것을 알 수 있다. 3-뉴런 네트워크에서 남아있는 두 개의 상태 $(+1, +1, +1)$ 와 $(-1, -1, -1)$ 는 안정된 고정점이다. 이 결과는 CRANN을 이용한 해석결과와 완전히 일치한다. 이상의 결과는 첫 번째 뉴런이 선형영역에 있고 나머지 두 개의 뉴런이 포화영역에 있다고 임의로 가정한 것의 결과이다. 다음으로 고려해야 하는 것은 두 개의 뉴런이 선형영역에 있는 경우이다. 비슷한 해석을 통하여 어느 시각에는 항상 하나의 뉴런만이 그 상태를 천이시키는 것을 알 수 있고 결과적으로는 하나의 뉴런만이 선형영역에 있는 경우에 귀착되는 것을 알 수 있다. 마지막으로 3개의 뉴런이 선형영역에 있는 경우에는 전 절의 결과로부터 일정 시간이 경과한 후에는 어떤 뉴런이 포화영역에 들어가는 것이 확실하고 그 다음은 역시 뉴런 하나가 천이하는 것으로 생각하는 것이 가능하다.

3.3 구분선형 근사에 의한 4-뉴런 네트워크 해석

전 절과 비슷하게 하여 4-뉴런 네트워크의 상태천이를 구분선형 근사에 의해 고찰한다. 뉴런 1이 선형영역, 뉴런 2, 3, 4가 포화영역에 있는 경우에 시스템의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = (ka - 1)x_1(t) - x_2 + x_4 \quad (22)$$

따라서 $x_1(t)$ 는 다음 식과 같다.

$$x_1(t) = (x_1(0) + \beta(-x_2 + x_4))e^{(ka-1)t} - \beta(-x_2 + x_4) \quad (23)$$

상태를 변화하는 것은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (+1, +1, \pm 1, -1) &\rightarrow (-1, +1, \pm 1, -1) \\ (-1, -1, \pm 1, +1) &\rightarrow (+1, -1, \pm 1, +1) \end{aligned}$$

그러나 이들 중에서 $(+1, +1, -1, -1) \rightarrow (-1, +1, -1, -1)$ 와 대칭이 되는 $(-1, -1, +1, +1) \rightarrow (+1, -1, +1, +1)$ 는 실현되지 않는다. 이것은 발화상태의 대칭성으로부터 뉴런 1만이 선형영역에 있는 일은 없고 뉴런 1이 선형영역이면 뉴런 3도 선형영역에 있기 때문이다. 이것은 짝수 개의 뉴런으로 구성되는 네트워크에 나타나는 독특한 현상이다. 나중에 알 수 있듯이 이 경우는 뉴런 1과 3이 동시에 상태를 변화시킨다. 따라서 하나의 뉴런만이 선형영역에 들어가는 조건은 천이하기 전에 상태가 +1인 뉴런의 수와 상태가 -1인 뉴런의 개수가 일치하지 않는다. 이상의 결과를 고려하면 네트워크에서 가능한 상태 천이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (+1, +1, +1, -1) &\rightarrow (-1, +1, +1, -1) \\ (-1, -1, -1, +1) &\rightarrow (+1, -1, -1, +1) \\ (-1, +1, +1, +1) &\rightarrow (-1, -1, +1, +1) \\ (+1, -1, -1, -1) &\rightarrow (+1, +1, -1, -1) \\ (+1, -1, +1, +1) &\rightarrow (+1, -1, -1, +1) \\ (-1, +1, -1, -1) &\rightarrow (-1, +1, +1, -1) \\ (+1, +1, -1, +1) &\rightarrow (+1, +1, -1, -1) \\ (-1, -1, +1, -1) &\rightarrow (-1, -1, +1, +1) \end{aligned}$$

뉴런 1과 2가 선형영역에 있고 뉴런 2 및 4가 포화영역에 있는 경우에도 역시 하나의 뉴런만이 천이한다. 따라서 뉴런 1과 3이 선형영역이고 뉴런 2와 4가 포화영역에 있는 경우를 고려한다. 이 경우의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka-1 & 0 \\ 0 & ka-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} x_2 - x_4 \\ -x_2 - x_4 \end{pmatrix} \quad (24)$$

따라서 $x_1(t)$ 와 $x_3(t)$ 는 다음 식이 된다.

$$x_1(t) = (x_1(0) - \beta(x_2 - x_4))e^{(ka-1)t} + \beta(x_2 - x_4) \quad (25)$$

$$x_3(t) = (x_3(0) + \beta(x_2 - x_4))e^{(ka-1)t} - \beta(x_2 - x_4) \quad (26)$$

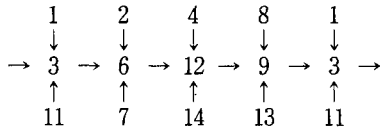
앞의 경우와 같게 하여 상태 천이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} (+1, +1, -1, -1) &\rightarrow (-1, +1, +1, -1) \\ (-1, -1, +1, +1) &\rightarrow (+1, -1, -1, +1) \\ (-1, +1, +1, -1) &\rightarrow (-1, -1, +1, +1) \\ (+1, -1, -1, +1) &\rightarrow (+1, +1, -1, -1) \end{aligned}$$

