

불확실한 비선형 시스템의 균형화된 모델 축소

A Balanced Model Reduction for Uncertain Nonlinear Systems

류석환* · 최병재*

Seog-Hwan Yoo and Byung-Jae Choi

* 대구대학교 전자공학부

요 약

이 연구는 T-S 퍼지 접근법을 이용하여 불확실한 비선형 시스템의 균형화된 모델 차수 축소 방법을 제시한다. 일반화된 가제어성, 가관측성 그래미안을 정의하고 이들을 이용하여 균형화된 상태공간 모델을 얻는다. 균형화된 상태공간 모델로부터 상태변수 뿐만 아니라 불확실한 요소를 절삭하여 간략화된 모델을 얻는 기법을 제시하고 모델오차의 상한치를 제시한다. 균형화된 상태공간은 선형행렬 부등식의 해를 구하여 구현할 수 있으며 제시한 방법의 효용성을 보여주기 위하여 수치예를 보여준다.

Abstract

This paper deals with a balanced model reduction for uncertain nonlinear systems via T-S fuzzy approach. We define a generalized controllability/observability gramian and obtain a balanced state space model using generalized gramians which can be obtained from solutions of linear matrix inequalities. We present a balanced model reduction scheme by truncating not only state variables but also uncertain elements. An upper bound of the model reduction error will also be suggested. In order to demonstrate the efficacy of our method, a numerical example will be presented.

Key words : balanced model reduction, T-S fuzzy system, generalized controllability, observability gramian, linear matrix inequality

1. 서 론

고차원 선형시스템의 제어기설계에 있어서 H_{∞} 제어이론, LQG와 같은 최적제어 이론에 의한 제어기의 차수는 통상 모델차수와 동일한 고차원의 제어기가 설계된다. 제어시스템의 설계측면에서 저차원의 제어기는 고차원의 제어기에 비해 적용의 간편성, 신뢰성 등 많은 장점을 내포하고 있다. 따라서 과거 수십년동안 선형 시불변 시스템에 대한 모델 차수 혹은 제어기 차수 축소에 관한 많은 연구가 진행되었다 [1-4]. 그후 불확실한 선형시스템에 대한 모델 차수 축소에 관한 연구가 선형행렬 부등식을 이용하여 진행되었으며 그중에서도 Beck 등[5]은 불확실한 이산시스템에 대한 모델차수 축소방안과 모델차수 축소오차를 제시하였다. 또한 몇몇 연구자에 의해 불확실한 시변 매개변수를 갖는 선형시스템에 대한 모델차수 축소에 관한 연구가 발표되었다[6-8]. 그러나 비선형시스템에 관한 모델 차수 축소에 관한 연구는 많은 활용이 가능한 분야이지만 미미한 실정이다.

최근 비선형시스템의 효과적인 제어시스템의 설계를 위하여 비선형 시스템을 T-S 퍼지시스템으로 모델하여 제어기를 설계하는 기법이 많이 연구가 되고 있다[9-11]. 통상의 모델과는 달리 T-S 퍼지시스템은 여러 개의 선형시스템으로 구성되어 퍼지 IF-THEN 규칙에 의하여 비선형시스템의 전

역적인 특성을 모델한다. 그러나 퍼지시스템에서도 제어기 설계과정에서의 복잡성과 설계된 퍼지 제어기의 간략화를 위하여 차원이 적은 퍼지 모델이 바람직하다.

본 연구에서는 선형행렬 부등식기법을 이용하여 불확실한 퍼지시스템의 모델 차수 축소방안을 제시하고 모델오차를 제시한다. 모델 불확실성은 시변 매개변수 불확실성 뿐만 아니라 시간지연, 모델되지 않는 동적 불확실성을 효과적으로 포함할 수 있는 적분2차 제약조건(Integral Quadratic Constraint)으로 표현한다[12]. 2절에서는 적분 2차 제약조건을 갖는 퍼지시스템을 정의하고 3절에서 일반화 가제어성 그래미안과 일반화 가관측성 그래미안을 정의하고 이들을 이용하여 균형화된 퍼지시스템의 상태공간 모델을 구현한다. 4절에서 균형화된 퍼지시스템의 상태공간 구현으로부터 모델 차수 축소 방안을 제시하고 모델 오차의 상한치를 제시한다. 5절에서 수치예를 통하여 제시된 방법의 효용성을 검증하고 6절에서 결론을 맺는다.

이 연구에서 사용하는 기호는 통상적인 표준을 따른다. R^n 은 n 차원 실 벡터공간을 의미하고 $R^{n \times m}$ 은 $n \times m$ 행렬의 집합을 의미한다. A^T 는 A 의 전치행렬을 의미하고 0 은 영 행렬을 I 는 단위 행렬을 의미한다. $M > 0$ 은 M 이 대칭 양한정 행렬을 의미하고 블록 대칭행렬에서 (i, j) 블록에서의 $*$ 는 (j, i) 블록의 전치행렬을 의미한다. 마지막으로 $\| \cdot \|_{\infty}$ 는 시스템의 H_{∞} 노음을 의미한다.

접수일자 : 2005년 7월 27일

완료일자 : 2006년 4월 10일

감사의 글 : 본 연구는 산업자원부의 지원에 의하여 기초전력연구원(R2005-B-132) 주관으로 수행된 과제임.

2. 불확실한 T-S 퍼지시스템

다음의 불확실한 T-S 퍼지시스템을 생각한다.

Plant Rule $i(i=1, \dots, r)$:

IF $\rho_1(t)$ is M_{i1} and \dots and $\rho_g(t)$ is M_{ig} ,

THEN

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + \sum_{j=1}^q F_{ij} p_j(t) \\ y(t) &= C_i x(t) + \sum_{j=1}^q G_{ij} p_j(t) \\ q_j(t) &= H_{ij} x(t) + J_{ij} u(t) + K_{ij} p_j(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 r 은 퍼지 규칙의 수이고 $\rho_j(t)$ 와 M_{ik} ($k=1, \dots, g$)는 전제변수와 퍼지집합이다.

$x(t) \in R^n$ 은 상태변수이고 $u(t) \in R^m$ 은 입력변수, $y(t) \in R^p$ 는 출력변수, $p_j(t) \in R^{k_j}$ 와 $q_j(t) \in R^{k_j}$ ($j=1, \dots, q$)는 다음의 적분2차 제약조건을 만족하는 불확실성에 관련된 변수이다.

$$\int_0^\infty p_j(t)^T p_j(t) dt \leq \int_0^\infty q_j(t)^T q_j(t) dt, \quad (2)$$

A_i, B_i, \dots, K_{ij} 는 적절한 차원을 갖는 상수행렬이다. 또한 간략한 표현을 위해 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} F_i &= [F_{i1} \dots F_{iq}], \quad G_i = [G_{i1} \dots G_{iq}], \\ H_i^T &= [H_{i1}^T \dots H_{iq}^T], \\ J_i^T &= [J_{i1}^T \dots J_{iq}^T], \quad K_i^T = [K_{i1}^T \dots K_{iq}^T]. \end{aligned}$$

정규화된 소속함수 $\mu_i(\rho(t))$ ($i=1, \dots, r$)를 (3)과 같이 정의하면

$$\mu_i(\rho(t)) = \frac{\prod_{k=1}^g M_{ik}(\rho_k(t))}{\sum_{i=1}^r \prod_{k=1}^g M_{ik}(\rho_k(t))}, \quad (3)$$

정규화된 소속함수는 다음을 만족한다.

$$\mu_i(\rho(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i(\rho(t)) = 1. \quad (4)$$

간략화를 위해 $\mu_i = \mu_i(\rho(t))$, $\mu^T = [\mu_1 \dots \mu_r]$ 이라 정의하면 불확실한 퍼지시스템 (1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i (A_i x(t) + B_i u(t) + F_i p(t)) \\ &= A(\mu)x(t) + B(\mu)u(t) + F(\mu)p(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i (C_i x(t) + G_i p(t)) \\ &= C(\mu)x(t) + G(\mu)p(t) \\ q(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i (H_i x(t) + J_i u(t) + K_i p(t)) \\ &= H(\mu)x(t) + J(\mu)u(t) + K(\mu)p(t). \end{aligned} \quad (5)$$

퍼지 시스템(5)를 이후부터는 행렬을 이용하여 다음의 형태로 나타낸다.

$$G = \left[\begin{array}{c|c|c} A(\mu) & F(\mu) & B(\mu) \\ \hline H(\mu) & K(\mu) & J(\mu) \\ \hline C(\mu) & G(\mu) & 0 \end{array} \right] \quad (6)$$

3. 균형화된 상태공간 구현

이 절에서는 일반화 가제어성 그라미안과 가관측성 그라미안을 이용하여 불확실한 퍼지 시스템 (6)의 균형화된 상태공간 구현을 기술한다. 이를 위해 먼저 일반화 가제어성 그라미안과 일반화 가관측성 그라미안을 정의한다.