또한, 아직 나타나지 않은 다음의 4개 상태들은 안정한 고정점인 것을 쉽게 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} (+1, +1, +1, +1), (+1, -1, +1, -1), \\ (-1, +1, -1, +1), (-1, -1, -1, -1) \end{aligned}$$

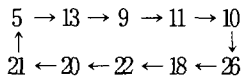
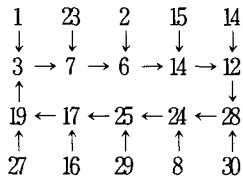
각 상태벡터를 이진수에 대응(즉, +1은 1에 그리고 -1은 0로)시켜 이를 십진수로 변환하여 나타내면 상태 천이는 다음과 같다.



이상의 결과로부터 4-뉴런의 네트워크에서는 하나의 리미트사이클과 4개의 안정한 고정점이 존재하는 것을 알았다. 또한 리미트사이클에 있어서는 두 개의 뉴런이 동시에 상태를 변화하며 하나의 뉴런이 상태를 변화하는 것은 어트랙터(attractor)에 끌려 들어가는 경우이다.

3.4 구분선형 근사에 의한 5-뉴런 네트워크 해석

5-뉴런 네트워크에서는 뉴런의 수가 홀수이면서 소수(prime)이므로 상태천이에서는 하나의 뉴런만이 상태를 변화시킨다. 전 절에서와 마찬가지로 리미트사이클을 구한 결과는 아래와 같다.



해석 결과에서 5-뉴런 네트워크의 경우 10주기의 리미트사이클이 2개, 평형점이 2개 존재하는 것을 알 수 있다. CRANN의 해석 결과에서는 리미트사이클이 3개 존재하고 있으나 실제의 연속시간 동작에서는 리미트사이클의 융합이 일어나는 것을 알 수 있다. CRANN의 해석에서는 간단히 하기 위하여 활성화 함수 k 가 무한대인 고이득 리미트(high-gain limit)를 가정하고 있으나 실제의 시스템에서는 중간상태가 존재하기 때문에 이와 같은 차이가 발생한다.

3.5 리미트사이클의 일반적인 성질

이제까지의 해석으로부터 연속함수-연속시간 모델에 있어서 결합하중치가 식 (1)과 (2)를 만족시키는 네트워크의 기본적인 특징은 다음과 같다.

- 발화 뉴런의 수는 뉴런 수가 홀수일 때 $(N\pm 1)/2$ 개이고 짝수일 때 $N/2$ 개이다.
- 동시에 상태가 변화하는 뉴런의 수는 뉴런 수가 홀수일 때 1개이고 짝수일 때 2개이다.
- 리미트사이클 주기는 뉴런 수가 홀수일 때, $2N$ 주기이고 짝수일 때는 N 주기이다.

이들 특징은 생성되는 리미트사이클 전체에 해당하지는 않으나 뉴런 수가 증가해도 최소한 하나는 이러한 특징에 해당하는 상태의 리미트사이클이 생성된다. 이상의 결과로부터 뉴런의 수를 홀수와 짝수로 구분하여 뉴런의 발화 패턴과 리미트사이클의 수에 대하여 정리하면 다음과 같다.

표 4 뉴런 수가 홀수인 경우의 리미트사이클 개수
Table 4. Number of limit cycles for odd number of neurons

뉴런의 수	3	5	7	9	11
1. 뉴런이 $(N\pm 1)/2$ 개 연속하여 발화	1	1	1	1	1
2. N 의 인수와 같은 발화 패턴	0	0	0	1	0
3. 이외의 발화패턴(발화수 $(N\pm 1)/2$ 개)	0	1	2	2	3
4. 리미트사이클의 총 개수	1	2	3	4	5

표 5 뉴런 수가 짝수인 경우의 리미트사이클 개수
Table 5. Number of limit cycles for even number of neurons

뉴런의 수	4	6	8	10	12
1. 뉴런이 $N/2$ 개 연속하여 발화	1	1	1	1	1
2. N 의 인수와 같은 발화패턴	0	1	1	2	3
3. 이외의 발화패턴(발화수 $N/2$ 개)	0	0	1	1	1
4. 리미트사이클의 총 개수	1	2	3	4	5