보조정리1 : (일반화 가제어성/가관측성 그라미안)

(1) 선형행렬 부등식 (8)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 Q 와 $R = \text{diag}(\tau_1 I_{k_1}, \dots, \tau_q I_{k_q}) > 0$ 이 존재하면 모든 $t \geq 0$ 에서 $u(t) \equiv 0$ 일 때 퍼지 시스템 (6)의 출력 에너지는 다음과 같이 유계된다.

$$\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt < x(0)^T Q x(0) \quad (7)$$

$$L_{0i} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_i^T Q + Q A_i & * & * & * & * & * \\ R H_i & -R & * & * & * & * \\ F_i^T Q & K_i^T R & -R & * & * & * \\ C_i & 0 & G_i & -I & & \end{array} \right] < 0, \quad i=1, \dots, r \quad (8)$$

(2) 선형행렬 부등식 (10)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 P 와 $S = \text{diag}(\bar{\tau}_1 I_{k_1}, \dots, \bar{\tau}_q I_{k_q}) > 0$ 이 존재하면 $x(-\infty) = 0$ 에서 $x(0) = x_0$ 로 천이하는데 필요한 입력에너지는 다음과 같이 유계된다.

$$\int_{-\infty}^0 u(t)^T u(t) dt < x_0^T P^{-1} x_0 \quad (9)$$

$$L_{ci} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} P A_i^T + A_i P & * & * & * & * & * \\ H_i P & -S & * & * & * & * \\ S F_i^T & S K_i^T & -S & * & * & * \\ B_i^T & J_i^T & 0 & -I & & \end{array} \right] < 0, \quad i=1, \dots, r \quad (10)$$

(증명)

(1) 리아푸노프 후보함수 $V = x(t)^T Q x(t)$ 를 정의한다. 모든 i 에 대해 선형행렬 부등식 (8)이 성립하므로 (4)를 만족하는 모든 μ 에 대해 다음의 선형행렬 부등식이 성립한다.

$$L_0(\mu) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A(\mu)^T Q + Q A(\mu) & * & * & * & * & * \\ R H(\mu) & -R & * & * & * & * \\ F(\mu)^T Q & K(\mu)^T R & -R & * & * & * \\ C(\mu) & 0 & G(\mu) & -I & & \end{array} \right] < 0 \quad (11)$$

따라서 Schur complement 정리에 의해

$$\bar{L}_0(\mu) = \left[\begin{array}{c|c} \bar{L}_{11} & * \\ \hline \bar{L}_{21} & K(\mu)^T R K(\mu) - R + G(\mu)^T G(\mu) \end{array} \right] < 0 \quad (12)$$

이 성립한다. 여기에서

$$\begin{aligned} \bar{L}_{11} &= A(\mu)^T Q + Q A(\mu) + C(\mu)^T C(\mu) + H(\mu)^T R H(\mu) \\ \bar{L}_{21} &= G(\mu)^T C(\mu) + F(\mu)^T Q + K(\mu)^T R H(\mu) \end{aligned}$$

이다. 출력에너지는 S-과정에 의해

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt \\ & \leq \int_0^\infty (y(t)^T y(t) + \dot{V}(t)) dt + V(0) \\ & \leq \int_0^\infty \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix}^T \mathcal{L}_o(\mu) \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + V(0) \\ & \leq x(0)^T Q x(0) \end{aligned} \quad (13)$$

를 얻는다.

(2)의 증명은 리아푸노프 후보함수 $V = x(t)^T P^{-1} x(t)$ 를 정의하고 (1)에서처럼 S-과정을 적용하여 증명할 수 있으며 생각한다.

선형 행렬 부등식 (8)과 (10)의 해인 양한정 행렬 Q, P 를 [6]에서와 같이 일반화 가관측성, 일반화 가제어성 그래미안이라고 정의한다. 선형 시불변 시스템의 경우 가관측성/가제어성 그래미안이 유일하게 결정되지만 본 연구에서 정의한 일반화 가관측성/가제어성 그래미안은 선형행렬 부등식의 해로 정의되므로 유일하지가 않다. 그러나 일반화 가관측성/가제어성 그래미안은 출력 에너지와 입력에너지에 대한 상한치와 하한치를 제시한다.

일반화 가관측성/가제어성 그래미안을 이용하여 불확실한 퍼지 시스템 (6)의 균형화된 상태공간 구현을 얻는 방법을 다음에 제시한다. 먼저 다음을 만족하는 변환행렬 T 와 W 를 정의한다.

$$\begin{aligned} \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = T^x Q T = T^{-1} P T^{-T}, \quad (14) \\ & \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n, \\ \Pi &= \text{diag}(\pi_1 I_{i_1}, \pi_2 I_{i_2}, \dots, \pi_q I_{i_q}) \\ &= W^x R W = W^{-1} S W^{-T}, \\ & \pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_q, \end{aligned}$$

여기에서 아래첨자 i_j ($j=1, \dots, q$)는 $p_j(t)$ 의 차원 k_j ($j=1, \dots, q$)로 구성된 집합 $\{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ 의 원소이다.

(14)에서 정의된 변환행렬 T 와 W 를 이용하여 불확실한 퍼지시스템 (6)을 다음과 같이 좌표 변환한다.

$$\begin{aligned} G_b &= \left[\begin{array}{c|c|c} A_b(\mu) & F_b(\mu) & B_b(\mu) \\ \hline H_b(\mu) & K_b(\mu) & J_b(\mu) \\ \hline C_b(\mu) & G_b(\mu) & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} T^{-1} A(\mu) T & T^{-1} F(\mu) W & T^{-1} B(\mu) \\ \hline W^{-1} H(\mu) T & W^{-1} K(\mu) W & W^{-1} J(\mu) \\ \hline C(\mu) T & G(\mu) W & 0 \end{array} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

이 경우 (15)에 주어진 상태공간 구현은 다음의 선형 행렬 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} L_o(\mu) &= \left[\begin{array}{c|c|c} L_{o,11} & * & * \\ \hline \Pi H_b(\mu) & \Pi & * \\ \hline L_{o,31} & K_b(\mu)^T \Pi & G_b(\mu)^T G_b(\mu) - \Pi \end{array} \right] < 0, \\ L_{o,11} &= A_b(\mu)^T \Sigma + \Sigma A_b(\mu) + C_b(\mu)^T C_b(\mu) \\ L_{o,31} &= G_b(\mu)^T C_b(\mu) + F_b(\mu)^T \Sigma \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} L_c(\mu) &= \left[\begin{array}{c|c|c} L_{c,11} & * & * \\ \hline L_{c,21} & J_b(\mu) J_b(\mu)^T - \Pi & * \\ \hline \Pi F_b(\mu)^T & \Pi K_b(\mu)^T & -\Pi \end{array} \right] < 0, \\ L_{c,11} &= \Sigma A_b(\mu)^T + A_b(\mu) \Sigma + B_b(\mu) B_b(\mu)^T \\ L_{c,21} &= H_b(\mu) \Sigma + J_b(\mu) B_b(\mu)^T \end{aligned} \quad (17)$$

(16)과 (17)에서부터 일반화 가관측성 그래미안과 가제어성 그래미안이 동일함을 알 수 있다. 이러한 이유로 상태공간 구현 (15)를 균형화된 상태공간 구현이라 호칭하고 Σ 를 균형화된 그래미안이라고 부른다.

4. 균형화된 모델차수 축소

이 절에서는 앞 절에서 정의된 균형화된 상태공간 모델로부터 모델 차수 축소 방법을 제시하고 결과의 모델 오차의 상한치를 제시한다. 이미 불확실한 퍼지 시스템 (6)이 균형화되었으며 다음과 같이 분할되었다고 가정한다.

$$\begin{aligned} G &= \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu) & F_{11}(\mu) & F_{12}(\mu) & B_1(\mu) \\ A_{21}(\mu) & A_{22}(\mu) & F_{21}(\mu) & F_{22}(\mu) & B_2(\mu) \\ \hline H_{11}(\mu) & H_{12}(\mu) & K_{11}(\mu) & K_{12}(\mu) & J_1(\mu) \\ H_{21}(\mu) & H_{22}(\mu) & K_{21}(\mu) & K_{22}(\mu) & J_2(\mu) \\ \hline C_1(\mu) & C_2(\mu) & G_1(\mu) & G_2(\mu) & 0 \end{array} \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i \left[\begin{array}{cc|cc|c} A_{i,11} & A_{i,12} & F_{i,11} & F_{i,12} & B_{i,1} \\ A_{i,21} & A_{i,22} & F_{i,21} & F_{i,22} & B_{i,2} \\ \hline H_{i,11} & H_{i,12} & K_{i,11} & K_{i,12} & J_{i,1} \\ H_{i,21} & H_{i,22} & K_{i,21} & K_{i,22} & J_{i,2} \\ \hline C_{i,1} & C_{i,2} & G_{i,1} & G_{i,2} & 0 \end{array} \right], \quad (18) \end{aligned}$$

여기에서 $A_{11}(\mu) \in R^{k \times k}$, $F_{11}(\mu) \in R^{k \times (i_1 + \dots + i_q)}$ 이고 다른 행렬들도 적절한 차원으로 분할되었다.

(18)의 상태공간 구현으로부터 $n-k$ 개의 상태변수와 $q-v$ 개의 적분 2차 제약조건을 만족하는 불확실한 변수를 절삭하여 다음의 간략화된 시스템을 얻는다.

$$\begin{aligned} \bar{G} &= \left[\begin{array}{c|c|c} A_1(\mu) & F_1(\mu) & B_1(\mu) \\ \hline H_{11}(\mu) & K_{11}(\mu) & J_1(\mu) \\ \hline C_1(\mu) & G_1(\mu) & 0 \end{array} \right] \\ &= \sum_{i=1}^r \mu_i \left[\begin{array}{c|c|c} A_{i,11} & F_{i,11} & B_{i,1} \\ \hline H_{i,11} & K_{i,11} & J_{i,1} \\ \hline C_{i,1} & G_{i,1} & 0 \end{array} \right] \quad (19) \end{aligned}$$

정리 2 : 간략화된 시스템 (19)는 2차 안정(quadratically stable)하고 균형화되었다. 또한 모델 오차는 다음과 같이 유계된다.