이들 결과로부터 뉴런의 수에 관계없이 적어도 표에서 1번의 성질을 갖는 리미트사이클이 1개 있는 것을 알 수 있다. 또한, 표의 2번째 성질로부터 뉴런 수에 대해서 리미트사이클의 수를 구하는 것은 가능하지 않으나 인수(factor)의 뉴런이 갖는 리미트사이클의 수를 알면 구할 수 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 선형근사 해석 방법을 이용하여 최근접 뉴런사이클만 결합이 존재하는 특정 순환결합형 신경회로망의 동적인 상태천이 특성을 상세히 분석하였다. 먼저, 뉴런의 운동벡터에 근거하여 상태천이를 분석하는 기존의 해석방법(CRANN)으로는 알 수 없었던 리미트사이클의 융합을 확인하였다. 이는 연속시간 모델의 네트워크에서는 어떤 리미트사이클의 궤도가 중간상태를 통과할 때, 다른 리미트사이클의 어트랙터에 끌려 들어가는 일이 발생하여 결과적으로 리미트사이클들은 하나로 융합되는 것을 나타낸다. 따라서 연속시간 모델에서 생성되는 리미트사이클의 수는 이산시간 모델의 네트워크에 비해서 감소하는 이유를 명확하게 설명할 수 있다. 또한, 연속시간-연속함수 네트워크에서 뉴런의 활성화 함수를 구분선형으로 근사시켜 비선형성에 의한 네트워크의 안정성을 해석하고, 기존의 네트워크 해석 알고리즘인 CRANN의 문제점을 규명하였다. 마지막으로, 해석 결과에 근거하여 연속시간 모델의 순환결합형 네트워크에서 발생하는 리미트사이클의 기본적인 특징을 정리하였다.

순환결합형 네트워크는 많은 동적 정보를 리미트사이클의 형태로 저장하는 메모리 시스템을 비롯하여 시계열 정보처리 등에 사용될 수 있다. 기억 정보간의 천이를 가능하게 하는 것은 정보처리의 관점에서 흥미 있는 문제이다. 따라서 본 논문의 이론적인 해석결과를 근거로 순환결합형 네트워크를 응용한 동적 정보처리 시스템의 구성을 검토하는 것이 향후의 연구 방향으로 생각된다.

참 고 문 헌

- [1] D. J. Amit, H. Gutfreund and H. Sompolinsky, "Storing infinite number of patterns in spin-glass model of neural networks," *Phys. Rev. Lett.* 55, pp. 1530-1533, 1985.
- [2] J. H. Li, A. N. Michel and W. Porod, "Qualitative analysis and synthesis of a class of neural network," *IEEE Trans. CAS*, vol. 35, no. 8, pp. 976-986, 1988.
- [3] Y. Mori, P. Davis and S. Nara, "Pattern retrieval in an asymmetric neural network with embedded limit cycles", *Journal of Phys.*, vol. A22, pp. L525-532, 1989.
- [4] K. Nowara and T. Saito, "Guaranteed storing of limit cycles into a discrete-time asynchronous neural network," *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E75-A, pp. 1579-1582, 1992.
- [5] Y. Hayashi, "Oscillatory neural network and learning of continuously transformed patterns," *Neural Networks*, vol. 7, pp. 219-231, 1994.
- [6] G. Setti, P. Thiran and C. Serpico, "An approach to information propagation in 1-D Cellular Neural networks-part : Global propagation II," *IEEE Trans. on CAS I: Fundamental theory and applications*, Vol 45, No .8, pp. 790-811, 1998.
- [7] H. Sompolinsky and I. Kanter, "Temporal association in asymmetric neural networks," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 57, pp. 2861-2864, 1986.
- [8] K. Aihara, M. Takanabe, and M. Toyoda, "Chaotic neural networks," *Phys. Lett. A*, vol. 44, pp. 333-340, 1990.
- [9] J. F. Kolen and S. C. Kremer, "A field guide to dynamical recurrent networks," *IEEE Press*, New York, 2001.
- [10] Y. Hayakawa, A. Marumoto, and Y. Sawada, "Effect of the noise in the performance of a neural network model for optimization problems," *Phys. Rev. E*, vol. 51, pp. 2693-2696, 1995.
- [11] K. Nakajima and Y. Hayakawa, "Correct Reaction Neural Network," *Neural Networks*, vol. 6, pp. 217-222, 1993.
- [12] C. Y. Park, Y. Hayakawa, K. Nakajima and Y. Sawada, "Limit cycles of one-dimensional neural networks with the cyclic connection matrix," *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E79-A, no. 6, pp. 752-757, 1996.
- [13] C. Y. Park, and K. Nakajima, "Asymptotic Analysis of Cyclic Transitions in the Discrete-Time Neural Networks with Antisymmetric and Circular Interconnection Weights," *IEICE Trans. on Fundamentals*, Vol. E87-A, No. 6, pp. 1487-1490, 2004.
- [14] H. Ninomiya, A. Kamo, T. Yoneyama, and H. Asai, "A Fast Algorithm for Spatiotemporal Pattern Analysis of Neural Networks with Multivalued Logic," *IEICE Trans. on Fundamentals*, vol. E81-A, no. 9, pp. 1847-1852, 1998.

저 자 소 개



박철영(Cheol-Young Park)

1984년 : 경북대학교 전자공학과 졸업
 1986년 : 경북대학교 공학석사
 1997년 : 일본 동북대학 공학박사
 1985년~1990년 : (주)금성사
 중앙연구소 주임연구원
 1991년~1993년 : (주)금성사
 영상미디어연구소 선임연구원
 1993년~1997년 : LG전자 멀티미디어연구소 책임연구원
 1997년~현재 : 대구대학교 전자공학부 부교수

관심분야 : 신경회로망을 이용한 지능정보처리, 신경회로망 VLSI 설계 및 신개념 지능형 소자 개발
 E-mail : cypark@daegu.ac.kr