$$\|G - \bar{G}\|_\infty \leq 2 \left(\sum_{j=1}^n \sigma_j + \sum_{j=1}^q \pi_j \right) \quad (20)$$

(증명) $\Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$, $\Pi = \text{diag}(\Pi_1, \Pi_2)$ 로 분할한다. 여기에서 $\Sigma_1 \in R^{k \times k}$ 이고 $\Pi_1 = R^{(i_1 + \dots + i_q) \times (i_1 + \dots + i_q)}$ 이다. 그러면 차수 축소된 시스템 (19)는 선형 행렬 부등식 (21)과 (22)를 만족한다.

$$\begin{bmatrix} L_1 & * & * \\ \Pi_1 H_{11}(\mu) & -\Pi_1 & * \\ L_2 & K_1(\mu)^T \Pi_1 & G_1(\mu)^T G_1(\mu) - \Pi_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$L_1 = A_{11}(\mu)^T \Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11}(\mu) + C_1(\mu)^T C_1(\mu)$$

$$L_2 = G_1(\mu)^T C_1(\mu) + F_{11}(\mu)^T \Sigma_1$$

$$\begin{bmatrix} L_3 & * & * \\ L_4 & J_1(\mu) J_1(\mu)^T - \Pi_1 & * \\ \Pi_1 F_{11}(\mu)^T & \Pi_1 K_1(\mu)^T & -\Pi_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (22)$$

$$L_3 = \Sigma_1 A_{11}(\mu)^T + A_{11}(\mu) \Sigma_1 + B_1(\mu) B_1(\mu)^T$$

$$L_4 = H_{11}(\mu) \Sigma_1 + J_1(\mu) B_1(\mu)^T$$

따라서 차수 축소된 시스템 (19)는 2차 안정하고 균형화되었다. 모델오차의 유계치를 증명하기 위해서 일반성을 잃지 않고 다음의 두가지 경우를 생각한다.

case 1 : ($k=n-1, v=q$)

이 경우에는 $F_{12}(\mu), F_{22}(\mu), H_{21}(\mu), H_{22}(\mu), J_2(\mu)$ 와 $G_2(\mu)$ 는 빈 행렬(empty matrix)이다. 따라서 오차 시스템 $G^e = G - \bar{G}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G^e = \begin{bmatrix} \bar{A}_e(\mu) & \bar{F}_e(\mu) & \bar{B}_e(\mu) \\ \bar{H}_e(\mu) & \bar{K}_e(\mu) & \bar{J}_e(\mu) \\ \bar{C}_e(\mu) & \bar{G}_e(\mu) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1(\mu) & 0 & 0 & F_{11}(\mu) & 0 & B_1(\mu) \\ 0 & A_1(\mu) & A_{21}(\mu) & 0 & F_{11}(\mu) & B_1(\mu) \\ 0 & A_{21}(\mu) & A_{22}(\mu) & 0 & F_{21}(\mu) & B_2(\mu) \\ H_{11}(\mu) & 0 & 0 & K(\mu) & 0 & J(\mu) \\ 0 & H_{11}(\mu) & H_{12}(\mu) & 0 & K(\mu) & J(\mu) \\ -C_1(\mu) & C_1(\mu) & C_2(\mu) & -G(\mu) & G(\mu) & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

오차 시스템 (23)에서 행렬 M 을 이용하여 좌표변환하면

$$G^e = \begin{bmatrix} A_e(\mu) & F_e(\mu) & B_e(\mu) \\ H_e(\mu) & K_e(\mu) & J_e(\mu) \\ C_e(\mu) & G_e(\mu) & 0 \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} M^{-1} \bar{A}_e(\mu) M & M^{-1} \bar{F}_e(\mu) & M^{-1} \bar{B}_e(\mu) \\ \bar{H}_e(\mu) M & \bar{K}_e(\mu) & \bar{J}_e(\mu) \\ \bar{C}_e(\mu) M & \bar{G}_e(\mu) & 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

를 얻는다. 여기에서

$$M = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ I & -I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

다음의 선형 행렬 부등식 (23)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 Σ_e 와 Π_e 가 존재하면 오차 시스템은 $\|G^e\| \leq \gamma$ 를 만족한다.

$$L = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & * & * \\ \Gamma_{21} & J_e(\mu) J_e(\mu)^T - \Pi_e & * \\ \Gamma_{31} & \Pi_e K_e(\mu)^T & \Gamma_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

여기에서

$$\Gamma_{11} = \Sigma_e A_e(\mu)^T A_e(\mu) \Sigma_e + B_e(\mu) B_e(\mu)^T + \gamma^{-2} \Sigma_e C_e(\mu)^T C_e(\mu) \Sigma_e,$$

$$\Gamma_{21} = H_e(\mu) \Sigma_e + J_e(\mu) B_e(\mu)^T$$

$$\Gamma_{31} = \Pi_e F_e(\mu)^T + \gamma^{-2} \Pi_e G_e(\mu)^T C_e(\mu) \Sigma_e$$

$$\Gamma_{33} = \gamma^{-2} \Pi_e G_e(\mu)^T G_e(\mu) \Pi_e - \Pi_e.$$

$$\gamma = 2\sigma_n, \quad \Sigma_e = \text{diag}(\Sigma_1, \sigma_n^2 \Sigma_1^{-1}, 2\sigma_n),$$

$\Pi_e = \begin{bmatrix} \Pi + \sigma_n^2 \Pi^{-1} & \Pi - \sigma_n^2 \Pi^{-1} \\ \Pi - \sigma_n^2 \Pi^{-1} & \Pi + \sigma_n^2 \Pi^{-1} \end{bmatrix}$ 라 정의한다. 그러면 행렬 부등식 (25)는 다음과 같이 표현된다.

$$L = \begin{bmatrix} U_1^T & 0 & 0 \\ 0 & U_2^T & 0 \\ 0 & 0 & U_2^T \end{bmatrix} L_e(\mu) \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$+ \begin{bmatrix} V_1^T & 0 & 0 \\ 0 & V_2^T & 0 \\ 0 & 0 & V_2^T \end{bmatrix} L_e(\mu) \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 \end{bmatrix} < 0$$

여기에서

$$U_1 = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix}.$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_n \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} \sigma_n \Pi^{-1} \\ -\sigma_n \Pi^{-1} \end{bmatrix}.$$

case2 : ($k=n, v=q-1$)

이 경우 $A_{12}(\mu), A_{21}(\mu), A_{22}(\mu), F_{21}(\mu), F_{22}(\mu), H_{12}(\mu), H_{22}(\mu)$ 는 빈 행렬이다. 따라서 오차 시스템 $G^e = G - \bar{G}$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$G^e = \begin{bmatrix} \bar{A}_e(\mu) & \bar{F}_e(\mu) & \bar{B}_e(\mu) \\ \bar{H}_e(\mu) & \bar{K}_e(\mu) & \bar{J}_e(\mu) \\ \bar{C}_e(\mu) & \bar{G}_e(\mu) & 0 \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} A(\mu) & 0 & F_{11}(\mu) & 0 & 0 & B(\mu) \\ 0 & A(\mu) & 0 & F_{11}(\mu) & F_{12}(\mu) & B(\mu) \\ H_{11}(\mu) & 0 & K_{11}(\mu) & 0 & 0 & J_1(\mu) \\ 0 & H_{11}(\mu) & 0 & K_{11}(\mu) & K_{12}(\mu) & J_1(\mu) \\ 0 & H_{21}(\mu) & 0 & K_{21}(\mu) & K_{22}(\mu) & J_2(\mu) \\ -C(\mu) & C(\mu) & -G_1(\mu) & G_1(\mu) & G_2(\mu) & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

오차 시스템에서 변환행렬 M 으로 좌표변환하면 다음의 변환된 시스템을 얻는다.

$$G^e = \begin{bmatrix} A_e(\mu) & F_e(\mu) & B_e(\mu) \\ H_e(\mu) & K_e(\mu) & J_e(\mu) \\ C_e(\mu) & G_e(\mu) & 0 \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} M^{-1} \bar{A}_e(\mu) M & M^{-1} \bar{F}_e(\mu) & M^{-1} \bar{B}_e(\mu) \\ \bar{H}_e(\mu) M & \bar{K}_e(\mu) & \bar{J}_e(\mu) \\ \bar{C}_e(\mu) M & \bar{G}_e(\mu) & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

여기에서 $M = \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix}$ 이다.

다음과 같이 정의한다.

$$x = 2\pi\sigma, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & \pi_\sigma J_{i_\sigma} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \pi_\sigma^2 \Sigma^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\Pi_e = \begin{bmatrix} \Pi_1 + \pi_\sigma^2 \Pi_1^{-1} & \Pi_1 - \pi_\sigma^2 \Pi_1^{-1} & 0 \\ \Pi_1 - \pi_\sigma^2 \Pi_1^{-1} & \Pi_1 + \pi_\sigma^2 \Pi_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi_\sigma J_{i_\sigma} \end{bmatrix}$$

그러면 행렬 부등식 (25)는 다음과 같이 표현된다.

$$L = \begin{bmatrix} U_1^T & 0 & 0 \\ 0 & U_2^T & 0 \\ 0 & 0 & U_2^T \end{bmatrix} L_c(\mu) \begin{bmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$+ \begin{bmatrix} V_1^T & 0 & 0 \\ 0 & V_2^T & 0 \\ 0 & 0 & V_2^T \end{bmatrix} L_d(\mu) \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_2 \end{bmatrix} < 0$$

여기에서

$$U_1 = [I \ 0], \quad U_2 = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad V_1 = [0 \ \pi_\sigma \Sigma^{-1}],$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} \pi_\sigma \Pi_1^{-1} & -\pi_\sigma \Pi_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix}$$

증명 끝.

정리 2에서 모델오차의 상한치를 제시하였다. 그러나 비제약적인(less conservative) 모델오차의 상한치를 얻기 위해서는 (20)에서의 σ_i 와 π_i 가 작아야한다. 따라서 적절한 양수 α 에 대해서 가치함수 $J = tr(PQ) + \alpha tr(RS)$ 를 설정하고 볼록 제약조건(convex constraints) (8)과 (10)을 만족하는 P, Q, R, S 중에서 가치함수를 최적화하는 해를 구한다. 그러나 이 경우 최적화문제는 제약조건은 볼록하지만 가치함수가 볼록하지 않아 전역적인 최적해를 구하기가 아주 어렵다. 그러므로 본 연구에서는 반복법에 의한 준최적해를 구하는 엘고리들을 기술한다.

단계1 : $i=0$ 으로 두고 $tr(P_i + Q_i) + \alpha tr(R_i + S_i)$ 를 최소화하는 P_i, Q_i, R_i, S_i 를 구하여 초기화한다.

단계2 : $i=i+1$ 이라 설정한다.

1) 선형 행렬 부등식 (8)의 제약조건하에서 $J_i = tr(P_{i-1}Q_i) + \alpha tr(R_i S_{i-1})$ 를 최소화하는 Q_i, R_i 를 구한다.

2) 선형 행렬 부등식 (10)의 제약조건하에서 $J_i = tr(P_i Q_i) + \alpha tr(R_i S_i)$ 를 최소화하는 P_i, S_i 를 구한다.

단계3 : $|J_i - J_{i-1}|$ 이 허용값 이하이면 반복을 중단하고 그렇지 않으면 단계2로 가서 반복을 계속 진행한다.

5. 수치 예

수치 예를 위해 다음의 비선형 시스템을 생각한다.

$$y(t)^{(3)} = -3y(t) - 3y(t)^3 + y(t)(\sin(\dot{y}(t))) - 17\dot{y}(t) - 7\ddot{y}(t) + (0.1 \cos(\dot{y}(t)) + \sin(y(t)))\dot{y}(t) + u(t) \quad (30)$$

$|y(t)| \leq 1$ 이라 가정하고 (30)을 다음과 같이 시변 매개변수 불확실성을 갖는 T-S 퍼지 시스템으로 나타낸다.

Plant Rule $i(i=1,2)$:

IF $y(t)$ is M_{i1} ,

THEN

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B_i u(t) + F_i \dot{p}(t), \\ y(t) &= C x(t) + G_i \dot{p}(t), \\ q(t) &= H x(t) + J_i u(t), \\ \dot{p}(t) &= \Theta(t)q(t), \end{aligned} \quad (31)$$

여기에서

$$M_{11} = 1 - y(t)^2, \quad M_{21} = y(t)^2, \quad \Theta(t) = \text{diag}(\Theta_1(t), \Theta_2(t)),$$

$$\Theta_1(t) = \cos(\dot{y}(t)), \quad \Theta_2(t) = \sin(\dot{y}(t))$$

이고

$$x(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -17 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -7 & -17 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$J_1 = J_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = C_2 = [1 \ 0 \ 0], \quad G_1 = G_2 = [0 \ 0].$$

위의 시스템 (31)에서 $p(t), q(t)$ 는 (2)의 적분 2차 제약조건을 만족한다. 즉, (31)에 기술된 불확실한 시변 매개변수를 갖는 시스템은 적분 2차 제약조건을 갖는 시스템의 특별한 경우이다.

편의상 $\alpha=1$ 이라 두고 4절에서 기술한 반복법으로 준최적해 P, Q, R, S 를 얻고 이를 이용하여 (14)에서와 같이 균형화된 그래미안 $\Sigma = \text{diag}(0.6300, 0.6526, 0.0390)$, $\Pi = \text{diag}(0.4608, 0.1722)$ 를 얻는다. 균형화된 그래미안을 이용하여 퍼지 시스템 (31)을 균형화하고 상태변수 1개와 적분 2차 제약조건 1개를 절삭하여 다음의 차수 축소된 시스템 \bar{G} 를 얻는다.

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} A_{i1}(\mu) & F_{i1}(\mu) & B_{i1}(\mu) \\ H_{i1}(\mu) & K_{i1}(\mu) & J_{i1}(\mu) \\ C_{i1}(\mu) & G_{i1}(\mu) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^r \mu_i \begin{bmatrix} A_{i11} & F_{i11} & B_{i11} \\ H_{i11} & K_{i11} & J_{i11} \\ C_{i11} & G_{i11} & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

여기에서

$$A_{1,11} = \begin{bmatrix} -0.1082 & 0.3754 \\ -0.3752 & -0.2912 \end{bmatrix}, \quad A_{2,11} = \begin{bmatrix} -0.2978 & 0.5611 \\ -0.5622 & -0.1080 \end{bmatrix},$$

$$B_{1,11} = B_{2,11} = \begin{bmatrix} 0.2504 \\ 0.2470 \end{bmatrix}, \quad F_{1,11} = F_{2,11} = \begin{bmatrix} 0.2270 \\ 0.2239 \end{bmatrix},$$

$$H_{1,11} = H_{2,11} = [0.2343 \ -0.2069], \quad J_{1,11} = J_{2,11} = 0,$$

$$G_{1,11} = G_{2,11} = 0, \quad C_{1,11} = C_{2,11} = [0.2523 \ -0.2472].$$

이고 정리2로부터 모델축소 오차의 상한치는 0.4224이다.

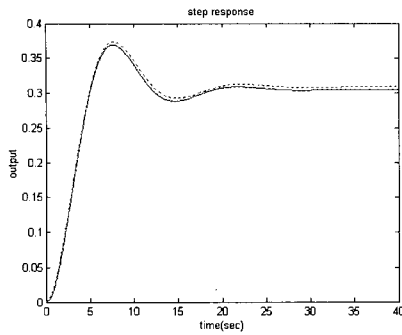


그림 1. 단위계단응답의 비교

참고로 모델 축소전의 시스템 (31)과 축소후의 시스템 (32)에 대해서 단위 계단응답을 그림1에 나타내었다. 그림 1에서 실선은 시스템 (31)의 응답이고 점선은 모델축소 시스템 (32)의 응답이며 관찰하는 바와 같이 축소전과 축소후의 시스템의 시간 응답은 거의 유사함을 알 수 있다.

6. 결 론

본 연구에서는 불확실성을 갖는 비선형 시스템에 대한 모델 차수축소에 관한 방법을 제시하였다. 이를 위하여 먼저 비선형 시스템을 적분 2차 제약조건을 갖는 T-S 퍼지시스템으로 모델하고 퍼지시스템에 대한 일반화 가관측성/가제어성 그래미안을 정의하였다. 일반화 가관측성/가제어성 그래미안은 선형행렬 부등식의 해를 구하여 얻을 수 있으며 출력 에너지와 입력 에너지의 상한치와 하한치와 관련이 있음을 보였다. 일반화 가관측성/가제어성 그래미안을 이용하여 불확실한 퍼지시스템의 균형화된 상태공간 모델을 얻고 상태변수 뿐만 아니라 적분 2차 제약조건을 절삭하여 간략화된 비선형 모델을 얻었다.

참 고 문 헌

[1] B. C. Moore : Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability and model reduction. IEEE Trans. Automatic Contr., vol.26, pp.17-32, 1982

[2] L. Pernebo and L. M. Silverman : Model reduction via balanced state space representations. IEEE Trans. Automatic Contr., vol.27, pp.382-387, 1982

[3] K. Glover : All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their error bounds. Int. J. Control, vol.39 pp.1115-1193, 1984

[4] Y. Liu and B. D. O. Anderson : Singular perturbation approximation of balanced systems. Int. J. Control, vol.50, pp.1379-1405. 1989

[5] C. L. Beck, J. Doyle and K. Glover : Model reduction of multidimensional and uncertain systems. IEEE Trans. Automatic Contr., vol.41 pp. 1466-1477, 1996

[6] G. D. Wood, P. J. Goddard and K. Glover : Approximation of linear parameter varying systems. Proceedings of the 35th CDC, Kobe, Japan, Dec. pp.406-411, 1996

[7] F. Wu : Induced L_2 norm model reduction of polytopic uncertain linear systems. Automatica, vol.32, No.10, pp.1417-1426, 1996. F. Wu : Induced

[8] W.M. Haddad and V. Kapila : Robust, reduced order modeling for state space systems via parameter dependent bounding functions. Proceedings of American control conference, Seattle, Washington, June pp.4010-4014, 1996

[9] K. Tanaka, T. Ikeda, H.O.Wang : Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control : Quadratic stabilizability, control theory, and linear matrix inequalities. IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol.4, no.1, Feb., pp.1-13, 1996

[10] S.K.Nguang, P.Shi : Fuzzy output feedback control design for nonlinear systems : an LMI approach. IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol.11, no.3, June pp.331-340, 2003

[11] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo and Y. Yamamoto : Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. IEEE Trans. Fuzzy Systems, vol.9, no.2, April, pp.324-332, 2001.

[12] V. A. Yakubovich : Frequency conditions of absolute stability of control systems with many nonlinearities. Automatica Telemekhanica, vol.28, pp.5-30, 1967.

저 자 소 개

류석환(Seog-Hwan Yoo)

제14권 5호 참조

최병재(Byung-Jae Choi)

제14권 5호 참조